

Ташкинов М.А. Методика расчета упругих эффективных свойств двухфазных полидисперсных сред с использованием многоточечных статистических дескрипторов и метода интегральных уравнений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 203-214. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.17

Tashkinov M.A. Method of calculation of elastic effective properties of two-phase polydisperse media using multipoint statistical descriptors and the integral equations technique. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 203-214. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.17



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.17

УДК 539.3

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА УПРУГИХ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ДВУХФАЗНЫХ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОТОЧЕЧНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДЕСКРИПТОРОВ И МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.А. Ташкинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 22 апреля 2019 г.  
Принята: 20 июня 2019 г.  
Опубликована: 28 июня 2019 г.

#### Ключевые слова:

эффективные характеристики, стохастическая структура, представительный объем, стохастическая краевая задача, микроструктурные параметры, численные решения, интегродифференциальное уравнение, упругость, моментные функции.

### АННОТАЦИЯ

Целью данного исследования является разработка новых аналитических подходов для определения эффективных свойств упругих структурно-неоднородных сред на основе многоточечных приближений решений стохастических краевых задач. Предсказание макроскопических свойств неоднородных материалов сопряжено с необходимостью достоверного описания их микроструктурного поведения, включая взаимодействия между отдельными компонентами. К настоящему времени разработан ряд аналитических и численных подходов для оценки эффективных свойств структурно-неоднородных сред, однако ни один из них не дает возможности вычислять эффективные свойства таких сред с абсолютной точностью. Одно из основных ограничений состоит в необходимости в полной мере учитывать особенности микроструктуры среды, такие как ориентация, размер, форма и распределение включений, а также особенности влияния матрицы на включения. В данной работе для расчета эффективных характеристик используются многоточечные приближения решений краевых задач, в которых необходимым является использование моментных функций высших порядков, что в более полной мере позволяет учитывать многочастичное взаимодействие микроструктурных элементов.

Получены аналитические выражения для расчета эффективных свойств структурно-неоднородных сред с использованием многоточечных приближения высших порядков решений стохастических краевых задач в упругой постановке. Выполнено численное сравнение результатов расчета относительных эффективных характеристик пористых неоднородных полидисперсных сред со сферическими включениями различной объемной доли. Для численного решения интегродифференциальных уравнений применяется глобальная адаптивная стратегия в совокупности с многомерным правилом интегрирования и правилом преобразования переменных ИМТ для обращения с сингулярностью функции Грина. Сделаны некоторые заключения об эффективности и ограничениях предложенного подхода.

© ПНИПУ

© Ташкинов Михаил Анатольевич – к.ф.-м.н., доц., e-mail: [m.tashkinov@pstu.ru](mailto:m.tashkinov@pstu.ru), [iD: 0000-0003-4660-0020](https://orcid.org/0000-0003-4660-0020)

Mikhail A. Tashkinov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: [m.tashkinov@pstu.ru](mailto:m.tashkinov@pstu.ru), [iD: 0000-0003-4660-0020](https://orcid.org/0000-0003-4660-0020)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# METHOD OF CALCULATION OF ELASTIC EFFECTIVE PROPERTIES OF TWO-PHASE POLYDISPERSE MEDIA USING MULTIPOINT STATISTICAL DESCRIPTORS AND THE INTEGRAL EQUATIONS TECHNIQUE

M.A. Tashkinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 22 April 2019  
Accepted: 20 June 2019  
Published: 28 June 2019

### Keywords:

effective characteristics, stochastic structure, representative volume element, stochastic boundary value problem, microstructural parameters, numerical solutions, integral-differential equation, elasticity, correlation functions.

## ABSTRACT

The aim of this study is to develop a new analytical approach to calculation of effective properties of elastic heterogeneous media based on multipoint approximations of solutions of stochastic boundary value problems. Prediction of macroscopic properties of heterogeneous media is associated with the need for a reliable description of their microstructural behavior, including the interaction between individual components. A number of analytical and numerical approaches have been developed to evaluate the effective properties of structurally inhomogeneous media. However none of them makes it possible to calculate the effective properties of such media with an absolute accuracy. One of the main limitations is imposed by taking into account the features of the microstructure of the medium, such as orientation, size, shape and distribution of inclusions, as well as the features of influence of the matrix on inclusions. In this paper, multipoint approximations of solutions of boundary value problems are used to calculate the effective characteristics, in which it is necessary to employ higher-order correlation functions, which allows to take into account the multiparticle interaction of microstructural elements with a higher extent.

Analytical expressions for the calculation of the effective properties of structurally inhomogeneous media using multipoint higher-order approximations of solutions of stochastic boundary value problems in elastic formulations are obtained. A numerical comparison of the calculation results of relative effective characteristics of porous inhomogeneous polydisperse media with spherical inclusions of different volume fractions is performed. For the numerical solution of the integral-differential equations, a global adaptive strategy is applied in conjunction with the multi-dimensional integration rule and the IMT variable transformation rule to handle the singularity of the Green's function. Some conclusions are made on the effectiveness and limitations of the proposed approach.

© PNRPU

## Введение

Многие современные материалы, используемые в высокотехнологичных приложениях, обладают неоднородной микроструктурой. Неоднородность структуры материала может быть определена целью его применения либо являться результатом возникновения нежелательных дефектов, обусловленных технологическими особенностями процесса производства. Установлено, что влияние на эффективные характеристики материала оказывает не только объемная доля содержащихся в нем компонентов, но и морфологическое строение микроструктуры. В связи с этим актуальной проблемой механики неоднородных сред является установление взаимосвязи между конфигурацией микроструктуры и механическими и физическими свойствами, реализованными в материале. В частности, необходимо развитие методов математического моделирования, способных оценить поведение неоднородных материалов на различных масштабных уровнях. Предсказание макроскопических свойств композиционных материалов сопряжено с необходимостью достоверного описания их микроструктурного поведения, включая взаимодействия между отдельными компонентами. В целом для создания эффективной методики с целью определения макроскопических свойств структурно-неоднородных сред необходимы:

– геометрическая модель микроструктуры, для которой можно в явном виде произвести численный расчет с учетом ее геометрии и свойств компонент;

– механическая модель, с достаточной точностью описывающая взаимодействие распределенных компонент и окружающей их матрицы.

К настоящему времени разработан ряд аналитических и численных подходов для оценки эффективных свойств структурно-неоднородных сред. Одним из основополагающих исследований в области определения эффективных свойств неоднородных сред является решение для единственного эллипсоидального включения, полученное в работах Эшелби [1]. Границы эффективных свойств упругих неоднородных сред на основе вариационных принципов были получены в работах Фойгта и Рейсса, Хашина и Штрикмана [2], Берана [3]. Многие подходы базируются на методах среднего поля, впервые появившихся в середине 20-го века. Эти методы предлагают ряд алгоритмов для определения упругих констант, например метод Мори-Танака [4], метод двойного включения [5], а также другие [6–8].

Методы гомогенизации для нелинейных композиций берут начало в работах Тейлора и Хилла [9], в которых рассматривалась проблема определения макроскопического поведения пластически деформируемых поликристаллов. Самосогласованные модели применительно к упругопластическим композитам были пред-

ложены Е. Кренером [10], Б. Будянски [11] и Р. Хиллом [9], в которых предполагалось постоянство пластических деформаций. Позднее Дж.Р. Уиллисом [12] было получено нелинейное обобщение границ Хашина–Штрикмана.

П. Понте-Кастанедой [13, 14] были предложены новые вариационные подходы, позволяющие улучшить оценки границ и получить более общие решения для нелинейных сред. Некоторые авторы предлагали модификации схем Мори-Танака для учета произвольно ориентированных эллипсоидальных включений [15], а также для волокон с заданной функцией распределения ориентации [16], в том числе их реализацию для упругопластического случая [17].

