

Янковский А.П. Моделирование динамического поведения пространственно-армированных пластин из нелинейно-упругих материалов в рамках уточненной теории изгиба // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 215-228. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.18

Yankovskii A.P. Modeling the dynamic behavior of spatially reinforced plates of nonlinear elastic materials within the refined bending theory. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 215-228. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.18



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.18

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ В РАМКАХ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 03 декабря 2018 г.  
Принята: 20 июня 2019 г.  
Опубликована: 28 июня 2019 г.

#### Ключевые слова:

плоское армирование,  
пространственное армирование,  
гибкие пластины, динамический  
изгиб, уточненные теории изгиба,  
теория Редди, нелинейная  
упругость, схема «крест»,  
взрывные нагрузки.

### АННОТАЦИЯ

Построены уточненные математические модели изгибного деформирования пространственно-армированных гибких пластин, изготовленных из нелинейно-упругих материалов компонентов композиции. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Полученные уравнения позволяют с разной степенью точности определять деформированное состояние таких конструкций при учете их возможного слабого сопротивления поперечным сдвигам. В частном случае из этих уравнений получаются соотношения традиционной неклассической теории Редди. Решение сформулированной приведенной начально-краевой задачи разыскивается с применением явной численной схемы типа «крест». Продемонстрировано, что в общем случае не при всех пространственных структурах армирования пластин удастся разработать явную численную схему. Исследовано динамическое поведение плоско- и пространственно армированных пластин разной формы и относительной толщины под действием воздушной взрывной волны. Показано, что в случае сильно выраженной анизотропии для относительно толстых прямоугольных пластин замена плоской структуры на пространственную структуру армирования позволяет уменьшить прогибы по модулю на несколько десятков процентов, а интенсивность деформаций компонентов композиции – в разы. Уменьшение степени анизотропии композиции и относительной толщины пластин приводит к ослаблению эффекта от замены плоской структуры армирования на пространственную структуру. В кольцевых пластинах с жесткой внутренней шайбой этот эффект не проявляется. Наоборот, замена плоской структуры армирования на пространственную структуру приводит к ухудшению динамических характеристик таких конструкций даже при их относительно большой толщине. Продемонстрировано, что динамическое поведение пластин, рассчитанное по теории Редди, существенно отличается от расчетов по уточненным теориям, особенно при сравнении деформированных состояний компонентов композиции.

© ПНИПУ

© Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky\_ap@rambler.ru,  
ID: 0000-0002-2602-8357

Andrey P. Yankovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Scientist,  
e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky\_ap@rambler.ru, ID: 0000-0002-2602-8357



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# MODELING THE DYNAMIC BEHAVIOR OF SPATIALLY REINFORCED PLATES OF NONLINEAR ELASTIC MATERIALS WITHIN THE REFINED BENDING THEORY

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 03 December 2018

Accepted: 20 June 2019

Published: 28 June 2019

### Keywords:

flat reinforcement, spatial reinforcement, flexible plate, dynamic bending, refined theory of bending, Reddy theory, nonlinear elasticity, "cross" schemes, explosive loads.

## ABSTRACT

Refined mathematical models are constructed for the flexible deformation of spatially reinforced flexible plates of nonlinear elastic materials of the composition components. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The obtained equations allow determining the deformed state of such structures with different degrees of accuracy taking into account their possible weak resistance to transverse shear. As a special case, based on these equations the relations of the traditional non-classical Reddy theory are obtained. The solution of the initial boundary value problem is obtained using an explicit numerical scheme of the "cross" type. It is shown that in a general case of plates an explicit numerical scheme cannot be developed for all spatial structures of reinforcement. The dynamic behavior is investigated for the flat and spatially reinforced plates of different shapes and relative thickness under the action of an air blast wave. It is shown that in the case of a strongly denominated anisotropy for relatively thick rectangular plates, the replacement of a flat structure with a spatial reinforcement structure reduces deflections modulo several tens of percent, and reduces the intensity of deformation of the components of the composition by several times. The reduction of the anisotropy degree of the composition and the relative thickness of the plates leads to a weakening of the effect of replacing the flat reinforcement structure on the spatial structure. This effect does not occur in annular plates with a rigid inner insert. On the contrary, the replacement of the flat reinforcement structure with the spatial structure leads to the deterioration of dynamic characteristics of such structures even of their relatively large thickness. It is shown that the dynamic behavior of plates calculated according to the Reddy theory significantly differ from the calculations according to the refined theory, especially when comparing the strain states of the components of the composition.

© PNRPU

## Введение

В современных инженерных изделиях широко используются тонкостенные элементы конструкций из композиционных материалов (КМ) [1–6]. Особый интерес в последние десятилетия вызывают КМ с пространственными структурами армирования [7–10], потому что такие структуры позволяют устранить серьезный недостаток плоскоармированных сред – расслоение в силу слабого сопротивления сдвигу и отрыву в поперечном направлении, а также позволяют локализовать трещины в пределах нескольких ячеек периодичности композиции. Следовательно, актуальной является проблема адекватного описания механического поведения пространственно армированных сред. Моделирование линейно-упругого деформирования пространственно армированных сред было проведено в [11–13]. В работе [13], кроме того, было показано, как, используя метод переменных параметров упругости и полученные в [13] структурные соотношения, можно построить итерационную структурную модель нелинейно-упругого деформирования КМ-среды.

При некоторых пространственных структурах армирования элементов тонкостенных конструкций (например, при ортогональном 3D-армировании [7, 8, 10, 11]) так же, как и при плоскоперекрестном армировании, может проявляться их слабое сопротивление поперечным сдвигам, поэтому и при пространственном армировании актуальна проблема адекватного описания механического поведения КМ-пластин при изгибе.

Ослабленное сопротивление тонкостенных КМ-конструкций поперечным сдвигам традиционно учитывается в рамках теорий Рейсснера [14–17] или Редди [18–22]. В [20] показано, что при линейно-упругом деформировании тонкостенных КМ-конструкций не требуется уточнять решения, полученные в рамках теории Редди. В работе же [23] было продемонстрировано, что уже в случае нелинейно-упругого поведения компонентов композиции плоскоармированных пластин требуется использовать более точные кинематические соотношения [16, 24, 25], чем в теории Редди [22].

Численное интегрирование нелинейных начально-краевых задач изгиба тонкостенных элементов конструкций, как правило, осуществляется с применением явной схемы типа «крест» [16, 22, 23] или неявных методов Ньюмарка [26–29].

В связи со всем вышеизложенным данная работа посвящена моделированию изгибного поведения пространственно армированных гибких пластин из нелинейно-упругих материалов в рамках уточненной (по сравнению с моделью Редди) теории с применением явной пошаговой схемы типа «крест» [23].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим КМ-пластину толщиной  $2h$  (рис. 1), с которой свяжем прямоугольную декартову систему координат  $x_i$  таким образом, чтобы ось  $Ox_3$  была перпендикулярна пластине, а отсчетная плоскость  $Ox_1x_2$  сов-

мещалась со срединной плоскостью ( $|x_3| \leq h$ ). Конструкция плоскоперекрестно или пространственно-перекрестно армирована  $K$  семействами волокон с интенсивностями армирования  $\omega_k$ ,  $1 \leq k \leq K$ . По толщине пластины структура армирования однородна. (На рис. 1,  $a$  изображен случай с плоско ортогональным 2D-армированием

( $K = 2$ ); на рис. 1,  $b$  – с пространственно-ортогональным 3D-армированием ( $K = 3$ ) [7, 8, 10, 11]; на рис. 1,  $в$  – с неортогональным пространственным 4D-армированием ( $K = 4$ ) [8].) Относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции обозначим  $\omega_0$ .

