



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.13

УДК 517.95:539.374

## ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ БОКОВОЙ ЭКСТРУЗИИ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННЫХ ПОРОПЛАСТОВ

Г.М. Севастьянов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 30 октября 2018 г.

Принята: 29 апреля 2019 г.

Опубликована: 28 июня 2019 г.

#### Ключевые слова:

равноканальное угловое прессование, боковая экструзия, необратимая сжимаемость, эллиптическая поверхность текучести, фильтрация, жесткопластический анализ, аналитические решения, системы квазилинейных уравнений в частных производных.

### АННОТАЦИЯ

Известно, что некомпактные материалы (пористые, порошковые, с дефектами сплошности) существенно слабее сопротивляются сдвигу, чем всестороннему сжатию. Эффект дилатансии в таких средах вызывает изменение плотности при сдвиговой деформации. Для компактных материалов известен процесс боковой экструзии или равноканального углового прессования, который реализует в зоне деформации напряженное состояние, близкое к чистому сдвигу (в отличие, например, от прямой экструзии, где реализуется простой сдвиг). Можно ожидать, что РКУП некомпактных материалов менее энергозатратно и приводит к более интенсивной консолидации каркаса, чем гидростатическое сжатие. В частности, РКУП может рассматриваться как один из способов отжима флюида из пористой среды (масел из растительного сырья, воды из грунтов и т.д.). Моделированию таких процессов посвящена настоящая работа.

Рассматривается плоская задача о стационарном пластическом деформировании материала в области сопряжения щелевых каналов. Сечение области деформирования представляет собой сектор кольца. Материал полагается необратимо сжимаемым, подчиняющимся эллиптическому условию текучести типа Грина. Рассматривается фильтрация флюида в порах при наличии стока на одной из стенок канала. Выдвигается ряд модельных предположений: о кинематике частиц каркаса (плоское азимутальное движение в цилиндрической системе координат); о малом изменении плотности материала (и, соответственно, малом изменении его механических характеристик); о том, что внутрипоровое давление мало по сравнению с напряженным состоянием каркаса и не оказывает существенного влияния на процесс пластического течения. Проведен жесткопластический анализ и получено точное решение механической части задачи. В случае постоянного коэффициента фильтрации получено точное решение задачи фильтрации флюида в виде поля внутрипорового давления. По этим результатам однозначно восстанавливается двумерное векторное поле скорости фильтрации и мощность стока. В случае непостоянного коэффициента фильтрации задача сведена к интегрированию краевой задачи анизотропной теплопроводности с частным случаем анизотропии, для которой известен ряд точных решений.

© ПНИПУ

© Севастьянов Георгий Мамиевич – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: akela.86@mail.ru, [iD: 0000-0003-4755-5305](https://orcid.org/0000-0003-4755-5305)

Georgiy M. Sevastyanov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher,

e-mail: akela.86@mail.ru, [iD: 0000-0003-4755-5305](https://orcid.org/0000-0003-4755-5305)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## FILTRATION IN FLUID-SATURATED PORO-PLASTIC MATERIALS DURING LATERAL EXTRUSION

G.M. Sevastyanov

Institute of Machinery and Metallurgy, Russian Academy of Sciences (Far Eastern Branch), Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 30 October 2018  
Accepted: 29 April 2019  
Published: 28 June 2019

#### Keywords:

equal-channel angular pressing, lateral extrusion, irreversible compressibility, elliptic yield surface, filtration, rigid-plastic analysis, analytical solutions, systems of quasilinear partial differential equations.

### ABSTRACT

It is known that non-compact materials (porous, powdery, with defects in continuity) are much less resistant to shear than to hydrostatic compression. The effect of dilatancy in such media causes a change in density during shear deformation. For compact materials, a process of lateral extrusion (or equal-channel angular pressing) is known. The ECAP realizes a stress state close to a pure shear in the deformation zone (as opposed, for example, to direct extrusion, where a simple shear is realized). It can be expected that ECAP process for non-compact materials is less energy consuming and leads to a more intensive consolidation of the frame material than hydrostatic compression. In particular, ECAP can be considered as one of the methods of extracting the fluid from a porous medium (oils from vegetable raw materials, water from soils, etc.). This paper is devoted to modeling of such processes.

We consider the plane problem of stationary plastic deforming of a material in the region of junction of slot channels. The cross section of the deformation region is an annular sector. We assume that the material is irreversibly compressible and obeys the elliptic Green type yield condition. One of the walls of the channel is permeable to fluid. We consider the fluid filtration in the pores. We use a number of model assumptions. The motion of the frame material particles is a flat azimuthal in a cylindrical coordinate system. The mechanical characteristics of the material vary slightly in accordance with small changes in density. The intraporous pressure is small in compare with the stressed state of the skeleton material and does not have a significant effect on the process of plastic flow. A rigid-plastic analysis was performed and the exact solution of the mechanical part of the problem was obtained. The exact solution of the fluid filtration problem in case of a constant filtration coefficient is obtained. The solution is the intraporous pressure field. When using these results one can determine the two-dimensional vector field of the fluid velocity and the total discharge of flow. In case of a non-constant filtration coefficient, the problem is reduced to integrating the boundary value problem of anisotropic thermal conductivity with a special case of anisotropy, for which a number of exact solutions are known.