С развитием вычислительных возможностей появились работы, позволяющие производить расчет эффективных модулей для представительного объема путем прямого решения методом конечных элементов [18–20]. Несмотря на достигнутые успехи, прямой конечно-элементный расчет представительных объемов для определения эффективных свойств сильно зависит от качества и густоты сетки и достаточно затратен в плане вычислительных ресурсов при исследовании структур со случайной ориентацией и сложной геометрией включений.

В отдельную задачу входит определение минимально допустимого размера представительного объема [21–25]. В работах Севостьянова и Качанова [26–28], а также Бема [29–32] и других [33–35] установлено влияние формы неоднородностей на макроскопические свойства.

Другая группа аналитических моделей для определения макроскопического отклика неоднородных материалов базируется на использовании многоточечных статистических дескрипторов. Трехточечные оценки термоупругих свойств двухфазных материалов на основе набора многоточечных корреляций были получены в работах С. Торкватто [36,37], при этом удалось получить границы, находящиеся внутри границ Хашина–Штрикмана. В отечественных работах в данном направлении широко распространен подход, получивший развитие в работах Т.Д. Шермергора и С.Д. Волкова [38, 39] и позволяющий определять макроскопические модули, а также структурные поля деформаций и напряжений в композитах стохастической структуры. Так, для исследования структурных полей деформирования и расчета эффективных характеристик микронеоднородных сред решаются стохастические краевые задачи, уравнения и граничные условия которых содержат случайные величины. Исходное стохастическое уравнение с помощью функций Грина преобразуется в интегродифференциальное, которое решается приближенно методом итераций. Результаты приближенного решения зависят в первую очередь от вида координатной зависимости статистических дескрипторов структурных модулей упругости. При этом используются различные предположения:

– сингулярное приближение, которое заключается в том, что в интегральных уравнениях равновесия, ядрами которых являются вторые производные тензора Грина для изотропной неограниченной среды, удерживаются только сингулярные составляющие этих производных [38]. С помощью обобщенного сингулярного приближения, изменяя параметры, как частный случай можно получать различные приближенные решения для эффективных упругих констант (границы Фойгта, Рейса, а также Хашина–Штрикмана);

– гипотеза сильной изотропии в том смысле, что макроскопические характеристики композита не зависят от многоточечных моментных функций структурных модулей упругости [40–42];

– предельная локальность моментных функций структурных модулей упругости: ограничиваются учетом дисперсий моментных функций [43];

– корреляционное приближение основано на пренебрежении моментами выше второго порядка. В общем случае корреляционная теория может быть применена при малых флуктуациях структурных модулей упругости, т.е. когда среднеквадратичные отклонения структурных модулей упругости являются малыми по отношению к их математическим ожиданиям [39, 43];

– одноточечное приближение является уточнением корреляционного приближения за счет использования одноточечных моментов всех порядков. С помощью одноточечного приближения нельзя описывать анизотропию свойств композиционных материалов, связанную с ориентацией включений, например, матрицы с ориентированными эллипсоидальными включениями.

Таким образом, в большинстве работ инструментарий описания стохастических структур ограничивается, как правило, статистическими дескрипторами второго порядка, которые во многих случаях принимаются равными постоянным значениям.

В данной работе для расчета эффективных характеристик предлагается использование многоточечных приближений решений краевых задач, в которых необходимым является учет в явном виде моментных функций высших порядков, что позволит в более полной мере учитывать многочастичное взаимодействие микроструктурных элементов. Использование высших приближений решений даст возможность уточнить границы, полученные с использованием описанных выше допущений.

## 1. Аналитические выражения для эффективных констант

Будем считать, что микроструктурные компоненты двухфазной среды являются изотропными, т.е.

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^I &= \lambda_I \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_I (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ C_{ijkl}^M &= \lambda_M \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_M (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned} \quad (1)$$

где нижний индекс  $I$  обозначает включения;  $M$  – матрицу;  $C_{ijkl}^{I,M}$  – тензоры структурных модулей упругости;  $\delta_{ij}$  – дельта Дирака;  $\lambda_I, \lambda_M, \mu_I, \mu_M$  – постоянные Ламе и модули сдвига включений и матрицы соответственно, выражаемые через модуль упругости и коэффициент Пуассона как

$$\lambda_I = \frac{E_I \nu_I}{(1 + \nu_I)(1 - 2\nu_I)}, \quad \mu_I = \frac{E_I}{2(1 + \nu_I)}, \quad (2)$$

где  $E_I$  – модуль упругости включения;  $\nu_I$  – коэффициент Пуассона. Аналогично для  $\lambda_M$  и  $\mu_M$ .

Макроскопические деформации  $\varepsilon_{ij}^*$  и напряжения  $\sigma_{ij}^*$  определяются путем осреднения по элементарному макрообъему  $V$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\vec{r}) dV, \\ \sigma_{ij}^* &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) dV. \end{aligned} \quad (3)$$

Поля микроструктурных напряжений  $\sigma_{ij}(\vec{r})$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}(\vec{r})$  являются случайными, зависят от пространственного радиуса-вектора  $\vec{r}$  и представляют собой кусочно-постоянные функции координат. При моделировании неоднородных структур со случайным разбросом включений, как правило, принимается гипотеза эргодичности, согласно которой осреднение по объему совпадает со статистическим осреднением:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^* &= \langle \varepsilon_{ij}(\vec{r}) \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_I p + \langle \varepsilon_{ij} \rangle_M (1 - p), \\ \sigma_{ij}^* &= \langle \sigma_{ij}(\vec{r}) \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle_I p + \langle \sigma_{ij} \rangle_M (1 - p). \end{aligned} \quad (4)$$

В общем случае, когда  $\sigma_{ij}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle_I p + \langle \sigma_{ij} \rangle_M (1 - p)$ , а  $p$  – объемная доля включений, эффективные константы упругой неоднородной среды могут быть получены из решения системы линейных уравнений

$$\sigma_{ij}^* = \langle \sigma_{ij}(\vec{r}) \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle_I p + \langle \sigma_{ij} \rangle_M (1 - p) = C_{ijkl}^* e_{kl}, \quad (5)$$

где  $C_{ijkl}^*$  – тензор эффективных модулей упругости, компоненты которого находятся по формуле  $C_{ijkl}^* = \lambda^* \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^* (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ ;  $e_{ij}$  – компоненты постоянного заданного симметричного тензора малых макродеформаций, определяющего нагрузку представительного объема.

В случае пористых материалов последнее уравнение сводится к следующей зависимости:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_M (1 - p) = C_{ijkl}^* e_{kl}. \quad (6)$$

При вычислении структурных деформаций и напряжений используют явные представления поля

$C_{ijkl}(\vec{r})$  через постоянные тензоры модулей упругости элементов структуры (1) и случайную индикаторную функцию  $\lambda(\vec{r})$ , которая принимает значения 0 или 1 в зависимости от положения радиуса-вектора внутри представительного объема:

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) C_{ijkl}^I + (1 - \lambda(\vec{r})) C_{ijkl}^M, \quad (7)$$

где  $C_{ijkl}^I$  и  $C_{ijkl}^M$  – тензоры модулей упругости включений и матрицы соответственно.