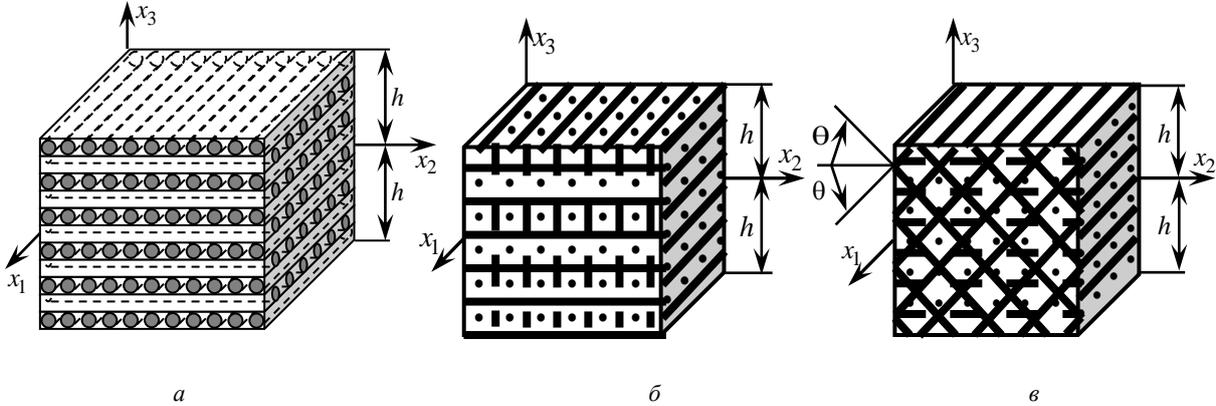


Рис. 1. Элемент композитной пластины: с плоской ортогональной структурой 2D-армирования ( $a$ ); с пространственной ортогональной структурой 3D-армирования ( $b$ ); с пространственной неортогональной структурой 4D-армирования ( $в$ )

Fig. 1. Composite plate element: with a flat orthogonal structure of 2D-reinforcement ( $a$ ); with spatial orthogonal structure of 3D-reinforcement ( $b$ ); with spatial non-orthogonal 4D-reinforcement structure ( $c$ )

Для описания возможного (например, в случаях использования 2D- и 3D-структур армирования, изображенных на рис. 1,  $a$  и  $b$ ) слабого сопротивления конструкции поперечным сдвигам используем уточненные кинематические соотношения [23]. Тогда, учитывая геометрическую нелинейность задачи в приближении Кармана, осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения  $U_i$  точек исследуемой КМ-пластины аппроксимируем так [23]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ &+ \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \\ &+ \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(+)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(+)} - \\ &- \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(-)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(-)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \\ \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x}) + \\ &+ \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2; \\ U_i(t, \mathbf{r}) &= u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \\ &+ 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)}, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,$$

$$t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (3)$$

где  $w$  – прогиб точек срединной плоскости;  $u_i$  – тангенциальные перемещения точек этой плоскости;  $\varepsilon_{i3}^{(+)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(-)}$  – деформации поперечных сдвигов на верхней ( $x_3 = +h$ ) и нижней ( $x_3 = -h$ ) лицевых поверхностях пластины;  $t_0$  – начальный момент времени;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $M$  – целое число, определяющее количество слагаемых, удерживаемых в частичных суммах степенных рядов по  $x_3$ ;  $G$  – область, занимаемая пластиной в плане. В случае  $M = 0$  из (1)–(3) вытекают кинематические соотношения теории Редди [18–22]. Равенство (3) – традиционная для тонких пластин кинематическая гипотеза, согласно которой изменчивость перемещения  $U_3(t, \mathbf{r})$  в поперечном направлении  $Ox_3$  не учитывается [14–23].

Таким образом, в соотношениях (1)–(3) неизвестны функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  и  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ), которые зависят только от двух пространственных переменных  $x_1, x_2$  и от времени  $t$ .

Предполагаем, что компоненты композиции однородны и изотропны, а нелинейно-упругое их поведение

описывается обобщенными квазилинейными определяющими соотношениями (8) из [22], позволяющими учитывать свойство разнсопротивляемости, причем материальные функции удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода последовательных приближений (см. стр. 199 в [30]), обобщающего метод переменных параметров упругости. Тогда в рамках итерационной структурной модели нелинейно упругодеформируемой пространственно-армированной среды [13] в текущий момент времени  $t$  на данной итерации связь между осредненными напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  в композиции определяется линеаризованным матричным равенством (см. (11) в [22])

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}^T,$$

$\mathbf{A} = (a_{ij})$  – известная  $6 \times 6$ -матрица, которую можно трактовать как матрицу эффективных жесткостей КМ-среды;  $T$  – операция транспонирования. Элементы  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$  зависят от структуры армирования (направлений и плотностей  $\omega_k$  армирования), от деформированного состояния композиции  $\varepsilon_{ij}$ , определенного из решения на предыдущей итерации в данный момент времени, и вычисляются по структурным формулам из [13]. Направления армирования однозначно определяются углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (рис. 2, где согласно [13] изображена взаимная ориентация локальной  $x_i^{(k)}$ , связанной с траекторией волокна  $k$ -го семейства, и глобальной  $x_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) системами координат).

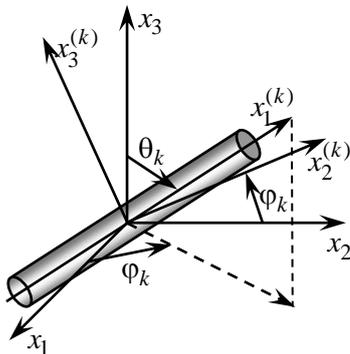


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с арматурой  $k$ -го семейства

Fig. 2. The local coordinate system associated with the armature of the  $k$ -th family

В настоящей работе КМ-конструкция рассматривается как тонкостенная гибкая система, поэтому с приемлемой для практического использования точностью

напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  можно аппроксимировать линейно по переменной  $x_3$  [15]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (6)$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях пластины, известные из силовых граничных условий.