© PNRPU

### Введение

Установившиеся течения пластических сред в каналах рассматривались во многих работах начиная с середины XX века. Преимущественно речь шла о сужающихся плоских или осесимметричных каналах, тем самым моделировался достаточно давно известный процесс обработки материалов – прямая экструзия (Соколовский, 1950 [1] – ассоциированный с поверхностью текучести Мизеса закон; Shield, 1955 [2] – призма Треска, гипотеза Хаара–Кармана; Danyluk, 1969 [3] – упруго-пластическая задача в рамках теории Прандтля–Рейсса при условии текучести Мизеса; Aleksandrov, Barlat, 1999 [4] – течение через осесимметричный канал в случае пластического потенциала, заданного произвольной изотропной выпуклой функцией, не зависящей от гидростатического давления). Все указанные решения построены для компактных (несжимаемых) сред.

Для некомпактных материалов механическое поведение и краевые задачи, описывающие процессы интенсивной пластической деформации, оказываются существенно сложнее; на сегодня известны только некоторые точные решения задач, в которых уплотнение

материала происходит в том числе за счет эффектов дилатансии (прямая экструзия в осесимметричной и плоской постановке). Ранние работы по течениям пластически сжимаемых сред в каналах сосредоточены в основном на условии Мора–Кулона, ассоциированном с ним законе и гипотезе полной пластичности Хаара–Кармана (Сох [et al.], 1961 [5]). Ряд результатов получен методами верхней оценки и плоских сечений (Oh, Lee 1985 [6]). Из недавних результатов упомянем точные решения о нестационарном течении сферического слоя, подчиняющегося условию Мизеса–Шлейхера (Monchiet, Kondo, 2012 [7]), условию Друкера–Прагера или Мора–Кулона (Thore [et al.], 2009 [8]), эллиптическому условию типа Грина (Green, 1972 [9]) с постоянными коэффициентами (Shen [et al.], 2012 [10]). Указанные аналитические решения построены для двухконстантных моделей пластически сжимаемых сред, использование которых для описания поведения реальных материалов дает хорошие результаты в случае малых изменений плотности среды. Более сложные модели опираются на функциональные коэффициенты в уравнении поверхности текучести, явно зависящие от плотности. К числу таких относятся широко приме-

няющаяся для моделирования вязкого разрушения модель Гурсона (Gurson, 1977 [11]), а также ряд моделей типа Грина, нашедших применение для описания прессования порошков и деформирования различных пористых тел. Поверхности текучести в обеих указанных моделях при нулевой пористости переходят в цилиндр Мизеса. Решение краевых задач в рамках моделей Гурсона и Грина сопряжено с существенными сложностями. Для модели Гурсона известно приближенное аналитическое решение о движении среды в коническом канале без трения (Durban, Meag, 1991 [12]). Для модели Грина с непостоянными коэффициентами известные аналитические решения фактически исчерпываются двумя работами (Alexandrov [et al.], 2007 [13]; Alexandrov, Druyanov, 1990 [14]). В отличие от предыдущих, здесь полагается сухое трение по закону Кулона–Амонтона, а не трение Прандтля, используется приближенное уравнение равновесия, полученное по методу Хилла (Hill, 1963 [15]). В первой рассматривается обобщение условия Мизеса на некомпактные материалы, во второй – один из вариантов обобщения критерия Треска. Результаты последней демонстрируют, по всей видимости, нереалистичную податливость каркаса. Различным вариантам построения поверхностей текучести сжимаемых материалов с предельным переходом в призму Треска посвящена работа Revil-Baudard, Cazacu, 2014 [16].

Сравнительно недавно Сегалом [17] был предложен новый вид обработки материалов – боковая экструзия или равноканальное угловое прессование. Теоретических исследований, посвященных механике процесса, здесь существенно меньше. Упомянем работы [18–20], в которых речь идет о равноканальном прессовании пластически несжимаемых сред; ряд расчетных данных получен блочным методом, не имеющим очевидных преимуществ перед приближенным анализом в конечно-элементных пакетах, выполненном, например, в [21–23]. Для некомпактных материалов (в том числе с дефектами в виде микропористости) известны только некоторые экспериментальные результаты и расчетные данные МКЭ-моделирования [24–26]. Последнее на сегодня является, по существу, единственным инструментом получения прогнозных оценок напряженно-деформированного состояния в процессах углового прессования сжимаемых сред.

Что касается фильтрационных процессов, вызванных деформированием пористой среды, то большая часть известных работ рассматривает каркас как вязкоупругий континуум [27–28] либо как вязкую жидкость [29]. Аналитические решения для таких процессов в рамках жесткопластического анализа до сих пор не получены, хотя во многих случаях необратимая деформация каркаса является основным механизмом, индуцирующим фильтрацию, а материал каркаса слабо проявляет вязкие свойства. В ряде исследований проведен учет пластической деформации каркаса [30] и получены

результаты численного моделирования, например, в случае прессования в закрытой матрице [31].