Выражения для средних значений напряжений и деформаций в матрице могут быть получены на основе формул для условного математического ожидания, представленных в [39]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_M = \langle \sigma_{ij} \rangle - \frac{1}{1 - p} \langle \lambda'(\vec{r}) \sigma_{ij}'(\vec{r}) \rangle, \quad (8)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_I = \langle \sigma_{ij} \rangle + \frac{1}{p} \langle \lambda'(\vec{r}) \sigma_{ij}'(\vec{r}) \rangle, \quad (9)$$

где  $\lambda'(\vec{r})$ ,  $\sigma_{ij}'(\vec{r})$ ,  $\varepsilon_{kl}'(\vec{r})$  и  $u_k'(\vec{r})$  являются флуктуациями полей случайной индикаторной функции, напряжений, деформаций и перемещений соответственно. В общем случае флуктуации случайной величины  $\zeta$  в точке  $\vec{r}$  определяются как  $\zeta'(\vec{r}) = \zeta(\vec{r}) - \langle \zeta(\vec{r}) \rangle$ , где  $\langle \rangle$  – оператор статистического осреднения. Выражение для статистического момента второго порядка  $\langle \lambda'(\vec{r}) \sigma_{ij}'(\vec{r}) \rangle$ , содержащего флуктуации индикаторной функции и поля напряжений, выражается следующим образом [44–46]:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'(\vec{r}) \sigma_{ij}'(\vec{r}) \rangle &= e_{kl} \bar{C}_{ijkl} D_\lambda^{(2)} - \bar{C}_{ijkl} (1 - 2p) \times \\ &\times \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon_{kl}'(\vec{r}) \rangle + \langle C_{ijkl} \rangle \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon_{kl}'(\vec{r}) \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\bar{C}_{mnlk} = C_{mnlk}^I - C_{mnlk}^M$  – разность тензоров структурных модулей упругости включений и матрицы;  $D_\lambda^{(2)} = \langle \lambda'(\vec{r}) \lambda'(\vec{r}) \rangle = p(1 - p)$  – центральный момент второго порядка (дисперсия) случайного поля индикаторной функции, выражаемый через объемную долю включений.

Тогда, с учетом соотношения (5), общее выражение для компонент тензора эффективных модулей упругости принимает следующий вид:

$$C_{ijkl}^* = p C_{ijkl}^I + (1 - p) C_{ijkl}^M + (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) \frac{\langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon_{kl}'(\vec{r}) \rangle}{e_{kl}}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{kl}'(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left( u_{k,l}^{(x)}(\vec{r}) + u_{l,k}^{(x)}(\vec{r}) \right). \quad (12)$$

Считая макрооднородный представительный объем неоднородной среды изотропным, достаточно опреде-

лить только две его упругие константы. Так, учитывая, что для изотропного тензора эффективных модулей упругости  $\mu^* = C_{1212}^*$ , значение эффективной константы можно получить из решения задачи о чистом сдвиге.

$$\mu^* = C_{1212}^* = pC_{1212}^I + (1-p)C_{1212}^M + \frac{(C_{1212}^I - C_{1212}^M) \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{12}(\vec{r}) \rangle}{e_{12}}. \quad (13)$$

Значение второй эффективной константы находится из решения задачи о всестороннем растяжении:

$$\lambda^* = C_{1111}^* - 2\mu^*, \quad (14)$$

$$C_{1111}^* = pC_{1111}^I + (1-p)C_{1111}^M + \frac{(C_{1111}^I - C_{1111}^M) \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{11}(\vec{r}) \rangle}{e_{11}}. \quad (15)$$

Таким образом, эффективные модули согласно предложенному методу определяются как сумма их средних значений и уточняющей добавки, связанной с упругими многочастичными взаимодействиями между неоднородностями. Для вывода аналитических выражений для смешанного статистического момента второго порядка  $\langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle$ , определяющего величину данной добавки, в данной работе предлагается использовать приближенные решения стохастической краевой задачи относительно перемещений, представленные в виде интегродифференциального уравнения и полученные на основе метода функций Грина.

## 2. Приближенные решения для эффективных констант на основе многоточечных статистик

Как показано в работах [44–48], стохастическая краевая задача теории упругости для структурно-неоднородных сред с помощью функции Грина сводится к интегродифференциальному уравнению относительно флуктуаций перемещений:

$$u_{i,j}^{(\chi)}(\vec{r}) = \int_{V_1} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) \times \left( C_{mkl}^I(\vec{r}_1) e_{kl} + C_{mkl}^M(\vec{r}_1) u_{k,l}^{(\chi-1)}(\vec{r}_1) \right)_{,1[n]} dV_1, \quad (16)$$

где  $G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)$  – функция Грина;  $C_{mkl}^I(\vec{r}_1)$  – флуктуация поля структурных модулей упругости;  $r_k$  – обозначение  $k$ -й компоненты радиуса-вектора  $\vec{r}$ ;  $j$  – обозначение производной  $\frac{\partial}{\partial r_j}$ ;  $\chi$  – приближение, в котором решается задача.

Форма данного уравнения предполагает его итерационное решение. В первой и второй итерации решения уравнения (16) принимают следующую форму:

$$u_{i,j}^{(1)}(\vec{r}) = e_{kl} \bar{C}_{mkl} \int_{V_1} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) \left( \lambda'(\vec{r}_1) \right)_{,1[n]} dV_1, \quad (17)$$

$$u_{i,j}^{(1+2)}(\vec{r}) = e_{kl} \bar{C}_{mkl} \int_{V_1} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) \left( \lambda'(\vec{r}_1) \right)_{,1[n]} dV_1 + e_{oq} \bar{C}_{mkl} \bar{C}_{fsoq} \int_{V_1} \int_{V_2} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) \times \left[ \lambda'(\vec{r}_1) G_{kf,l}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \left( \lambda'(\vec{r}_2) \right)_{,2[s]} \right]_{,1[n]} dV_2 dV_1, \quad (18)$$

где  $\lambda'(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) - \langle \lambda(\vec{r}) \rangle$  – флуктуация случайной индикаторной функции в точке;  $u_{k,l}^{(i)}(\vec{r})$  – поле флуктуаций перемещений в представительном объеме, которое является решением краевой задачи теории упругости в стохастической постановке. Выражения для момента  $\langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle$  с использованием решений (17) и (18) выражаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle^{(1)} = \\ & = \frac{1}{2} e_{kl} \bar{C}_{mkl} \int_{V_1} \left( G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1) \right) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{1[n]}} dV_1, \quad (19) \\ & \langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{ij}(\vec{r}) \rangle^{(1+2)} = \\ & = \frac{1}{2} \left( e_{kl} \bar{C}_{mkl} \int_{V_1} \left( G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1) \right) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{1[n]}} dV_1 + \right. \\ & \quad \left. + e_{oq} \bar{C}_{fsoq} \bar{C}_{mkl} \int_{V_1} \int_{V_2} \left( G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{jm,i}(\vec{r}, \vec{r}_1) \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times G_{kf,l}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \frac{\partial^2 K_{\lambda}^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial r_{1[n]} \partial r_{2[s]}} dV_2 dV_1 \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в скобках в выражении (20) является добавкой, вносимой вторым приближением (18) к решению в первом приближении (17).

Перемножение флуктуаций индикаторной функции приводит к появлению в выражениях в явном виде корреляционных и моментных функций, которые используются для оценки пространственного взаимодействия между микромасштабными структурными компонентами [49]. Моментная функция  $n$ -го порядка может быть определена как среднее скалярного произведения  $n$  случайных величин в различных положениях радиусов-векторов  $\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ . Для флуктуации случайной индикаторной функции выражение для моментной функции в целом можно записать в виде

$$\begin{aligned} K_{\lambda_c}^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) & = \langle \lambda'(\vec{r}_1) \lambda'(\vec{r}_2) \dots \lambda'(\vec{r}_n) \rangle = \\ & = \langle (\lambda(\vec{r}_1) - p)(\lambda(\vec{r}_2) - p) \dots (\lambda(\vec{r}_n) - p) \rangle. \quad (21) \end{aligned}$$

Моментные функции чувствительны к таким параметрам, как распределение, ориентация и форма микроструктурных составляющих. Теоретически микроструктурная морфология композитов может быть однозначно определена бесконечным числом моментных функций. Эти функции в том числе используются в качестве гео-

метрических характеристик в задачах получения статистик высоких порядков для микроструктурных полей напряжений и деформаций [45].