Матричное равенство (4) представляет собой систему шести алгебраических уравнений. Согласно структуре векторов-столбцов  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (5) из третьего равенства системы (4) можно определить линейную поперечную деформацию пластины:

$$\varepsilon_{33} = a_{33}^{-1} (\sigma_{33} - a_{31}\varepsilon_{11} - a_{32}\varepsilon_{22} - a_{34}\varepsilon_{23} - a_{35}\varepsilon_{31} - a_{36}\varepsilon_{12}), \quad (7)$$

где напряжение  $\sigma_{33}$  предполагается известным из (6), а деформации  $\varepsilon_{ij}$  в правой части можно выразить по формулам (1) через двумерные функции  $w, u_i, \varepsilon_{l3}^{(\pm)}, \varepsilon_{l3}^{(m)}$  ( $0 \leq m \leq M$ ) и их производные по  $x_l$  ( $l = 1, 2$ ).

Для приведения трехмерных уравнений динамического равновесия КМ-пластины к двумерным уравнениям движения, как и в [23], используем метод взвешенных невязок, выбирая в качестве весовых функций однородные полиномы  $x_3^l$ . При этом, учитывая предположения (3) и (6), получим [23]

$$2h\rho\ddot{w} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)},$$

$$\rho \ddot{u}_i^{(l)} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w + h^l \left[ \sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w + X_i^{(l)}, \quad i = 1, 2,$$

$$0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad (8)$$

где

$$\rho \equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3,$$

$$M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3,$$

$$l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) \equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[ (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M + 1; \quad (9)$$

$$u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_i(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1. \quad (10)$$

Здесь  $\rho_0, \rho_k$  – объемная плотность материалов связующей матрицы и арматуры  $k$ -го семейства;  $X_i$  – компоненты объемной нагрузки, действующей на композицию, которая определяются по правилу простой смеси, аналогично  $\rho$ ;  $\sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  – касательные напряжения на верхней ( $x_3 = +h$ ) и нижней ( $x_3 = -h$ ) лицевых поверхностях конструкции, известные из силовых граничных условий. Согласно третьему соотношению (9),  $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$  и  $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$  – погонные мембранные силы и механические моменты в КМ-пластине;  $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$  ( $i, j=1, 2$ ) – погонные поперечные силы; остальные силовые факторы в (8) – погонные моменты высших порядков от напряжений.

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи нужно задать граничные и начальные условия. На той части кромки пластины (обозначим ее  $\Gamma_\sigma$ ), где заданы силовые граничные условия, имеют место соотношения в силовых факторах (9) [23]:

$$\begin{aligned} n_1 (M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_i w) + n_2 (M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) &= P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ \sum_{j=1}^2 n_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{s=1}^2 M_{js}^{(0)} \partial_s w \right) &= P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \\ i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (11)$$

На другой части кромки конструкции (обозначим ее  $\Gamma_u$ ), где заданы кинематические граничные условия, получим следующие соотношения для обобщенных кинематических переменных (10) при учете (3) [23]:

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3 \quad (j=\overline{1,3}, \quad i=1, 2), \\ n_1 &= \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $p_j$  – заданные на торцевой поверхности КМ-пластины внешние распределенные нагрузки, действующие в направлениях  $x_j$  ( $j=\overline{1,3}$ );  $U_{*3}$  – заданный на  $\Gamma_u$  прогиб;  $U_{*i}$  – заданные на торцевой поверхности перемещения в тангенциальных направлениях  $x_i$  ( $i=1, 2$ );  $u_{*i}^{(l)}$  – известные функции на кромке  $\Gamma_u$ ;  $\gamma$  – угол внешней нормали к контуру  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  (ограничивающему область  $G$ ), отсчитываемый от направления  $Ox_1$ .

В момент времени  $t=t_0$  необходимо задать начальные условия (см. (3), (10)) [23]:

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \\ \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) &= v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $U_{0j}, V_{0j}$  ( $j=\overline{1,3}$ ) – известные при  $t=t_0$  значения перемещений и скоростей точек КМ-пластины;  $u_{0i}^{(l)}, v_{0i}^{(l)}$  ( $i=1, 2$ ) – известные в начальный момент времени  $t_0$  функции.

Согласно равенствам (13),  $P_i^{(0)}$  и  $P_3^{(0)}$  – заданные на кромке конструкции погонные силы, действующие в направлениях  $x_i$  и  $x_3$  соответственно, а  $P_i^{(1)}$  – известные погонные механические моменты относительно осей  $x_j$  ( $j=3-i, i=1, 2$ ); остальные величины в правых частях соотношений (11) – заданные моменты высших порядков от известных поверхностных сил, приложенных к торцевой поверхности.

Таким образом, для однозначного интегрирования приведенной начально-краевой задачи в каждой точке области  $G$ , занимаемой пластиной в плане, в начальный момент времени  $t_0$  нужно задать условия (14) с учетом (15), а в каждой точке граничного контура  $\Gamma$  необходимо задать силовые (11) или кинематические (12) (при учете (13)) граничные условия. Возможно задание на кромке пластины и смешанных из (11), (12) граничных условий, например, в случае шарнирного опирания.

Согласно равенствам (10), проинтегрируем соотношение (2) по толщине конструкции с весами  $x_3^l$  ( $0 \leq l \leq M+1$ ), после чего получим матричные соотношения [23]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{w}} \partial_i w - \bar{\mathbf{e}}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \bar{\mathbf{e}}^{(-)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)}, \\ i=1, 2 \quad (\bar{\mathbf{w}} &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}, \quad \bar{\mathbf{e}}^{(\pm)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}^{(\pm)}), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(M)}, u_i^{(M+1)}\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \{\varepsilon_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(M-1)}, \varepsilon_{i3}^{(M)}\}^T. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{C}^{-1}$  – матрица, обратная  $(M+2) \times (M+2)$ -матрице  $\mathbf{C} = (c_{ij})$ ,  $\mathbf{w} = \{w_i\}$ ,  $\mathbf{e}^{(\pm)} = \{e_i^{(\pm)}\}$  –  $(M+2)$ -компонентные векторы-столбцы, элементы которых  $c_{ij}, w_i, e_i^{(\pm)}$  ( $1 \leq i, j \leq M+2$ ) вычисляются по формулам (40) из [23] и не зависят от решения задачи.

Для замыкания системы двумерных уравнений рассматриваемой задачи к уравнениям движения (8) необходимо присоединить четыре силовых граничных условия по касательным напряжениям на лицевых поверхностях пластины [23]. Согласно определяющему соотношению (4) и структуре векторов-столбцов  $\sigma$  и  $\varepsilon$  (см. (5)) для соответствующих касательных напряжений имеем выражения

$$a_{i1}\varepsilon_{11} + a_{i2}\varepsilon_{22} + a_{i3}\varepsilon_{33} + a_{i4}\varepsilon_{23} + a_{i5}\varepsilon_{31} + a_{i6}\varepsilon_{12} = \sigma_{i3}, \quad l = 1, 2, \quad (18)$$

где

$$i = \begin{cases} 5 & \text{при } l = 1, \\ 4 & \text{при } l = 2, \end{cases} \quad (19)$$

$a_{ij}$  – элементы матрицы  $\mathbf{A}$  в (4).