В настоящей работе для жесткопластического анализа будем использовать эллиптическое условие текучести с постоянными коэффициентами как наиболее простое, позволяющее описать поведение сжимаемого материала в узком диапазоне изменения плотности. Для описания процесса фильтрации могут быть использованы два различных подхода. В связанной постановке поровое давление может оказывать влияние на переход материала из жесткого состояния в пластическое, в уравнении поверхности текучести будет присутствовать независимая скалярная функция внутривещного давления. Последняя связана с параметрами деформированного состояния посредством уравнения фильтрации и баланса массы фаз. В этом случае векторное уравнение равновесия отличается от соответствующего для сухого каркаса наличием в правой части источника в виде градиента внутривещного давления. Полную систему уравнений в этом случае можно представить в виде переопределенной системы автономных неоднородных квазилинейных ДУЧП первого порядка, совместность которой трудно прогнозировать. Второй подход, который и будет использован в настоящей работе, – использование несвязанной постановки. Такой вариант представляется неплохим приближением в случае достаточно высокой проницаемости каркаса. В этом случае поровое давление исключается из уравнения равновесия каркаса. Механическая часть задачи при ряде предположений кинематического характера сводится к интегрированию автономной системы двух квазилинейных ДУЧП первого порядка относительно одной неизвестной функции. Ее решение используется для построения источника и коэффициентов эллиптического уравнения фильтрации жидкости. Это существенно упрощает постановку задачи, по сути дела сводя ее к известным уравнениям анизотропной теплопроводности.

## 1. Постановка задачи, система уравнений процесса и модельные допущения

Рассмотрим процесс отжима жидкости из пористой среды при прохождении ее через зону сопряжения двух плоских щелевых каналов одинакового сечения (рисунк). Сток организован на цилиндрической поверхности  $r = r_1$ . Будем полагать, что на входе и на выходе из деформационной зоны не происходит разрыва скоростей. Следуя принципам жесткопластического анализа, считаем, что деформирование пористого каркаса исключительно необратимо и происходит в секторе кольца  $D = [r_0, r_1] \times [0, \varphi_0]$ . Отсчет угловой координаты начинается с поверхности выхода из деформационной зоны и направлен против движения материала. На выходе из области деформирования пористый материал с остатка-

ми флюида удаляется, так что давление в жидкости на поверхности  $\varphi = 0$  не отличается от атмосферного.

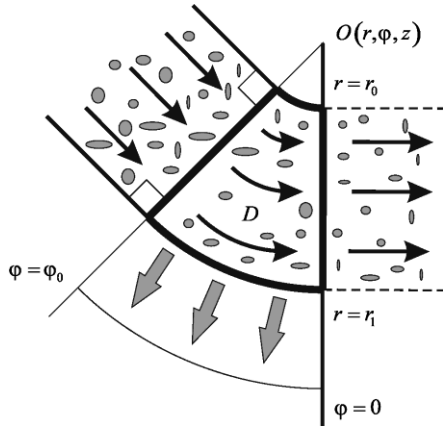


Рис. 1. Схема процесса отжима поропласта

Fig. 1. Diagram of the poro-plastic materials pressing

Для пористого материала примем пластический потенциал вида

$$\Phi = \left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_s, \tau_s$  – константы,  $3\sigma = tr(\boldsymbol{\sigma}), 2\tau^2 = tr(\boldsymbol{\sigma}^2) - tr(\boldsymbol{\sigma})^2 / 3$ ;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор макроскопических напряжений Коши в каркасе; а также ассоциированный с потенциалом (1) закон пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2)$$

где  $\Lambda$  – скалярный пластический множитель;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор скорости деформации каркаса,  $2\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{v})^T + (\nabla \otimes \mathbf{v})$ ;  $\nabla$  – оператор Гамильтона;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости материальных точек каркаса.

Уравнения (1) и (2) позволяют установить связь между тензором напряжений и тензором скорости деформации:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\tau_s} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} + \mathfrak{g} tr(\boldsymbol{\varepsilon})}{\sqrt{tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + \mathfrak{g} tr(\boldsymbol{\varepsilon})^2}}, \quad \mathfrak{g} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_s}{\tau_s}\right)^2 - \frac{1}{3}. \quad (3)$$

Будем пренебрегать массовыми и инерционными силами. Равновесная конфигурация должна удовлетворять уравнению

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Безразмерная плотность каркаса  $\rho$  удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5)$$

Введем вектор скорости фильтрации  $\mathbf{v}^f$  таким образом, что полная скорость движения частиц жидкости

равна  $(\mathbf{v} + \mathbf{v}^f)$ . Принимая для обоих компонентов смеси (материал каркаса и флюид) условие несжимаемости, аналогично (5) запишем для флюида уравнение

$$\frac{\partial(1-\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-\rho)(\mathbf{v} + \mathbf{v}^f)] = 0. \quad (6)$$

Суммируя (5) и (6), имеем [32]

$$\nabla \cdot [\mathbf{v} + (1-\rho)\mathbf{v}^f] = 0. \quad (7)$$

Будем рассматривать достаточно медленное потенциальное течение ньютоновской жидкости в каркасе, подчиняющееся линейному закону фильтрации Дарси

$$\mathbf{q} \equiv (1-\rho)\mathbf{v}^f = -\frac{k}{\mu} \nabla P. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  – вектор потока, прямо пропорциональный проницаемости  $k$  и обратно пропорциональный вязкости флюида  $\mu$ ;  $P$  – внутривязкое давление. В рассматриваемом процессе коэффициент вязкости можно считать постоянным. Проницаемость среды можно считать постоянной лишь в самом грубом приближении. В общем случае  $k$  есть функция относительной плотности каркаса, например, заданная соотношением Козени–Кармана. Упомянутое соотношение существенно нелинейно; небольшой рост относительной плотности каркаса может вызвать заметное падение проницаемости.