Возвращаясь к расчету эффективных констант, в явном виде значение смешанного момента  $\langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{12}(\vec{r}) \rangle$  в выражении для эффективной константы  $\mu^*$  (13) с использованием первого приближения (19) и с учетом свойств симметрии входящих в него тензоров записываем как

$$\begin{aligned} & \langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{12}(\vec{r}) \rangle^{(1)} = \\ & = 2 \times \frac{1}{2} e_{12} \left( \bar{C}_{1212} \int_{V_1} (G_{11,2}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{21,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[12]}} dV_1 + \right. \\ & \left. + \bar{C}_{2112} \int_{V_1} (G_{12,2}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{22,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[11]}} dV_1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

После преобразования получаем

$$\begin{aligned} & \langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{12}(\vec{r}) \rangle^{(1)} = \\ & = 2e_{12} \bar{C}_{1212} \int_{V_1} (G_{11,2}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{21,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[12]}} dV_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Добавка, вносимая вторым приближением в (20), выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{12}(\vec{r}) \rangle^{(2)} = \\ & = 4e_{12} \bar{C}_{1212} \bar{C}_{1212} \int_{V_1} \int_{V_2} (G_{11,2}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{21,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \times \\ & \times G_{11,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \frac{\partial^2 K_{\lambda}^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial r_{[12]} \partial r_{[21]}} dV_2 dV_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, эффективная константа  $\mu^*$  может быть определена как сумма среднего по представительному объему значения компоненты тензора  $\langle C_{1212}(\vec{r}) \rangle$ , а также двух слагаемых, которые являются уточнениями, вносимыми первым и вторым приближением решения уравнения (16) соответственно:

$$\begin{aligned} \mu^* & = C_{1212}^* = pC_{1212}^I + (1-p)C_{1212}^M + \\ & + 2(C_{1212}^I - C_{1212}^M)^2 \int_{V_1} (G_{11,2}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{21,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[12]}} dV_1 + \\ & + 4(C_{1212}^I - C_{1212}^M)^3 \int_{V_1} \int_{V_2} (G_{11,2}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{21,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \times \\ & \times G_{11,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \frac{\partial^2 K_{\lambda}^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial r_{[12]} \partial r_{[21]}} dV_2 dV_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Для определения эффективной константы  $\lambda^*$  запишем в явном виде момент  $\langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{11}(\vec{r}) \rangle$ :

$$\langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{11}(\vec{r}) \rangle^{(1)} = \frac{1}{2} e_{11} \bar{C}_{1111} \int_{V_1} (G_{11,1}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{11,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[11]}} dV_1 + \frac{1}{2} e_{11} \bar{C}_{2211} \times \\ & \times \int_{V_1} (G_{12,1}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{12,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[12]}} dV_1 + \\ & + \frac{1}{2} e_{11} \bar{C}_{3311} \int_{V_1} (G_{13,1}(\vec{r}, \vec{r}_1) + G_{13,1}(\vec{r}, \vec{r}_1)) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[13]}} dV_1. \end{aligned} \quad (26)$$

После упрощений данное выражение приводится к виду

$$\begin{aligned} & \langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{11}(\vec{r}) \rangle^{(1)} = \\ & = e_{11} \sum_{m=n=1}^3 \bar{C}_{mnn1} \int_{V_1} G_{1m,1}(\vec{r}, \vec{r}_1) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[1n]}} dV_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогичным образом находится добавка, соответствующая второму приближению решения:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda'(\vec{r})\varepsilon'_{11}(\vec{r}) \rangle^{(2)} = \\ & = e_{11} \sum_{f=s=1}^3 \sum_{m=n=1}^3 \bar{C}_{fss1} \bar{C}_{mnn1} \int_{V_1} \int_{V_2} G_{1m,1}(\vec{r}, \vec{r}_1) \times \\ & \times G_{1f,1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \frac{\partial^2 K_{\lambda}^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial r_{[1n]} \partial r_{[2s]}} dV_2 dV_1. \end{aligned} \quad (28)$$

В окончательном виде формула для эффективной константы  $\lambda^*$  принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda^* & = -2\mu^* + pC_{1111}^I + (1-p)C_{1111}^M + \\ & + (C_{1111}^I - C_{1111}^M) \sum_{m=n=1}^3 (C_{mnn1}^I - C_{mnn1}^M) \times \\ & \times \int_{V_1} G_{1m,1}(\vec{r}, \vec{r}_1) \frac{\partial K_{\lambda}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial r_{[1n]}} dV_1 + \\ & + (C_{1111}^I - C_{1111}^M) \sum_{f=s=1}^3 \sum_{m=n=1}^3 (C_{fss1}^I - C_{fss1}^M) (C_{mnn1}^I - C_{mnn1}^M) \times \\ & \times \int_{V_1} \int_{V_2} G_{1m,1}(\vec{r}, \vec{r}_1) G_{1f,1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \frac{\partial^2 K_{\lambda}^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial r_{[1n]} \partial r_{[2s]}} dV_2 dV_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, особенностью метода последовательных приближений является возможность уточнения значения эффективных констант в зависимости от морфологических особенностей, выражаемых через структурные моментные функции. Из выражений (19) и (20) видно, что каждое последующее приближение зависит от структурной моментной функции более высокого порядка, что позволяет в более полной степени учитывать морфологию микроструктуры в необходимых случаях.

### 3. Численная реализация метода

Для численного решения интегралов, входящих в полученные уравнения, необходим явный вид функции Грина. Когда размеры представительного объема много меньше характерных размеров твердого тела,

в случае изотропной среды в качестве функции Грина  $G_{kn}(\vec{r}, \vec{r}_1)$  для трехмерного пространства в работах [10, 38] было получено следующее выражение:

$$G_{kn}(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{1}{8\pi\langle\mu\rangle|\vec{r} - \vec{r}_1|} \times \left( \frac{\langle\lambda\rangle + \langle 3\mu\rangle}{\langle\lambda + 2\mu\rangle} \delta_{kn} + \frac{\langle\lambda\rangle + \langle\mu\rangle}{8\pi\langle\mu\rangle\langle\lambda + 2\mu\rangle} (r_k - r_{1[k]})(r_n - r_{1[n]}) \right). \quad (30)$$

При этом  $\langle\lambda\rangle = \lambda_l p + \lambda_m (1 - p)$ ,  $\langle\mu\rangle = \mu_l p + \mu_m (1 - p)$ .

Для вычисления интегралов, входящих в выражения (25) и (29), необходимо использовать методы численного интегрирования. Интегрирование проводится по всей области статистической зависимости в сферических координатах, где координаты вектора  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$  определяются по формулам  $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ,  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , где  $a$  – сторона представительного объема. Переход к сферическим координатам обусловлен избавлением от сингулярности функции Грина (30) по всем трем переменным декартовой системы координат и переходом к сингулярности только по одной переменной  $r$ . Для достижения допустимой погрешности интегрирования применяется глобальная адаптивная стратегия в совокупности с многомерным правилом интегрирования и правилом преобразования переменных ИМТ для обхода сингулярности.

Глобальная адаптивная стратегия основана на том, что из всех подобластей исходной области интегрирования выбирается подобласть с наибольшей погрешностью и делится пополам. Затем вычисляются значение интеграла и погрешность для каждой половины, и процедура повторяется для всего множества подобластей. После каждого такого шага пересчитываются глобальное значение интеграла и глобальная погрешность, которые представляют собой сумму значения интеграла и погрешности в каждой подобласти. Ожидается, что глобальная погрешность должна монотонно снижаться с увеличением числа областей.