Используя (7), исключим из (18) деформацию  $\varepsilon_{33}$ , тогда на лицевых поверхностях  $x_3 = \pm h$  при учете (1) получим граничные условия

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_{13ij}^{(\pm)} [\partial_i u_j \mp h \partial_i \partial_j w + \\ & + 2 \sum_{m=0}^M (\pm h)^{m+1} \partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} \pm h \partial_i \varepsilon_{j3}^{(\pm)} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w] + \\ & + 2 \sum_{j=1}^2 A_{i3j3}^{(\pm)} \varepsilon_{j3}^{(\pm)} = \sigma_{i3}^{(\pm)} - b_{i3}^{(\pm)} \sigma_{33}^{(\pm)}, \\ & l = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} A_{i3ij}^{(\pm)} &= a_{ij}^{(\pm)} - \frac{a_{i3}^{(\pm)} a_{3j}^{(\pm)}}{a_{33}^{(\pm)}}, \quad A_{i312}^{(\pm)} = A_{i321}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( a_{i6}^{(\pm)} - \frac{a_{i3}^{(\pm)} a_{36}^{(\pm)}}{a_{33}^{(\pm)}} \right), \\ A_{i313}^{(\pm)} &= A_{i331}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( a_{i5}^{(\pm)} - \frac{a_{i3}^{(\pm)} a_{35}^{(\pm)}}{a_{33}^{(\pm)}} \right), \\ A_{i323}^{(\pm)} &= A_{i332}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( a_{i4}^{(\pm)} - \frac{a_{i3}^{(\pm)} a_{34}^{(\pm)}}{a_{33}^{(\pm)}} \right), \\ b_{i3}^{(\pm)} &= \frac{a_{i3}^{(\pm)}}{a_{33}^{(\pm)}}, \quad a_{kn}^{(\pm)} = a_{kn} \Big|_{x_3 = \pm h}, \quad j, l = 1, 2. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $\sigma_{33}^{(\pm)}$ ,  $\sigma_{i3}^{(\pm)}$  определены в (6) и (8). Индексы  $i$  и  $l$  в (21) связаны соотношением (19).

Согласно (21) правые части в (20) и коэффициенты в левых частях равенств (20) известны в данный момент времени  $t$  на текущей итерации метода последовательных приближений. Аналогичные (20) граничные условия по нормальным напряжениям  $\sigma_{33}^{(\pm)}$  на лицевых поверхностях удовлетворить не удастся в силу принятия кинематической гипотезы (3).

## 2. Численный метод расчета

Численное интегрирование рассматриваемой нелинейной задачи будем осуществлять на основе процедуры шагов по времени [16, 22, 23, 26], т.е. искомые функции будем определять в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\tau = \text{const} > 0$  – шаг по времени. При этом предполагаем, что в предшествующие два момента времени  $t = t_s$  уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} & w^s(\mathbf{x}) \equiv w(t_s, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)s}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_s, \mathbf{x}), \\ & \sigma_{j3}^{(\pm)s}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{j3}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}), \quad X_j^s(\mathbf{r}) \equiv X_j(t_s, \mathbf{r}), \\ & a_{rp}^s(\mathbf{r}) \equiv a_{rp}(t_s, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}, \quad r, p = \overline{1, 6}, \\ & s = n - 1, \quad n, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $a_{rp}$  – элементы  $6 \times 6$ -матрицы  $\mathbf{A}$  в (4).

Согласно (22), используя формулы (9) при учете (1), (4), (6), (7), (16) и (17), в момент времени  $t_n$  можем определить все внутренние силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$ , входящие в правые части уравнений (8) и в силовые граничные условия (11).

Для аппроксимации вторых производных по времени  $t$  в левых частях равенств (8) используем центральные конечные разности на трехточечном шаблоне [16, 22, 23]. При такой аппроксимации конечно-разностные аналоги уравнений движения (8) при учете обозначений, аналогичных (22), примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \times \\ & \times \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \\ & \frac{\rho}{\tau^2} \left( u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) + \\ & + h^l \left[ \sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] - l M_{i3}^{(l-1)} + \\ & + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w + X_i^{(l)}, \\ & i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Правые части в (23) при  $t = t_n$  уже известны, поэтому в силу предположений (22) из уравнений (23) можно однозначно определить неизвестные функции  $w$  и  $u_i^{(l)}$  ( $0 \leq l \leq M + 1$ ) в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . При этом к системе (23) следует присоединить необходимые граничные условия (11) и (12), учитывая при этом обозначения, аналогичные (22).

Согласно (16) с учетом (17) при известных  $w$  и  $u_i^{(l)}$  можно выразить неизвестные функции  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $0 \leq m \leq M$ ) через пока неизвестные функции  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  ( $i = 1, 2$ ). Подставив эти выражения в граничные условия (20), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_{p3ij}^{(\pm)} \left\{ \left[ \frac{h}{2} (1 \pm 1) - \bar{e}_1^{(+)} - 2 \sum_{m=0}^M (\pm h)^{m+1} \bar{e}_{m+2}^{(+)} \right] \times \right. \\ & \quad \times \partial_i \varepsilon_{j3}^{(+)} + \left[ -\frac{h}{2} (1 \mp 1) + \bar{e}_1^{(-)} + \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \sum_{m=0}^M (\pm h)^{m+1} \bar{e}_{m+2}^{(-)} \right] \partial_i \varepsilon_{j3}^{(-)} \right\} + 2 \sum_{i=1}^2 A_{p3i3}^{(\pm)} \varepsilon_{i3}^{(\pm)} = S_p^{(\pm)}(\mathbf{x}), \\ & \quad p = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} S_p^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv & \sigma_{p3}^{(\pm)} - b_{p3}^{(\pm)} \sigma_{33}^{(\pm)} - \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_{p3ij}^{(\pm)} \left\{ \sum_{l=1}^{M+2} (\bar{c}_{il} + 2 \sum_{m=0}^M (\pm h)^{m+1} \bar{c}_{m+2,l}) \partial_i u_j^{(l-1)} + \right. \\ & \left. + (\bar{w}_i \mp h + 2 \sum_{m=0}^M (\pm h)^{m+1} \bar{w}_{m+2}) \partial_i \partial_j w + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\bar{c}_{ml}$ ,  $\bar{w}_m$ ,  $\bar{e}_m^{(\pm)}$  – элементы матрицы  $\mathbf{C}^{-1}$  и вектор-столбцов  $\bar{\mathbf{w}}$ ,  $\bar{\mathbf{e}}^{(\pm)}$  в (16); коэффициенты  $A_{p3ij}^{(\pm)}$  и  $b_{p3}^{(\pm)}$  определены в (21).

Согласно (25) в равенствах (24) в правые части перенесены все слагаемые, содержащие уже известные из (23) производные от функций  $w$  и  $u_i^{(l)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq l \leq M + 1$ ). Кроме того, в (25) помимо (22) предполагается, что напряжения  $\sigma_{j3}^{(\pm)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) на лицевых поверхностях пластины также известны в момент времени  $t_{n+1}$ . При выборе верхних и нижних знаков « $\pm$ » и « $\mp$ » и задании  $p = 1, 2$  четыре равенства (24) при произвольной пространственной структуре армирования (т.е. при произвольных углах  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (см. рис. 2), когда  $A_{p3ij}^{(\pm)} \neq 0$ ,  $i, j, p = 1, 2$ ) образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, замкнутую относительно функций  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x})$ . Изучение вопросов, связанных с корректной постановкой краевой задачи для системы (24), выходит за рамки настоящего исследования. Отметим лишь, что в общем случае, когда необходимо интегрировать краевую задачу для этой системы, не удастся реализовать явную схему численного интегрирования рассматриваемой задачи.