Уравнение (4) с учетом (3) интегрируется относительно вектора скорости точек каркаса. Уравнение (5) тогда позволяет найти распределение плотности, а уравнения (7) и (8) служат для определения скорости фильтрации и внутривязкого давления.

Введем цилиндрическую систему координат (см. рисунок) и далее будем полагать, что

1) процесс стационарный,  $\partial \rho / \partial t = 0$ ,

2) движение точек пористого каркаса происходит по дугам окружности, единственная ненулевая компонента вектора скорости есть  $v_\varphi = r\omega(r, \varphi) < 0$ ,  $\omega$  – угловая скорость;  $\partial \omega / \partial \varphi < 0$ , течение замедляется.

Краевые условия:

– на выходе из деформационной зоны канала отсутствует противодавление

$$\sigma_{\varphi\varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0; \quad (9)$$

– известна линейная скорость материала на входе в деформационную зону канала

$$v_\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -v_0 = \text{const}; \quad (10)$$

– известна относительная плотность на входе в деформационную зону канала

$$\rho|_{\varphi=\varphi_0} = \rho_0 = \text{const}; \quad (11)$$

– азимутальная составляющая вектора скорости фильтрации на входе в деформационную зону канала равна нулю  $v_\varphi^f|_{\varphi=\varphi_0} = 0$  или, с учетом (8);

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0; \quad (12)$$

– на выходе из деформационной зоны канала внутривипоровое давление равно нулю

$$P|_{\varphi=0} = 0; \quad (13)$$

– на цилиндрической поверхности  $r = r_0$  задано условие непротекания  $v_r^f|_{r=r_0} = 0$  или, с учетом (8),

$$\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = 0; \quad (14)$$

– цилиндрическая поверхность  $r = r_1$  проницаема для жидкости

$$P|_{r=r_1} = 0. \quad (15)$$

## 2. Решение механической части задачи

С учетом сделанных предположений о кинематике материальных точек каркаса тензор скорости деформации имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r), \quad (16)$$

введена замена независимой переменной  $x = \ln(r_1/r)$ .

Соотношение (3) с учетом (16) позволяет получить компоненты тензора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} = -\tau_s (\chi - 2\chi^{-1}) \cos \psi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\tau_s \chi \cos \psi, \quad \sigma_{r\varphi} = \tau_s \sin \psi, \\ \sin \psi &= \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \chi^2}}, \quad \cos \psi = \frac{\chi}{\sqrt{\Omega^2 + \chi^2}}, \\ \Omega &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right)^{-1} \geq 0, \quad \chi = \sqrt{2(1 + \vartheta)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Напряженное состояние каркаса определяется одной функцией  $\psi(x, \varphi)$ . Из (17) следует, что при отсутствии противодействия на выходе из канала реализуется состояние чистого сдвига.

С учетом (17) две нетривиальные компоненты уравнения равновесия (4)

$$-\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial x} + 2\sigma_{r\varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad -\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0$$

образуют переопределенную систему относительно  $\psi(x, \varphi)$ :

$$\begin{cases} \cos \psi [1 - (\chi^2 - 2) \tan^2 \psi] \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \cos \psi \left[ \chi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - (\chi^2 - 2) \tan \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2 \right] = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Система (18) совместна, из первого уравнения следует  $\partial \psi / \partial x = 0$ , т.е. напряженное состояние не зависит от радиальной координаты. Второе уравнение (18) имеет решение

$$\psi = -2\chi^{-1}(\varphi + C),$$

где  $C = -\frac{\pi \chi}{2 \cdot 2}$  – константа интегрирования, определяющаяся краевым условием (9).

Учитывая (17),  $\tan \psi = \chi^{-1}(\partial \omega / \partial x)(\partial \omega / \partial \varphi)^{-1}$ , откуда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} - \chi \cot(2\chi^{-1}\varphi) \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0. \quad (19)$$

Линейное уравнение в частных производных первого порядка (19) интегрируется методом характеристик [33] и позволяет получить в замкнутом виде угловую скорость

$$\omega = F(\Xi), \quad \Xi = x - \ln \cos^{1/2}(2\chi^{-1}\varphi), \quad (20)$$

где  $F$  – произвольная функция своего аргумента.

Теперь приведем полученное общее решение (20) в соответствие с краевыми условиями процесса. Компонента вектора скорости точек каркаса  $v_\varphi = r_1 e^{-x} \omega = r_1 e^{-x} F[x - \ln \cos^{1/2}(2\chi^{-1}\varphi)]$  на входе в канал не зависит от  $x$ . Это возможно только в том случае, если  $F(\Xi) = F_0 e^{\Xi}$ , где  $F_0$  – константа, определяющаяся краевым условием (10). Таким образом, кинематика среды описывается уравнением

$$v_\varphi = -v_0 \frac{\cos^{1/2}(2\chi^{-1}\varphi_0)}{\cos^{1/2}(2\chi^{-1}\varphi)}, \quad \varphi \in [0, \varphi_0], \quad (21)$$

а необходимое давление для поддержания стационарного течения имеет выражение  $|\sigma_{\varphi\varphi}| = \chi \tau_s \sin(2\chi^{-1}\varphi_0)$ .

Из условия стационарности (5) и краевого условия (11) следует

$$\rho v_\varphi = -\rho_0 v_0. \quad (22)$$

Распределение плотности устанавливается исходя из (22) с учетом решения (21).