Многомерное правило интегрирования [50] определяется следующим образом. Для куба  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$ ,  $d \in \mathbb{N}, d > 1$  задается набор точек, удовлетворяющий следующим условиям: любая точка из множества может быть получена перемещением или заменой знака координаты любой другой точки из этого же множества; все точки множества имеют одинаковый весовой коэффициент. Множество точек, соответствующее вышеописанным критериям, называется орбитой. Если правило интегрирования имеет  $K$  орбит  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_K$ , а  $i$ -я орбита  $\Omega_i$  имеет весовой коэффициент  $w_i$ , интеграл приближенно вычисляется по формуле

$$\int_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d} f(X) dX \approx \sum_{i=1}^K w_i \sum_{X_j \in \Omega_i} f(X_j). \quad (31)$$

Преобразование переменных ИМТ предложено в работах Ири, Мориуги и Токасава [51] и основано на идее преобразования независимой переменной таким образом, что все производные нового подынтегрального выражения обращаются в ноль в конечных точках интервала интегрирования.

В приведенном ниже примере выполнено численное сравнение результатов расчета относительных эффективных характеристик пористых неоднородных полидисперсных сред со сферическими включениями. Пример геометрической модели такой среды представлен на рис. 1, где красным цветом выделены включения (поры). Создание модели осуществлялось методом последовательного синтеза, согласно которому каждое новое включение помещается в произвольную точку внутри куба, при этом контролируется его пересечение с уже существующими включениями. В случае наличия пересечения данное включение отбрасывается и генерируется новое. В качестве включений использовались сферы различных радиусов, проверка пересечения между которыми осуществлялась путем расчета расстояния между центрами.

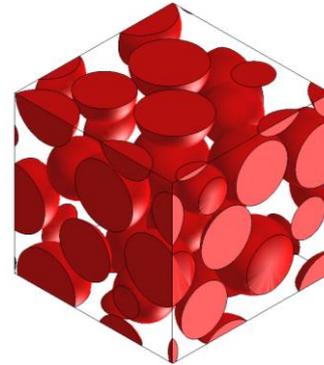


Рис. 1. Представительный объем полидисперсной неоднородной среды с объемной долей включений 40 %

Fig. 1. Representative volume element of a polydisperse heterogeneous medium with 40 % volume fraction of inclusions

Моментные функции, характеризующие неоднородную среду, получены на основе разбиения трехмерного представительного объема сеткой с фиксированным шагом и кубической формой конечного элемента (так называемая воксельная сетка). Преимущество использования такого способа получения значений моментных функций связано еще и с тем, что информацию о представительных объемах неоднородных материалов в таком виде легко получать из экспериментальных исследований, например, на основе микрокомпьютерной томографии.

На рис. 2 изображены нормированные моментные функции второго и третьего порядка вида  $f_{\lambda}^{(n)}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) =$

$= \frac{K_{\lambda}^{(n)}(|\vec{r} - \vec{r}_1|)}{D_{\lambda}^{(n)}}$ , где  $D_{\lambda}^{(n)}$  – дисперсия  $n$ -го порядка индикаторной функции  $\lambda(\vec{r})$ , полученные для изображенной на рис. 1 среды и используемые в выражениях (25) и (29).

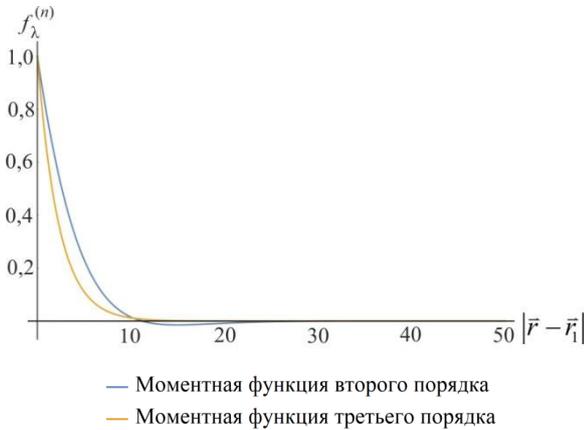


Рис. 2. Моментные функции второго и третьего порядка для двухфазной неоднородной среды с объемной долей включений 40 %

Fig. 2. Second and third order correlation functions for a two-phase heterogeneous medium with 40 % volume fraction of inclusions

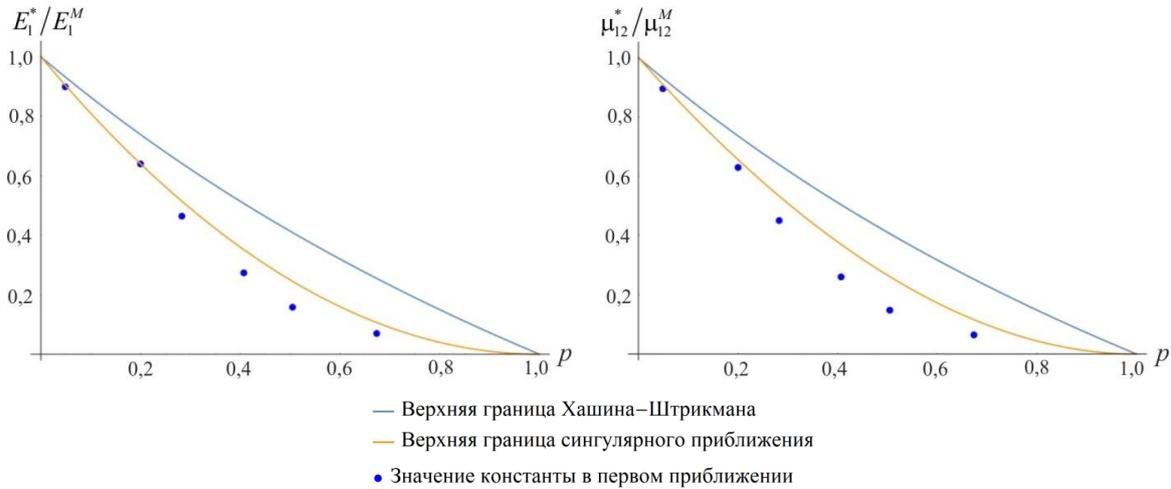


Рис. 3. Значения эффективных характеристик среды, полученные в первом приближении, в сравнении с границами Хашина–Штрикмана и сингулярного приближения

Fig. 3. Values of the medium effective characteristics obtained in the first approximation in comparison with the Hashin–Shtrikman and singular approximation bounds

Сингулярное приближение основано на приведении решения к интегральному выражению, содержащему вторую производную функции Грина, и затем выделению сингулярной составляющей из нее, сводя таким образом интеграл по сингулярной области к постоянно-му тензору [38]. Согласно сингулярному приближению, точное значение эффективных констант находится в границах, образованных следующими неравенствами:

На рис. 3 представлены значения отношения эффективных модулей  $\lambda^*$  и  $\mu^*$  среды к модулям матрицы. Данные величины являются безразмерными и изменяются от 0 до 1. Также приведено сравнение с границами Хашина–Штрикмана [2] и сингулярного приближения, предложенного Т.Д. Шермергором [38]. Границы Хашина–Штрикмана эффективных констант для двухфазной неоднородной среды вычисляются по формулам

$$k_2 + \frac{p_1(k_1 - k_2)}{1 + \frac{3p_2}{3k_2 + 4\mu_2}(k_1 - k_2)} \leq k^* \leq k_1 + \frac{p_2(k_2 - k_1)}{1 + \frac{p_1}{3k_1 + 4\mu_1}(k_2 - k_1)}, \quad (32)$$

$$\mu_2 + \frac{p_1(\mu_1 - \mu_2)}{1 + \frac{6p_2(k_2 + 2\mu_2)}{5\mu_2(3k_2 + 4\mu_2)}(\mu_1 - \mu_2)} \leq \mu^* \leq \mu_1 + \frac{p_2(\mu_2 - \mu_1)}{1 + \frac{6p_1(k_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3k_1 + 4\mu_1)}(\mu_2 - \mu_1)}, \quad (33)$$

где константы с индексом 1 относятся к компоненту с более жесткими свойствами.

$$\langle \mu \rangle - \frac{D_{\mu}}{(1-p)\mu_l + p\mu_M + \frac{\mu_2(9k_2 + 8\mu_2)}{6(k_2 + 2\mu_2)}} \leq \mu^* \leq \langle \mu \rangle - \frac{D_{\mu}}{(1-p)\mu_l + p\mu_M + \frac{\mu_1(9k_1 + 8\mu_1)}{6(k_1 + 2\mu_1)}}, \quad (34)$$

$$\langle k \rangle - \frac{D_k}{(1-p)k_I + pk_M + \frac{4}{3}\mu_2} \leq k^* \leq \langle k \rangle - \frac{D_k}{(1-p)k_I + pk_M + \frac{4}{3}\mu_1}, \quad (35)$$

где  $D_\mu = p(1-p)(\mu_I - \mu_M)^2$ ;  $D_k = p(1-p)(k_I - k_M)^2$ ;  $\mu_1 = \langle \mu \rangle$ ;  $\mu_2 = \langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ ;  $k_1 = \langle k \rangle$ ;  $k_2 = \langle k^{-1} \rangle^{-1}$ .