В связи с вышеизложенным в дальнейшем будем исследовать лишь такие частные случаи пространственных структур армирования, при которых можно по-

строить явную численную схему типа «крест». А именно, структуру пространственного армирования предполагаем такой, что если траектория волокна  $k$ -го семейства наклонна ( $0 < \theta_k < \pi/2$  на рис. 2), то обязательно имеется  $p$ -е семейство наклонной арматуры с такими характеристиками армирования, что  $\theta_p = \pi - \theta_k$ ,  $\varphi_p = \varphi_k$ ,  $\omega_p = \omega_k$  ( $1 \leq k, p \leq K$ ,  $p \neq k$ ). Структуры с такой особенностью пространственного армирования часто используются на практике [7–11]. В частности, к ним относятся структуры армирования, изображенные на рис. 1, б и в. В случаях, когда структура пространственного армирования обладает указанной особенностью, согласно структурным соотношениям, полученным в [13] для таких КМ-сред, элементы матрицы  $\mathbf{A}$  в (4) удовлетворяют равенствам  $a_{ij} \equiv 0$ ,  $l = 4, 5$ ,  $j = \overline{1, 3}$  и  $j = 6$ . При этом из (21) с учетом (19) получаем  $A_{r3ij}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $b_{r3}^{(\pm)} \equiv 0$  ( $i, j, r = 1, 2$ ), и уравнения (24) с учетом (25) редуцируются к виду

$$2 \sum_{i=1}^2 A_{j3i3}^{(\pm)} \varepsilon_{i3}^{(\pm)} = \sigma_{j3}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G. \quad (26)$$

Из четырех равенств (26), как из системы линейных алгебраических уравнений, можно однозначно определить четыре функции  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x})$ . Затем при известных  $w$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $u_i^{(l)}$  ( $0 \leq l \leq M + 1$ ) на основании (16) при учете (17) вычисляются значения искомых функций  $u_i$  и  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq m \leq M$ ). После этого, используя формулы (1) и (7) и учитывая (6), в момент времени  $t_{n+1}$  можно определить осредненные деформации композиции пластины  $\varepsilon_{ij}$ , а затем по структурным формулам из [13] – деформации компонентов композиции. Далее на основе структурных соотношений из [13] при  $t = t_{n+1}$  согласно методу последовательных приближений [30] уточняются компоненты  $6 \times 6$ -матрицы  $\mathbf{A}$  в равенстве (4), а также коэффициенты в уравнениях (26) (см. (21)). Таким образом, в каждой точке  $\mathbf{r}$  КМ-пластины независимо от соседних точек в рассматриваемый момент времени  $t_{n+1}$  нужно организовать итерационный процесс методом последовательных приближений, который в каком-то смысле аналогичен процедуре «посадки» напряженного состояния на поверхность текучести при численном интегрировании задач упругопластического деформирования тел с использованием явной схемы типа «крест» [16]. Для начала такого итерационного процесса при  $t = t_{n+1}$  значения элементов матрицы  $\mathbf{A}$  берутся из уже известного решения исследуемой задачи в предшествующий момент времени  $t_n$ . После того как метод последовательных приближений сошелся с требуемой точностью, по описанному выше алгоритму можно по-

строить решение в следующий момент времени  $t_{n+2}$  и т.д. (Проведенные предварительные расчеты показывают, что для определения деформаций компонентов композиции с точностью до трех значащих цифр в каждый дискретный момент времени нужно делать не менее пяти итераций по методу последовательных приближений.)

В остальном численная схема типа «крест» в рассматриваемой задаче реализуется совершенно так же, как описано в [22, 23].

### 3. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретных примеров сначала исследуем динамическое изгибное поведение прямоугольных удлиненных пластин, имеющих размеры в плане  $a = 80$  см,  $b = 20$  см ( $G: |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq b/2$ ) и толщину  $2h = 2$  см. Кромки конструкций предполагаются жестко закрепленными (см. (12), (13) при  $U_{*i} \equiv 0$ ). В начальный момент времени  $t_0 = 0$  КМ-пластины покоятся (см. (14), (15) при  $U_{0i} \equiv 0, V_{0i} \equiv 0$ ). Касательные распределенные силы на лицевых поверхностях отсутствуют ( $\sigma_{j3}^{\pm} \equiv 0$ ), поэтому на основании (26) имеем  $\varepsilon_{j3}^{\pm} \equiv 0$  ( $j = 1, 2$ ). Объемными нагрузками пренебрегаем, т.е. в (9)  $X_i \equiv 0$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). Конструкции нагружаются снизу давлением, вызванным приходом воздушной взрывной волны (см. (6), (8), (9), (23)) [26]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}. \quad (28)$$

Здесь  $t_{\max}$  – момент времени, в который нагрузка  $p(t)$  достигает наибольшего значения  $p_{\max} > 0$ ;  $t_{\min}$  – момент времени, при превышении которого  $p(t)$  можно считать пренебрежимо малым по сравнению с  $p_{\max}$  (соотношение (28) соответствует случаю  $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$ ). Согласно экспериментальным данным [26] в расчетах примем  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс.

Предполагаем, что нелинейно-упругое деформирование компонентов композиции при растяжении-сжатии описывается идеализированной диаграммой с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где  $\sigma, \varepsilon$  – осевые напряжение и деформация;  $E_k, E_s^{(k)}$  – модули Юнга и линейного упрочнения материала  $k$ -го компонента композиции;  $\sigma_s^{(k)}, \varepsilon_s^{(k)}$  – напряжение и соответствующая ему деформация, при превышении которого материал ведет себя нелинейно. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции пластин приведены в таблице, где  $\nu^{(k)}$  – коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_{*s}^{(k)} = \frac{2}{3} (1 + \nu^{(k)}) \varepsilon_s^{(k)}$  – значение интенсивности деформаций, соответствующее линейной деформации  $\varepsilon_s^{(k)}$  при одноосном нагружении. Характеристики связующего условно соответствуют эпоксидной смоле [2], а арматуры – волокнам из  $L$ -стекла [1].

Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции пластин [1, 2]

Physical and mechanical characteristics of the material components of the plates composition [1, 2]

Материал	$\rho$ , кг / м <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , ГПа	$E_s$ , ГПа	$\varepsilon_{*s}$ , %
Связующее	1210	0,40	20	2,8	1,114	0,667
Армирующие волокна	4300	0,25	1500	51,0	10,851	2,451

Структуры армирования прямоугольных пластин прямолинейны и однородны:  $\omega_k = \text{const}, \theta_k = \text{const}$  и  $\varphi_k = \text{const}, 1 \leq k \leq K$  (см. рис. 2). Рассматриваются три типа структур: 1) плоское ортогональное 2D-армирование (см. рис. 1, а), когда два ( $K = 2$ ) семейства волокон укладываются параллельно срединной плоскости пластины по направлениям  $x_1, x_2$  с плотностями армирования  $\omega_1 = 0,266, \omega_2 = 0,324$ ; 2) пространственное ортогональное 3D-армирование (см. рис. 1, б), когда три ( $K = 3$ ) семейства волокон укладываются по направлениям  $x_1, x_2$  и  $x_3$  с интенсивностями  $\omega_1 = 0,235, \omega_2 = 0,324$  и  $\omega_3 = 0,031$  [7]; 3) пространственное неортогональное 4D-армирование (см. рис. 1, в), когда два первых семейства волокон укладываются по направлениям  $x_1$  и  $x_2$ , а третье и четвертое ( $k = 3, 4$ ) – по направлениям, задаваемым углами (см. рис. 2):  $\theta_3 = \pi/4, \theta_4 = 3\pi/4, \varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (на рис. 1, в следует принять  $\theta = \pi/4$ ). В последнем случае плотности армирования имеют значения:  $\omega_1 = 0,066, \omega_2 = 0,324$  и  $\omega_3 = \omega_4 = 0,1$ . Во всех указанных структурах армирования суммарный расход волокон одинаков.

На рис. 3 изображены поперечные осцилляции центральных точек прямоугольных пластин ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ), а на рис. 4 – осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций связующего материала  $\varepsilon_*^{(0)} (\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r}), |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq b/2$  и

$|x_3| \leq h$ ), определенные при  $p_{\max} = 11$  МПа (см. (27)). Кривая 1 на рис. 3 и кривые на рис. 4, *a* соответствуют плоскому ортогональному 2D-армированию пластины (см. рис. 1, *a*); кривые 2 на рис. 3 и кривые на рис. 4, *б* – пространственному ортогональному 3D-армированию (см. рис. 1, *б*); кривая 3 на рис. 3 и кривые на рис. 4, *в* – пространственному неортогональному 4D-армированию (см. рис. 1, *в*). Все кривые на рис. 3, *a* рассчитаны по

уточненной теории ( $M = 6$ ; см. (1) и (2)). Сплошная кривая 2 на рис. 3, *б* также получена по уточненной теории и является продолжением кривой 2 на рис. 3, *a*. Штриховая линия 2' на рис. 3, *б* рассчитана при тех же условиях, что и кривая 2, но по теории Редди ( $M = 0$ ). Сплошные кривые 1 на рис. 4 определены по уточненной теории, а штриховые линии 2 приведены для сравнения и рассчитаны по теории Редди.

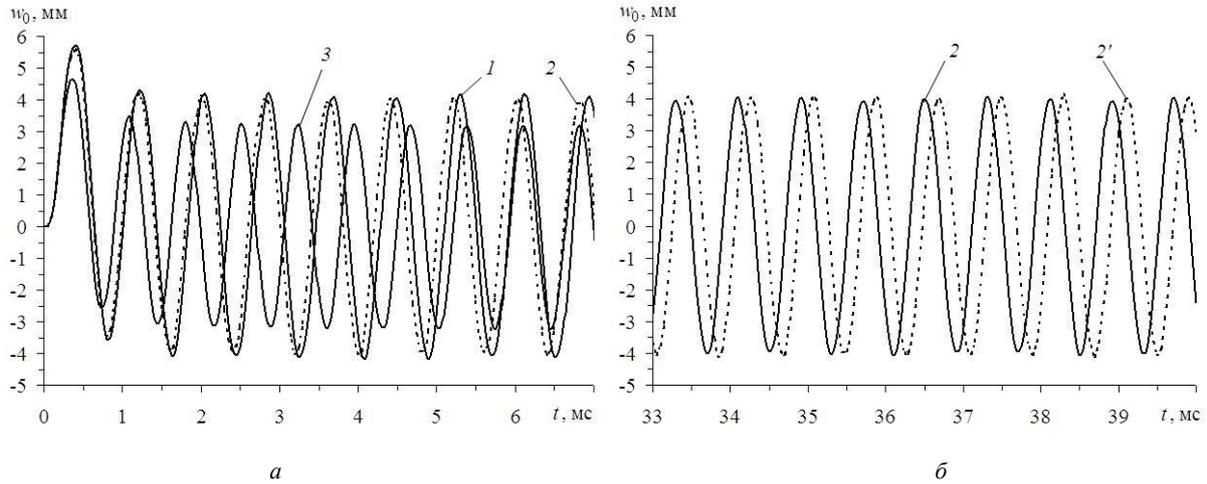


Рис. 3. Поперечные осцилляции центральной точки прямоугольной пластины, рассчитанные по уточненной теории при разных структурах армирования (*a*); по разным теориям при 3D-структуре армирования (*б*)

Fig. 3. Transverse oscillations of the center point of a rectangular plate, calculated according to a refined theory, with different structures of reinforcement (*a*); according to different theories with 3D-structure of reinforcement (*b*)

В окрестности начального момента времени ( $t < 10$  мс) зависимости  $w_0(t)$ , определенные по теории Редди, практически не отличаются от уточненного расчета, поэтому на рис. 3, *a* кривые, полученные по теории Редди, не изображены. Однако зависимости  $w_0(t)$ , рассчитанные по уточненной теории, осциллируют с несколько большей частотой, чем аналогичные зависимости, полученные по теории Редди, поэтому с увеличением расчетного интервала времени различие между зависимостями  $w_0(t)$ , определенными по теории Редди и по уточненной теории, становится значительным, о чем свидетельствует сравнение кривых на рис. 3, *б*, которые соответствуют прямоугольной КМ-пластине с 3D-армированием.

Если согласно представленным выше результатам расчетов такая интегральная характеристика движения КМ-пластины как расчетный прогиб несущественно зависит от выбора теории расчета (Редди или уточненной), то такие локальные характеристики, как расчетное деформированное состояние компонентов композиции, существенно зависит от выбора той или иной теории, о чем свидетельствует сравнение сплошных и штриховых кривых на рис. 4. Как видно из рис. 4, локальные максимумы штриховых кривых 2 (расчет по теории Редди) лежат значительно выше локальных максимумов сплошных кривых 1 (уточненная теория). Следователь-

но, традиционно используемая неклассическая теория Редди в случаях рассматриваемых структур армирования недопустимо сильно завышает расчетные значения интенсивностей деформаций в связующем материале. Сравнение ординат точек первых локальных максимумов на кривых 1 и 2 (см. рис. 4, *a* и *б*) показывает, что в случаях 2D- и 3D-структур армирования (см. рис. 1, *a* и *б*), когда КМ-пластина действительно обладает ослабленным сопротивлением поперечным сдвигам, расчеты по теории Редди почти на порядок завышают величину  $\max_{t \geq t_0} \epsilon_m^{(0)} = \max_{t \geq t_0} \epsilon_m^{(0)}(t)$  по сравнению с аналогичной величиной, полученной по уточненной теории. (Строго говоря, ординаты точек глобальных максимумов на штриховых кривых (см. рис. 4, *a* и *б*) свидетельствуют о том, что в случаях структур 2D- и 3D-армирования расчеты по теории Редди нельзя признать корректными с механической точки зрения, так как величина  $\max_{t \geq t_0} \epsilon_m^{(0)}$  при этом достигает значения порядка 20 %, т.е. деформации связующего являются достаточно большими. Используемые же в настоящем исследовании определяющие соотношения для компонентов композиции (см. (8) в [22]) справедливы лишь при достаточно малых деформациях – до 5 % [30].)