## 3. Решение задачи фильтрации

Соотношения (7) и (8) позволяют записать квазилинейное эллиптическое уравнение для скалярного поля внутрипорового давления:

$$\nabla \cdot \left( \frac{k}{\mu} \nabla P \right) = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (23)$$

Правая часть (23) согласно решению (21) есть известная функция пространственных переменных,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = r^{-1} (\partial v_\varphi / \partial \varphi)$ . Коэффициент фильтрации  $k/\mu$  считается известной функцией относительной плотности каркаса. Согласно (21), (22) величина  $k/\mu$  может быть записана как функция пространственной переменной  $\varphi$ .

### 3.1. Случай постоянной проницаемости

Если коэффициент  $k/\mu$  не зависит от локальной относительной плотности каркаса (а следовательно, и от пространственных координат), то (23) представляет собой уравнение Пуассона

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = r \frac{\mu}{k} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (24)$$

Введем, как и прежде, замену независимой переменной  $x = \ln(r_1/r)$ , обозначим  $x_0 = \ln(r_1/r_0)$ . Также введем замену зависимой переменной  $P = r_1 (\mu/k) [W(x, \varphi) + e^{-x} f(\varphi)]$ . Здесь функция  $f(\varphi)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению  $f'' + f = \partial v_\varphi / \partial \varphi$  с краевыми условиями  $f(0) = 0$  и  $f'(\varphi_0) = 0$ :

$$f(\varphi) = \cos \varphi \int_0^\varphi v_\varphi \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi \left( A - \int_\varphi^{\varphi_0} v_\varphi \sin \varphi d\varphi \right),$$

$$A = v_0 \cos^{-1} \varphi_0 + \tan \varphi_0 \int_0^{\varphi_0} v_\varphi \cos \varphi d\varphi. \quad (25)$$

Тем самым краевая задача для уравнения Пуассона (24) в секторе кольца с условиями (12)–(15) сводится к краевой задаче для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (26)$$

с условиями

$$W|_{x=0} = -f(\varphi), \quad W|_{\varphi=0} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = e^{-x_0} f(\varphi), \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0. \quad (27)$$

Точное решение задачи (24)–(25) известно [33]:

$$W(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n \sin(\lambda_n \varphi)}{\lambda_n \operatorname{ch}(\lambda_n x_0)} \times$$

$$\times \left[ e^{-x_0} \operatorname{sh}(\lambda_n x) - \lambda_n \operatorname{ch}(\lambda_n (x_0 - x)) \right],$$

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\varphi_0}, \quad g_n = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \sin(\lambda_n \varphi) d\varphi.$$

Согласно (8) поток флюида из деформационной зоны через поверхность  $r = r_1$  определяется выражением

$$(1-\rho) v_r^f \Big|_{r=r_1} = -f + \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} =$$

$$= -f + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n \sin(\lambda_n \varphi)}{\operatorname{ch}(\lambda_n x_0)} \left[ e^{-x_0} + \lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n x_0) \right] > 0.$$

Максимальное значение потока достигается при  $x_0 \rightarrow \infty$ , т.е. в канале с особенностью  $r_0 = 0$

$$\max \left\{ (1-\rho) v_r^f \Big|_{r=r_1} \right\} = -f + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n g_n \sin(\lambda_n \varphi),$$

соответствующая интегральная мощность потока через поверхность  $r = r_1$

$$\int_0^{\varphi_0} (1-\rho) v_r^f \Big|_{r=r_1} d\varphi = - \int_0^{\varphi_0} f d\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} g_n.$$

При  $r_0 = 0$  мощность стока, как и мощность работы внешних сил, линейно зависит от толщины щелевого канала  $r_1$ .

### 3.2. Общий случай проницаемости

Пусть коэффициент фильтрации  $k/\mu$  представляет собой произвольную гладкую монотонную функцию относительной плотности (и в силу (21), (22) пространственной переменной  $\varphi$ ). В этом случае для уравнения (23) неизвестны даже частные точные решения. Далее сведем (23) к уравнению анизотропной теплопроводности с частным случаем анизотропии, для которого такие решения известны [33].

Введем новые независимые переменные

$$x = \ln \frac{r_1}{r}, \quad \theta = \int_0^\varphi \frac{k}{\mu} d\varphi, \quad (28)$$

обозначим  $\theta_0 = \int_0^{\varphi_0} (k/\mu) d\varphi$ . Для преобразования (28) существует обратное  $\varphi(\theta) = \operatorname{Inv}[\theta(\varphi)]$ , соответственно,  $k/\mu$  и  $v_\varphi$  могут быть записаны как функции  $\theta$ . Тогда (23) примет вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{k}{\mu} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] = r_1 e^{-x} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}. \quad (29)$$

Заменяя в (29) зависимую переменную  $P = r_1 [W(x, \theta) + e^{-x} f'(\theta)]$ , где  $f(\theta)$  удовлетворяет линейному уравнению  $(k/\mu)^2 f'' + f = v_\phi$  с граничными условиями  $f(\theta_0) = -v_0$  и  $f'(0) = 0$ , имеем смешанную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{k}{\mu} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial \theta} \right] = 0,$$

$$W|_{x=0} = -f'(\theta), \quad W|_{\theta=0} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = e^{-x_0} f'(\theta), \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0.$$