Все изложенные результаты, включая численное интегрирование, получены в программной среде Wolfram Mathematica.

Как видно из результатов, использование предложенной методики с применением первого приближения позволяет уточнить значения эффективных констант для пористых структур с объемной долей выше 20 % по сравнению с сингулярным приближением, где не используется в явном виде информация о морфологии. Установлено, что для пористых структур с равномерным распределением включений добавка, вносимая вторым приближением решения, является незначительной. В то же время значимость этой добавки увеличивается с ростом отклонения распределения включений в представительном объеме от равномерного, который может быть обусловлен формированием кластеров, сильным разбросом размеров включений и т.д.

## Заключение

В данной работе предложен метод вычисления эффективных характеристик полидисперсных неоднородных сред на основе применения многоточечных моментных функций и метода интегральных уравнений в виде приближенных решений стохастических краевых задач теории упругости. Входными параметрами данной модели являются упругие свойства компонент среды, а также формализованная в виде многоточечных моментных функций информация о морфологии среды. Полученные в явном виде выражения для эффективных констант макрооднородной изотропной среды представлены в виде средней составляющей и добавки, точность которой определяется приближением используемого решения и порядком входящих в него моментных функций. Инте-

## Библиографический список

1. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // Collected Works of J.D. Eshelby. – 2007. DOI: 10.1007/1-4020-4499-2\_18
2. Hashin Z., Shtrikman S. A Variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol. 33. – No. 10. – P. 3125–3131. DOI: 10.1063/1.1728579
3. Beran M. Statistical continuum theories // J. Rheol. (N. Y. N. Y.). – 1965. – Vol. 9. – No. 1. – P. 339–355. DOI: 10.1122/1.548991

гридифференциальные уравнения, которые входят в добавку, могут быть решены численно с использованием многомерных методов интегрирования и правил обращения с сингулярностью функции Грина.

Важным фактором, влияющим на работоспособность представленного подхода при использовании приближений высоких порядков, является точность используемых методов численного интегрирования. Это связано с тем, что при росте размерности интегралов в связи с увеличением порядка приближения возрастает значение фактора сингулярности производных функций Грина. При перемножении таких производных требуется тонкая отладка методов и правил интегрирования для «отсечения» зоны сингулярности без влияния на погрешность интегрирования. Так, для исследованных примеров пористых сред установлено, что использование второго приближения с описанными выше способами численного интегрирования приводит к недопустимой погрешности при объемной доле включений выше 50 %. Это связано с тем, что при увеличении объемной доли точка пересечения с осью графика абсцис моментных функций (рис. 2) смещается вправо, тем самым увеличивая скорость возрастания значений подынтегральной функции в области, близкой к сингулярности, тем самым увеличивая погрешность интегрирования. Таким образом, для получения надежных результатов использования методики с многоточечными статистиками высших порядков в качестве инструментов описания морфологии среды необходимо дополнительное исследование подходящих способов численного интегрирования.

## Благодарности

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете при поддержке Российского научного фонда (проект №18-71-00135).

## Acknowledgements

The research was performed at Perm National Research Polytechnic University, with the support of the Russian Science Foundation (Project No. 18-71-00135).

4. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. – 1973. – Vol. 21. – No. 5. – P. 571–574. DOI: 10.1016/0001-6160(73)90064-3
5. Hori M., Nemat-Nasser S. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites // Mech. Mater. – 1993. – Vol. 14. – No. 3. – P. 189–206. DOI: 10.1016/0167-6636(93)90066-Z
6. Christensen R.M. Mechanics of composite materials. – New York: Wiley-Interscience, 1979. – 348 p.