Зависимости, качественно аналогичные изображенным на рис. 4, получаются и для  $\epsilon_*^{(2)}(t)$  – интенсивности деформаций арматуры второго семейства, которая

испытывает наибольшее нагружение по сравнению с волокнами других семейств, с той лишь разницей, что значения  $\varepsilon_s^{(2)}$  примерно в 1,5 раза меньше значений ординат точек на кривых, изображенных на рис. 4. Сравнение ординат точек кривых на рис. 4 со значени-

ем  $\varepsilon_{*s}^{(0)}$ , приведенным в таблице для связующего, позволяет определить моменты времени, в которые связующий материал соответствующей КМ-пластины деформируется нелинейно-упруго согласно уточненной теории (кривые 1 на рис. 4) или теории Редди (кривые 2).

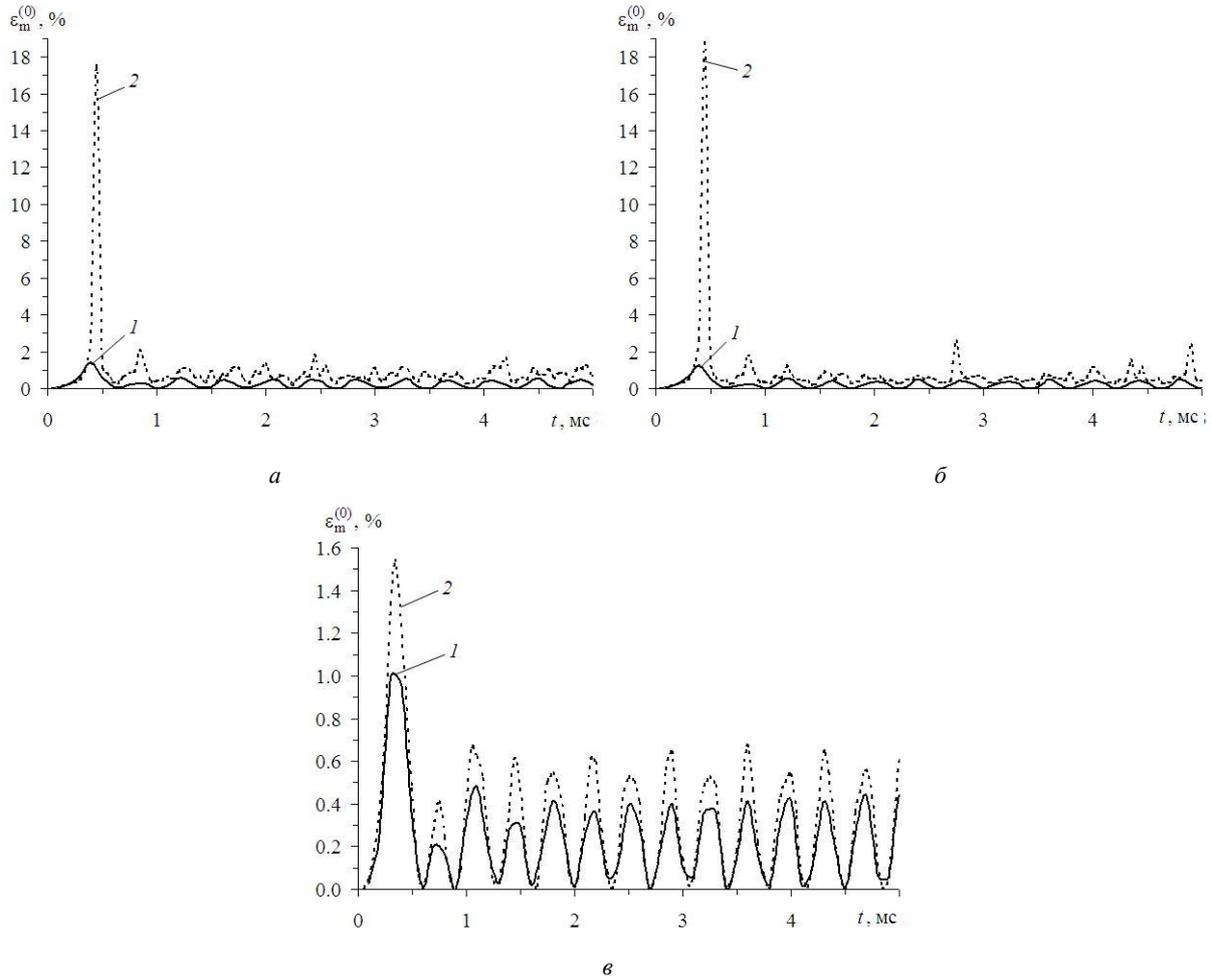


Рис. 4. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций связующего прямоугольной пластины, рассчитанная по разным теориям при структурах: 2D-армирования (а); 3D-армирования (б); 4D-армирования (в)

Fig. 4. The time dependence of the maximum value of the intensity of deformations of the connecting rectangular plate, calculated according to different theories for the structures: 2D-reinforcement (a); 3D reinforcement (b); 4D reinforcement (c)

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 3, а и кривых на рис. 4, а и б показывает, что в случае выбранных материалов компонентов композиции (см. таблицу) замена плоской ортогональной структуры 2D-армирования на пространственную ортогональную 3D-структуру практически не сказывается на уменьшении податливости рассматриваемой КМ-конструкции (рис. 3, а), но позволяет уменьшить максимальное значение интенсивности деформаций связующей матрицы  $\max \varepsilon_m^{(0)}$  на 12 % (см. глобальные максимумы кривых 1 на рис. 4, а и б). Сопоставление кривых 1 и 3 на рис. 3, а и кривых 1 на рис. 4, а и в свидетельствует о том, что замена плоской структуры 2D-армирования на пространственную структуру 4D-армирования (см. рис. 1, в) позволяет

уменьшить наибольшее значение прогиба пластины на 23,8 %, а значение величины  $\max \varepsilon_m^{(0)}$  – на 41 %.

Увеличение степени анизотропии композиции, например, за счет увеличения жесткости армирующих волокон, приводит к усилению эффекта от замены плоско-перекрестной 2D-структуры на пространственную 4D-структуру армирования. Так, при  $p_{\max} = 13$  МПа и  $E_k = 86,8$  ГПа,  $\rho_k = 2520$  кг / м<sup>3</sup>,  $1 \leq k \leq K$  (последние характеристики условно соответствуют стекловолокнам марки S-994 [1]) замена структуры 2D-армирования на пространственную 4D-структуру позволяет уменьшить максимальное расчетное значение прогиба КМ-пластины примерно на 30 %, а значение величины  $\max \varepsilon_m^{(0)}$  – почти в 4,5 раза. В случаях же слабо выра-

женной анизотропии материала КМ-пластины ( $3 \leq E_0 / E_k \leq 10$  ( $1 \leq k \leq K$ ) – металлокомпозиции) такая замена структур армирования не приводит к заметному уменьшению податливости конструкции, но все же позволяет уменьшить величину  $\max \varepsilon_m^{(0)}$  на десятки процентов.