## Заключение

В рамках жесткопластического анализа получено точное аналитическое решение задачи о стационарном течении полосы из некомпактного материала через сопряжение плоских каналов в зоне интенсивной пластической деформации. Определены компоненты тензора напряжений Коши, тензора скорости деформации и распределение относительной плотности материала. Получены

## Библиографический список

1. Соколовский В.В. Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками // ПММ. – 1950. – Т. 14. – Вып. 1. – С. 75–92.
2. Shield R.T. Plastic flow in a converging conical channel // J. Mech. & Phys. Solids. – 1955. – Vol. 3. – P. 246–258. DOI: 10.1016/0022-5096(55)90035-1
3. Danyluk H.T., Haddow J.B. Elastic-plastic flow through a converging conical channel // Acta Mechanica. – 1969. – Vol. 7. – P. 35–44. DOI: 10.1007/BF01204710
4. Alexandrov S., Barlat F. Modeling axisymmetric flow through a converging channel with an arbitrary yield condition // Acta Mechanica. – 1999. – Vol. 133. – P. 57–68. DOI: 10.1007/BF01179010
5. Cox A.D., Eason G., Hopkins H.G. Axially symmetric plastic deformations in soils // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1961. – Vol. 254. – P. 1–45. DOI: 10.1098/rsta.1961.0011
6. Oh H.-K., Lee J.-K. A study of the extrusion of sintered porous metal // J. Mech. Work. Tech. – 1985. – Vol. 11. – Iss. 1. – P. 53–69. DOI: 10.1016/0378-3804(85)90112-3
7. Monchiet V., Kondo D. Exact solution of a plastic hollow sphere with a Mises–Schleicher matrix // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – Vol. 51. – P. 168–178. DOI: 10.1016/j.jengsci.2011.10.007
8. Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker–Prager materials under isotropic loadings / P. Thore, F. Pastor, J. Pastor, D. Kondo // Comptes Rendus Mecanique. – 2009. – Vol. 337. – P. 260–267. DOI: 10.1016/j.crme.2009.06.030
9. Green R.J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci. – 1972. – Vol. 14. – P. 215–224. DOI: 10.1016/0020-7403(72)90063-X
10. Approximate criteria for ductile porous materials having a Green type matrix: Application to double porous media / W.Q. Shen,

аналитические результаты для несвязанной задачи фильтрации, когда дефекты сплошности материала заполнены флюидом, частичный сток которого осуществляется через проницаемую стенку канала. Среди полученных результатов – точное решение для случая постоянной проницаемости пористой среды.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00189 (mol\_a). Предложения по механизму отжима флюидонасыщенных поропластов сформулированы в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №075-00414-19-00.

## Acknowledgments

The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research according to the research project No. 18-31-00189 (mol\_a). Proposals on the mechanism of squeezing of fluid-saturated poro-plastic materials are formulated within the framework of the State Assignment of IMM FEB RAS No. 075-00414-19-00.

- J.F. Shao, L. Dormieux, D. Kondo // Comp. Mater. Sci. – 2012. – Vol. 62. – P. 189–194. DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.05.021
11. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Trans. ASME. J. Eng. Mater. & Tech. – 1977. – Vol. 99. – P. 2–15. DOI: 10.1115/1.3443401
12. Durban D., Mear M.E. Asymptotic solution for extrusion of sintered powder metals // Trans. ASME. – 1991. – Vol. 58. – Iss. 2. – P. 582–584. DOI: 10.1115/1.2897226
13. Alexandrov S., Chesnikova O., Pirumov A. An approximate solution for axisymmetric extrusion of porous material // J. Tech. Plast. – 2007. – Vol. 32. – No. 1–2. – P. 13–27.
14. Александров С.Е., Дряунов Б.А. Исследование процесса установившейся экструзии уплотняемого материала // ПМТФ. – 1990. – Т. 31, № 4. – С. 141–145.
15. Hill R. A general method of analysis for metal-working processes // J. Mech. & Phys. Solids. – 1963. – Vol. 11. – P. 305–326. DOI: 10.1016/0022-5096(63)90033-4
16. Revil-Baudard B., Cazacu O. Role of the plastic flow of the matrix on yielding and void evolution of porous solids: Comparison between the theoretical response of porous solids with Tresca and von Mises matrices // Mechanics Research Communications. – 2014. – Vol. 56. – P. 69–75. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2013.11.008
17. Segal V.M. Materials processing by simple shear // Mater. Sci. & Eng.: A. – 1995. – Vol. 197. – P. 157–164. DOI: 10.1016/0921-5093(95)09705-8
18. Segal V.M. Slip line solutions, deformation mode and loading history during equal channel angular extrusion // Mater. Sci. & Eng.: A. – 2003. – Vol. 345. – P. 36–46. DOI: 10.1016/S0921-5093(02)00258-7
19. Александров С.Е., Александрова Н.Н. О разрывных полях скоростей в упрочняющемся жесткопластическом материале // ПМТФ. – 2000. – Т. 41, № 1. – С. 198–203.