7. Berryman J.G. Measures of microstructure to improve estimates and bounds on elastic constants and transport coefficients in heterogeneous media // *Mech. Mater.* – 2006. – Vol. 38. – No. 8–10. – P. 732–747. DOI: 10.1016/j.mechmat.2005.06.014
8. Pierard O., Friebel C., Doghri I. Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites: A general framework and its validation // *Compos. Sci. Technol.* – 2004. – Vol. 64. – № 10–11. – P. 1587–1603. DOI: 10.1016/j.compscitech.2003.11.009
9. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1965. – Vol. 13. – No. 4. – P. 213–222. DOI: 10.1016/0022-5096(65)90010-4
10. Kröner E. Statistical Modelling // *Modelling Small Deformations of Polycrystals.* – Dordrecht: Springer Netherlands, 1986. – P. 229–291. DOI: 10.1007/978-94-009-4181-6\_8
11. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1965. – Vol. 13. – P. 223–227. DOI: 10.1016/0022-5096(65)90011-6
12. Willis J.R. Variational and Related Methods for the Overall Properties of Composites // *Advances in Applied Mechanics.* – 1981. – Vol. 21. – No. C. – P. 1-78. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70330-2
13. Castañeda P.P. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1996. – Vol. 44. – No. 6. – P. 827–862. DOI: 10.1016/0022-5096(96)00015-4
14. Castañeda P.P. New variational principles in plasticity and their application to composite materials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1992. – Vol. 40. – No. 8. – P. 1757–1788. DOI: 10.1016/0022-5096(92)90050-C.
15. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials // *Mech. Mater.* – 1987. – Vol. 6. – No. 2. – P. 147–157. DOI: 10.1016/0167-6636(87)90005-6
16. Allen D.H., Lee J.-W. The Effective Thermoelastic Properties of Whisker- Reinforced Composites as Functions of Material Forming Parameters // *Micromechanics and Inhomogeneity.* – New York: Springer New York, 1990. – P. 17–39. DOI: 10.1007/978-1-4613-8919-4\_2
17. Dunn M.L., Ledbetter H. Elastic-plastic behavior of textured short-fiber composites // *Acta Mater.* – 1997. – Vol. 45. – No. 8. – P. 3327–3340. DOI: 10.1016/S1359-6454(96)00401-6
18. Computation of linear elastic properties from microtomographic images: Methodology and agreement between theory and experiment / C.H. Arns [et al.] // *GEOPHYSICS.* – 2002. – Vol. 67. – No. 5. – P. 1396–1405. DOI: 10.1190/1.1512785
19. Comparison of prediction on effective elastic property and shape optimization of truss material with periodic microstructure / J. Yan [et al.] // *Int. J. Mech. Sci.* – 2006. – Vol. 48. – No. 4. – P. 400–413. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.11.003
20. Ostoja-Starzewski M. Material spatial randomness: From statistical to representative volume element // *Probabilistic Eng. Mech.* – 2006. – Vol. 21. – No. 2. – P. 112–132. DOI: 10.1016/j.probengech.2005.07.007
21. Drugan W.J., Willis J.R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1996. – Vol. 44. – No. 4. – P. 497–524. DOI: 10.1016/0022-5096(96)00007-5
22. Monetto I., Drugan W.J. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and minimum RVE size estimates for random elastic composites containing aligned spheroidal heterogeneities // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2009. – Vol. 57. – No. 9. – P. 1578–1595. DOI: 10.1016/j.jmps.2009.05.005
23. Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach / T. Kanit [et al.] // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – Vol. 40. – No. 13–14. – P. 3647–3679. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00143-4
24. Khisaeva Z.F., Ostoja-Starzewski M. On the size of RVE in finite elasticity of random composites // *J. Elast.* – 2006. – Vol. 85. – No. 2. – P. 153–173. DOI: 10.1007/s10659-006-9076-y
25. Determination of the critical size of a statistical representative volume element (SRVE) for carbon reinforced polymers / D. Trias [et al.] // *Acta Mater.* – 2006. – Vol. 54. – No. 13. – P. 3471–3484. DOI: 10.1016/j.actamat.2006.03.042
26. Sevostianov I., Kachanov M., Zohdi T. On computation of the compliance and stiffness contribution tensors of non ellipsoidal inhomogeneities // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – Vol. 45. – No. 16. – P. 4375–4383. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.03.020
27. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective Moduli of Solids With Cavities of Various Shapes // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – Vol. 47. – No. 1S. – P. S151. DOI: 10.1115/1.3122810
28. Evaluation of the effective elastic and conductive properties of a material containing concave pores / F. Chen [et al.] // *Int. J. Eng. Sci.* – 2015. – Vol. 97. – P. 60–68. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2015.08.012
29. Influence of waviness and curliness of fibres on mechanical properties of composites / A.Y. Matveeva [et al.] // *Comput. Mater. Sci. Elsevier B.V.* – 2014. – Vol. 87. – P. 1–11. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.061
30. Böhm H.J., Rasool A. Effects of particle shape on the thermoelastoplastic behavior of particle reinforced composites // *Int. J. Solids Struct. Elsevier Ltd.* – 2016. – Vol. 87. – P. 90–101. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.02.028
31. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites // *Int. J. Eng. Sci. Elsevier Ltd.* – 2012. – Vol. 58. – P. 21–34. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.03.022
32. Klusemann B., Böhm H.J., Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites with non-elliptical reinforcements: Comparisons and benchmarks // *Eur. J. Mech. A/Solids. Elsevier Masson SAS.* – 2012. – Vol. 34. – P. 21–37. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2011.12.002
33. Chen F.C., Young K. Inclusions of arbitrary shape in an elastic medium // *J. Math. Phys. American Institute of Physics.* – 1977. – Vol. 18. – No. 7. – P. 1412–1416. DOI: 10.1063/1.523438
34. Composite structure modeling and mechanical behavior of particle reinforced metal matrix composites / Y. Su [et al.] // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2014. – Vol. 597. – P. 359–369. DOI: 10.1016/j.msea.2014.01.024
35. Automated modeling of random inclusion composites / M. Bailakanavar [et al.] // *Eng. Comput.* – 2012. – Vol. 30. – No. 4. – P. 609–625. DOI: 10.1007/s00366-012-0310-x
36. Torquato S. Random Heterogeneous Media: Microstructure and Improved Bounds on Effective Properties // *Appl. Mech. Rev.* – 1991. – Vol. 44. – No. 2. – P. 37. DOI: 10.1115/1.3119494
37. Torquato S. Morphology and effective properties of disordered heterogeneous media // *Int. J. Solids Struct. Elsevier Science Ltd.* – 1998. – Vol. 35. – No. 19. – P. 2385–2406. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00142-X
38. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977.

39. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
40. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
41. Хорошун Л.П. Методы случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14, № 2. – С. 3–17.
42. Болотин В.В., Москаленко В. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов // Механика твердого тела. – 1967. – Т. 3. – С. 106–111.
43. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 116 с.
44. Tashkinov M., Wildemann V., Mikhailova N. Method of successive approximations in stochastic elastic boundary value problem for structurally heterogeneous materials // Comput. Mater. Sci. – 2012. – Vol. 52. – No. 1. – P. 101–106. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.04.025
45. Tashkinov M.A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials // Mechanics of Advanced Materials. Ed. Silberschmidt V.V., Matveenko V.P. – Cham: Springer, 2015. – С. 43–78. DOI: 10.1007/978-3-319-17118-0\_3
46. Tashkinov M. Micro-scale modeling of phase-level elastic fields of SiC reinforced metal matrix multiphase composites using statistical approach // Comput. Mater. Sci. Elsevier. – 2016. – Vol. 116. – P. 113–121. DOI: 10.1016/j.commatsci.2015.10.047
47. Tashkinov M. Modeling of elastic behavior of multicomponent composite materials based on approximate solution of stochastic boundary value problems // PNRPU Mech. Bull. – 2015. – No. 3. – P. 165–181. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.12
48. Tashkinov M.A. Stochastic modelling of deformation process in elastoplastic composites with randomly located inclusions using high order correlation functions // PNRPU Mech. Bull. Perm National Research Polytechnic University. – 2014. – Vol. 2014. – No. 3. – P. 163–185. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.09
49. Torquato S. Random Heterogeneous Materials // Applied Mechanics Reviews. – 2002. – Vol. 16. – XXI. – 703 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-6355-3
50. Genz A.C., Malik A.A. An Imbedded Family of Fully Symmetric Numerical Integration Rules // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. DOI: 10.1137/0720038
51. Davis P.J., Rabinowitz P. Approximate Integration over Infinite Intervals // Methods of Numerical Integration. Elsevier. – 1984. – P. 199–270. DOI: 10.1016/B978-0-12-206360-2.50009-1

## References

1. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Collected Works of J.D. Eshelby, 2007, DOI: 10.1007/1-4020-4499-2\_18.
2. Hashin Z., Shtrikman S. A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials, *J. Appl. Phys.*, 1962, 33(10), pp. 3125–3131, DOI: 10.1063/1.1728579.
3. Beran M. Statistical Continuum Theories, *J. Rheol. (N. Y. N. Y.)*, 1965, 9(1), pp. 339–355, DOI: 10.1122/1.548991.
4. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, 1973, 21(5), pp. 571–574, DOI: 10.1016/0001-6160(73)90064-3.
5. Hori M., Nemat-Nasser S. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites, *Mech. Mater.*, 1993, 14(3), pp. 189–206, DOI: 10.1016/0167-6636(93)90066-Z.
6. Christensen R.M. Mechanics of composite materials. *New York, NY, Wiley-Interscience*, 1979, 348 p.
7. Berryman J.G. Measures of microstructure to improve estimates and bounds on elastic constants and transport coefficients in heterogeneous media, *Mech. Mater.*, 2006, 38(8–10), pp. 732–747, DOI: 10.1016/j.mechmat.2005.06.014.
8. Pierard O., Friebel C., Doghri I. Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites: A general framework and its validation, *Compos. Sci. Technol.*, 2004, 64(10–11), pp. 1587–1603, DOI: 10.1016/j.compscitech.2003.11.009.
9. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, 13(4), pp. 213–222, DOI: 10.1016/0022-5096(65)90010-4.
10. Kröner E. Statistical Modelling, Modelling Small Deformations of Polycrystals. *Dordrecht, Springer Netherlands*, 1986, pp. 229–291, DOI: 10.1007/978-94-009-4181-6\_8.
11. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, 13, pp. 223–227, DOI: 10.1016/0022-5096(65)90011-6.
12. Willis J.R. Variational and Related Methods for the Overall Properties of Composites. *Advances in Applied Mechanics*, 1981, 21(C), 1-78 p., DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70330-2.
13. Castañeda P.P. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1996, 44(6), pp. 827–862, DOI: 10.1016/0022-5096(96)00015-4.
14. Castañeda P.P. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, 40(8), pp. 1757–1788, DOI: 10.1016/0022-5096(92)90050-C.
15. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mech. Mater.*, 1987, 6(2), pp. 147–157. DOI: 10.1016/0167-6636(87)90005-6.
16. Allen D.H., Lee J.-W. The Effective Thermoelastic Properties of Whisker-Reinforced Composites as Functions of Material Forming Parameters, Micromechanics and Inhomogeneity. *New York, NY, Springer New York*, 1990, pp. 17–39, DOI: 10.1007/978-1-4613-8919-4\_2.
17. Dunn M.L., Ledbetter H. Elastic-plastic behavior of textured short-fiber composites. *Acta Mater.*, 1997, 45(8), pp. 3327–3340, DOI: 10.1016/S1359-6454(96)00401-6.
18. Arns C.H., Knackstedt M.A., Pinczewski W.V., Garboczi E.J. Computation of linear elastic properties from microtomographic images: Methodology and agreement between theory and experiment. *GEOPHYSICS*, 2002, 67(5), pp. 1396–1405, DOI: 10.1190/1.1512785.
19. Yan J., Cheng G., Liu S., Liu L. Comparison of prediction on effective elastic property and shape optimization of truss material with periodic microstructure. *Int. J. Mech. Sci.*, 2006, 48(4), pp. 400–413. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.11.003.
20. Ostoja-Starzewski M. Material spatial randomness: From statistical to representative volume element. *Probabilistic Eng. Mech.*, 2006, 21(2), pp. 112–132. DOI: 10.1016/j.probenmech.2005.07.007.