20. Altan B.S., Purcek G., Miskioglu I. An upper-bound analysis for equal-channel angular extrusion // *J. Mater. Proc. Tech.* – 2005. – Vol. 168. – P. 137–146. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2004.11.010

21. Analysis of the billet deformation behaviour in equal channel angular extrusion / J.R. Bowen, A. Gholinia, S.M. Roberts, P.B. Prangnell // *Mater. Sci. & Eng.: A.* – 2000. – Vol. 287. – P. 87–99. DOI: 10.1016/S0921-5093(00)00834-0

22. Semiatin S.L., DeLo D.P., Shell E.B. The effect of material properties and tooling design on deformation and fracture during equal channel angular extrusion // *Acta Materialia.* – 2000. – Vol. 48. – Iss. 8. – P. 1841–1851. DOI: 10.1016/S1359-6454(00)00019-7

23. Finite element analysis of the plastic deformation zone and working load in equal channel angular extrusion / S. Li, M.A.M. Bourke, I.J. Beyerlein, D.J. Alexander, B. Clausen // *Mater. Sci. & Eng.: A.* – 2004. – Vol. 382. – P. 217–236. DOI: 10.1016/j.msea.2004.04.067

24. Русин Н.М. Исследование особенностей пластического течения на макроскопическом уровне в порошковых телах при равноканальном угловом прессовании // *Перспективные материалы.* – 2007. – № 4. – С. 83–91.

25. Kaushik A., Karaman I., Srinivasa A.R. Simulation of powder compaction using equal channel angular extrusion at room temperature: comparison of two constitutive theories // *Int. J. Struct. Changes in Solids – Mech. & Appl.* – 2009. – Vol. 1. – No. 1. – P. 211–226.

26. Steady plastic flow of a polymer during equal channel angular extrusion process: experiments and numerical modeling / F. Zairi, B. Aour, J.M. Gloaguen, M. Nait-Abdelaziz,

J.M. Lefebvre // *Polymer Eng. & Sci.* – 2008. – Vol. 48. – Iss. 5. – P. 1015–1021. DOI 10.1002/pen.21042

27. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // *Geodinamica Acta.* – 1998. – Vol. 11. – No. 2–3. – P. 55–84. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5

28. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // *J. Siberian Federal University. Math. & Phys.* – 2015. – Vol. 8. – No. 4. – P. 467–477. DOI: 10.17516/1997-1397-2015-8-4-467-477

29. Анферов С.Д., Скульский О.И., Славнов Е.В. Математическое моделирование процесса прямого отжима масляной культуры // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2014. – № 1. – С. 31–56.

30. Showalter R.E., Stefanelli U. Diffusion in poro-plastic media // *Math. Methods in the Appl. Sci.* – 2004. – Vol. 27. – P. 2131–2151. DOI: 10.1002/mma.541

31. Plastic deformation in cake consolidation / J. Zhao, C.-H. Wang, D.-J. Lee, C. Tien // *J. Colloid & Interface Sci.* – 2003. – Vol. 261. – P. 133–145. DOI: 10.1016/S0021-9797(02)00214-X

32. Буренин А.А., Обухова Е.В. Перенос несжимаемой жидкости примеси при учете ее диффузии в основной поток // *Дальневосточный математический журнал.* – 2003. – Т. 4, № 1. – С. 101–107.

33. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. Second edition. – CRC Press, Boca Raton – London, 2016.

## References

1. Sokolovskiy V.V. Ploskoe i osesimmetrichnoe ravnovesie plasticheskoi massy mezhdzhu zhestkimi stenkami [Planar and axisymmetric equilibrium of the plastic mass between rigid walls]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1950, vol. 14, iss. 1, pp. 75-92.

2. Shield R.T. Plastic flow in a converging conical channel, *J. Mech. & Phys. Solids*, 1955, vol. 3, pp. 246-258. DOI: 10.1016/0022-5096(55)90035-1

3. Danyluk H.T., Haddow J.B. Elastic-plastic flow through a converging conical channel, *Acta Mechanica*, 1969, vol. 7, pp. 35-44. DOI: 10.1007/BF01204710

4. Alexandrov S., Barlat F. Modeling axisymmetric flow through a converging channel with an arbitrary yield condition, *Acta Mechanica*, 1999, vol. 133, pp. 57-68. DOI: 10.1007/BF01179010

5. Cox A.D., Eason G., Hopkins H.G. Axially symmetric plastic deformations in soils, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1961, vol. 254, pp. 1-45. DOI: 10.1098/rsta.1961.0011

6. Oh H.-K., Lee J.-K. A study of the extrusion of sintered porous metal, *J. Mech. Work. Tech.*, 1985, vol. 11, issue 1, pp. 53-69. DOI: 10.1016/0378-3804(85)90112-3

7. Monchiet V., Kondo D. Exact solution of a plastic hollow sphere with a Mises – Schleicher matrix, *Int. J. Eng. Sci.*, 2012, vol. 51, pp. 168-178. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2011.10.007

8. Thore P., Pastor F., Pastor J., Kondo D. Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker – Prager materials under isotropic loadings, *Comptes Rendus Mecanique*, 2009, vol. 337, pp. 260-267. DOI: 10.1016/j.crme.2009.06.030

9. Green R.J. A plasticity theory for porous solids, *Int. J. Mech. Sci.*, 1972, vol. 14, pp. 215-224. DOI: 10.1016/0020-7403(72)90063-X

10. Shen W.Q., Shao J.F., Dormieux L., Kondo D. Approximate criteria for ductile porous materials having a Green type matrix:

Application to double porous media, *Comp. Mater. Sci.*, 2012, vol. 62, pp. 189-194. DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.05.021

11. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Trans. ASME. J. Eng. Mater. & Tech.*, 1977, vol. 99, pp. 2-15. DOI: 10.1115/1.3443401

12. Durban D., Mear M.E. Asymptotic solution for extrusion of sintered powder metals, *Trans. ASME*, 1991, vol. 58, issue 2, pp. 582-584. DOI: 10.1115/1.2897226

13. Alexandrov S., Chesnikova O., Pirumov A. An approximate solution for axisymmetric extrusion of porous material, *J. Tech. Plast.*, 2007, vol. 32, no. 1-2, pp. 13-27.

14. Alexandrov S.E., Druyanov B.A. Investigating the process of the steady extrusion of a compacted material, *J. Appl. Mech. & Tech. Phys.*, 1990, vol. 31, no. 4, pp. 645-649. DOI: 10.1007/BF00851344

15. Hill R. A general method of analysis for metal-working processes, *J. Mech. & Phys. Solids*, 1963, vol. 11, pp. 305-326. DOI: 10.1016/0022-5096(63)90033-4

16. Revil-Baudard B., Cazacu O. Role of the plastic flow of the matrix on yielding and void evolution of porous solids: Comparison between the theoretical response of porous solids with Tresca and von Mises matrices, *Mechanics Research Communications*, 2014, vol. 56, pp. 69-75. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2013.11.008

17. Segal V.M. Materials processing by simple shear, *Mater. Sci. & Eng.: A*, 1995, vol. 197, pp. 157-164. DOI: 10.1016/0921-5093(95)09705-8

18. Segal V.M. Slip line solutions, deformation mode and loading history during equal channel angular extrusion, *Mater. Sci. & Eng.: A*, 2003, vol. 345, pp. 36-46. DOI: 10.1016/s0921-5093(02)00258-7

19. Aleksandrov S.E., Aleksandrova N.N. Discontinuous velocity fields in a hardening rigid-plastic material, *J. Appl.*



*Mech. & Tech. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 1, pp. 182-187. DOI: 10.1007/BF02465254

20. Altan B.S., Purcek G., Miskioglu I. An upper-bound analysis for equal-channel angular extrusion, *J. Mater. Proc. Tech.*, 2005, vol. 168, pp. 137-146. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2004.11.010

21. Bowen J.R., Gholinia A., Roberts S.M., Prangnell P.B. Analysis of the billet deformation behaviour in equal channel angular extrusion, *Mater. Sci. & Eng.: A*, 2000, vol. 287, pp. 87-99. DOI: 10.1016/S0921-5093(00)00834-0

22. Semiatin S.L., DeLo D.P., Shell E.B. The effect of material properties and tooling design on deformation and fracture during equal channel angular extrusion, *Acta Materialia*, 2000, vol. 48, issue 8, pp. 1841-1851. DOI: 10.1016/S1359-6454(00)00019-7

23. Li S., Bourke M.A.M., Beyerlein I.J., Alexander D.J., Clausen B. Finite element analysis of the plastic deformation zone and working load in equal channel angular extrusion, *Mater. Sci. & Eng.: A*, 2004, vol. 382, pp. 217-236. DOI: 10.1016/j.msea.2004.04.067

24. Rusin N.M. Issledovanie osobennostei plasticheskogo techeniia na makroskopicheskom urovne v poroshkovykh telakh pri ravno-kanal'nom uglovom pressovanii [Investigation of the features of plastic flow at the macroscopic level in powder bodies upon equal-channel angular pressing], *Perspektivnye materialy – Inorganic Materials: Applied Research*, 2007, no. 4, pp. 83-91.

25. Kaushik A., Karaman I., Srinivasa A.R. Simulation of powder compaction using equal channel angular extrusion at room temperature: comparison of two constitutive theories, *Int. J. Struct. Changes in Solids – Mech. & Appl.*, 2009, vol. 1, no. 1, pp. 211-226.

26. Zairi F., Aour B., Gloaguen J.M., Nait-Abdelaziz M., Lefebvre J.M. Steady plastic flow of a polymer during equal channel angular extrusion process: experiments and numerical modeling, *Polymer Eng. & Sci.*, 2008, vol. 48, issue 5, pp. 1015-1021. DOI 10.1002/pen.21042

27. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock, *Geodinamica Acta*, 1998, vol. 11, no. 2-3, pp. 55-84. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5

28. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium, *J. Siberian Federal University. Math. & Phys.*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 467-477. DOI: 10.17516/1997-1397-2015-8-4-467-477

29. Anferov S.D., Skul'skii O.I., Slavnov E.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessa priamogo otzhima maslichnoi kul'tury [Mathematical modeling of the process of direct extraction of oilseeds], *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 1, pp. 31-56.

30. Showalter R.E., Stefanelli U. Diffusion in poro-plastic media, *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 2004, vol. 27, pp. 2131-2151. DOI: 10.1002/mma.541

31. Zhao J., Wang C.-H., Lee D.-J., Tien C. Plastic deformation in cake consolidation, *J. Colloid & Interface Sci.*, 2003, vol. 261, pp. 133-145. DOI: 10.1016/S0021-9797(02)00214-X

32. Burenin A.A., Obukhova E.V. Perenos neszhimaemoi zhidkosti primesi pri uchete ee diffuzii v osnovnoi potok [Transfer of incompressible impurity fluid, taking into account its diffusion into the main flow], *Dalnevostochnyi matematicheskii zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*, 2003, vol. 4, no. 1, pp. 101-107.

33. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. Second edition. – CRC Press, Boca Raton – London, 2016.