21. Drugan W.J., Willis J.R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1996, 44(4), pp. 497–524. DOI: 10.1016/0022-5096(96)00007-5.
22. Monetto I., Drugan W.J. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and minimum RVE size estimates for random elastic composites containing aligned spheroidal heterogeneities. *J. Mech. Phys. Solids*, 2009, 57(9), pp. 1578–1595. DOI: 10.1016/j.jmps.2009.05.005.
23. Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, 40(13–14), pp. 3647–3679, DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00143-4.
24. Khisaeva Z.F., Ostoja-Starzewski M. On the size of RVE in finite elasticity of random composites, *J. Elast.*, 2006, 85(2), pp. 153–173, DOI: 10.1007/s10659-006-9076-y.
25. Trias D., Costa J., Turon A., Hurtado J.E. Determination of the critical size of a statistical representative volume element (SRVE) for carbon reinforced polymers, *Acta Mater.*, 2006, 54(13), pp. 3471–3484, DOI: 10.1016/j.actamat.2006.03.042.
26. Sevostianov I., Kachanov M., Zohdi T. On computation of the compliance and stiffness contribution tensors of non ellipsoidal inhomogeneities. *Int. J. Solids Struct.*, 2008, 45(16), pp. 4375–4383. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.03.020.
27. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective Moduli of Solids With Cavities of Various Shapes. *Appl. Mech. Rev.*, 1994, 47(1S), pp. S151. DOI: 10.1115/1.3122810.
28. Chen F., Sevostianov I., Giraud A., Grgic D. Evaluation of the effective elastic and conductive properties of a material containing concave pores. *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, 97, pp. 60–68. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2015.08.012.
29. Matveeva A.Y., Pyrlin S. V., Ramos M.M.D., Böhm H.J., Van Hattum F.W.J. Influence of waviness and curliness of fibres on mechanical properties of composites. *Comput. Mater. Sci.*, 2014, 87, pp. 1–11. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.061.
30. Böhm H.J., Rasool A. Effects of particle shape on the thermoelastoplastic behavior of particle reinforced composites. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, 87, pp. 90–101. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.02.028.
31. Rasool A., Böhm H.J. Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites. *Int. J. Eng. Sci.*, 2012, 58, pp. 21–34. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.03.022.
32. Klusemann B., Böhm H.J., Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites with non-elliptical reinforcements: Comparisons and benchmarks. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2012, 34, pp. 21–37. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2011.12.002.
33. Chen F.C., Young K. Inclusions of arbitrary shape in an elastic medium. *J. Math. Phys.*, 1977, 18(7), pp. 1412–1416. DOI: 10.1063/1.523438.
34. Su Y., Ouyang Q., Zhang W., Li Z., Guo Q., Fan G., Zhang D. Composite structure modeling and mechanical behavior of particle reinforced metal matrix composites. *Mater. Sci. Eng. A*, 2014, 597, pp. 359–369. DOI: 10.1016/j.msea.2014.01.024.
35. Bailakanavar M., Liu Y., Fish J., Zheng Y. Automated modeling of random inclusion composites. *Eng. Comput.*, 2012, 30(4), pp. 609–625. DOI: 10.1007/s00366-012-0310-x.
36. Torquato S. Random Heterogeneous Media: Microstructure and Improved Bounds on Effective Properties. *Appl. Mech. Rev.*, 1991, 44(2), pp. 37. DOI: 10.1115/1.3119494.
37. Torquato S. Morphology and effective properties of disordered heterogeneous media. *Int. J. Solids Struct.*, 1998, 35(19), pp. 2385–2406. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00142-X.
38. Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnyh sred [Elasticity theory of microinhomogeneous media]. *Moscow, Nauka*, 1976, 400 p.
39. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statisticheskaya mekhanika kompozitnykh materialov [Statistical mechanics of composite materials]. *Minsk: Izd-vo Belorus, gos. un-ta*, 1978, 208 p.
40. Lomakin V.A. Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemyykh tel [Statistical Problems of the Mechanics of Solid Deformable Bodies]. *Moscow, Nauka*, 1970, 139 p.
41. Khoroshun L.P. Metody sluchaynykh funktsiy v zadachah o makroskopicheskikh svoystvah mikroneodnorodnyh sred [Methods of random functions in the problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media]. *Prikl. mehanika*, 1978, vol. 14, no. 2, pp. 3–17.
42. Bolotin V.V., Moskalenko V.K K raschetu makroskopicheskikh postoiannykh sil'no izotropnykh kompozitsionnykh materialov [Calculation of macroscopic permanent strongly isotropic composites]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1967, no. 3, pp. 106–111.
43. Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika deformirovaniia i razrusheniia strukturno-neodnorodnykh tel [Mechanics of deformation and failure of structurally heterogeneous bodies]. *Moscow, Nauka*, 1984, 116 p.
44. Tashkinov M., Wildemann V., Mikhailova N. Method of successive approximations in stochastic elastic boundary value problem for structurally heterogeneous materials. *Comput. Mater. Sci.*, 2012, 52(1), pp. 101–106. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.04.025.
45. Tashkinov M.A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials. *Mechanics of Advanced Materials / ed. Silberschmidt V.V., Matveenko V.P., Springer, Cham*, 2015, pp. 43–78. DOI: 10.1007/978-3-319-17118-0\_3.
46. Tashkinov M. Micro-scale modeling of phase-level elastic fields of SiC reinforced metal matrix multiphase composites using statistical approach. *Comput. Mater. Sci.*, 2016, 116, pp. 113–121. DOI: 10.1016/j.commatsci.2015.10.047.
47. Tashkinov M. Modeling of elastic behavior of multicomponent composite materials based on approximate solution of stochastic boundary value problems. *PNRPU Mech. Bull.*, 2015, (3), pp. 165–181. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.12.
48. Tashkinov M.A. Stochastic modelling of deformation process in elastoplastic composites with randomly located inclusions using high order correlation functions. *PNRPU Mech. Bull.*, 2014, 2014(3), pp. 163–185. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.09.
49. Torquato S. Random Heterogeneous Materials. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 16, XXI, 703 p.. DOI: 10.1007/978-1-4757-6355-3.
50. Genz A.C., Malik A.A. An Imbedded Family of Fully Symmetric Numerical Integration Rules. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005. DOI: 10.1137/0720038.
51. Davis P.J., Rabinowitz P. Approximate Integration over Infinite Intervals. *Methods of Numerical Integration, Elsevier*, 1984, pp. 199–270. DOI: 10.1016/B978-0-12-206360-2.50009-1.