Выше обсуждались результаты расчетов относительно толстых КМ-пластин ( $2h / \min(a, b) = 1/10$ ). Дополнительно проведенные расчеты показали, что для относительно тонких КМ-конструкций ( $2h / \min(a, b) \leq 1/20$ ) замена плоской 2D-структуры армирования на пространственные 3D- или 4D-структуры (при сохранении общего расхода волокон), как правило, не приводит к уменьшению податливости КМ-пластины и максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиции.

Исследуем теперь поведение более сложных конструкций. Рассмотрим кольцевые пластины толщиной  $2h = 5$  см, ограниченные кромками радиусов  $r_0 = 10$  см и  $r_1 = 60$  см, которые жестко закреплены по внешней кромке  $x_1 = r_1$  (см. (12), (13) при  $U_{*i} \equiv 0$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ) и контактируют с абсолютно жесткой шайбой по внутренней кромке  $x_1 = r_0$  (здесь и далее  $x_1, x_2$  – полярные радиус и угол соответственно).

Уравнение движения жесткой шайбы при учете (27) имеет вид [23]

$$M_0 \ddot{w}_0 = \pi r_0^2 p(t) + 2\pi r_0 M_{13}^{(0)}(t, x_1) \Big|_{x_1=r_0}, \quad t \geq t_0,$$

где  $w_0$  – осевое смещение шайбы как жесткого целого;  $M_0$  – масса шайбы;  $M_{13}^{(0)}$  – поперечная сила, определенная в (9). Условия сопряжения пластины с шайбой характеризуются равенствами [23]

$$w_0(t) = w \Big|_{x_1=r_0}, \quad u_i^{(l)} \Big|_{x_1=r_0} = 0, \\ i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad t \geq t_0.$$

Предполагаем, что кольцевая пластина имеет осесимметричную плоскую ортогональную 2D-структуру армирования, когда одно семейство волокон укладывается в радиальном, а второе – в окружном направлениях (см. рис. 1, а), или пространственную 4D-структуру армирования. В последнем случае два первых семейства волокон укладываются в радиальном и окружном направлениях, а третье и четвертое семейства – наклонно в радиальных сечениях (как изображено на рис. 1, в при  $\theta = \pi/4$ , где, в отличие от предыдущего, под  $x_2$  следует понимать радиальное направление, а под  $x_1$  – окружное). Материалы компонентов композиции имеют те же характеристики, что указаны в таблице.

В силу постоянства сечений волокон [1] в осесимметричном случае плотности армирования  $\omega_k$  тех се-

мейств волокон, которые укладываются в плоскостях радиальных сечений пластины, вычисляются по формулам [23]

$$\omega_k(x_1) = r_0 \omega_{0k} / x_1, \quad \omega_{0k} \equiv \omega_k(r_0), \\ r_0 \leq x_1 \leq r_1, \quad k = 1, 3, 4, \quad (29)$$

где  $\omega_{0k}$  – интенсивность армирования волокнами  $k$ -го семейства, заданная на внутренней кромке  $x_1 = r_0$ . В случае 2D-структуры армирования для радиального семейства волокон примем  $\omega_{01} = 0,6$ , а при структуре 4D-армирования для радиального семейства волокон  $\omega_{01} = 0,3$  и для наклонных семейств волокон  $\omega_{03} = \omega_{04} = 0,15$ , т.е. по-прежнему  $\omega_{01} + \omega_{03} + \omega_{04} = 0,6$ .

Согласно последней формуле плотности армирования  $\omega_k$  ( $k = 1, 3, 4$ ) волокнами радиального и наклонных семейств монотонно убывают от внутренней кромки к внешней. При окружной же укладке волокон интенсивность армирования  $\omega_2(x_1)$  может быть произвольной функцией полярного радиуса  $x_1$  [23], поэтому зададим  $\omega_2(x_1)$  так, чтобы суммарная плотность армирования при обеих рассматриваемых структурах армирования была фиксирована:  $\sum_{k=1}^K \omega_k = 0,6$  ( $K = 2, 4$ ).

Для шайбы примем  $\bar{\rho} = 2710$  кг/м<sup>3</sup>, что условно соответствует алюминиевому сплаву [1], а толщину шайбы зададим вдвое больше толщины пластины. По этим данным можно вычислить массу шайбы  $M_0$ .

Так как структура армирования, форма конструкции, ее закрепление и нагружение обладают осевой симметрией, то и решение соответствующей динамической задачи является осесимметричным.

На рис. 5 изображены осцилляции жестких шайб, рассчитанные по уточненным теориям ( $M = 6$ ) в случае  $p_{\max} = 12$  МПа при 4D-структуре (кривая 1) и 2D-структуре (кривая 2) армирования кольцевых пластин. На рис. 6 изображены зависимости  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ , причем кривые 1 и 2 определены при тех же условиях, что и на рис. 5, а кривая 1' приведена для сравнения и получена по теории Редди ( $M = 0$ ) в случае 4D-структуры армирования пластины.

Сравнение кривых на рис. 5 показывает, что даже в случае относительно толстой ( $2h / (r_1 - r_0) = 1/10$ ) кольцевой пластины с неоднородными структурами армирования замена плоской 2D-структуры на пространственную 4D-структуру не приводит к уменьшению податливости такой конструкции в поперечном направлении. Объясняется это, по-видимому, тем, что согласно (29) плотности армирования наклонными семействами волокон на внешнем жестко закрепленном контуре малы ( $\omega_3(r_1) = \omega_4(r_1) = 0,15 / 6 = 0,025$ ), поэто-

му арматура не оказывает значительного сопротивления поперечным сдвигам, развивающимся в окрестности внешней кромки.

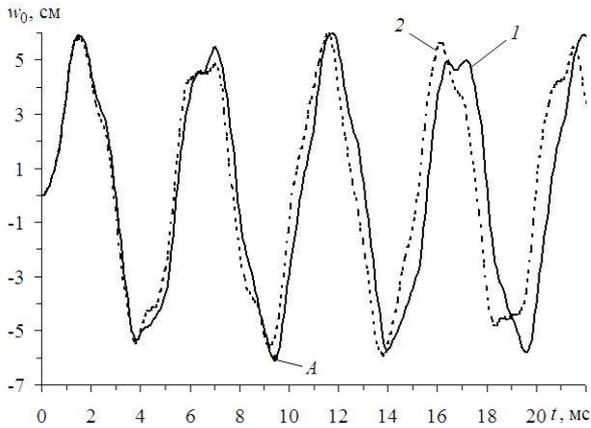


Рис. 5. Осцилляции шайбы, рассчитанные по уточненной теории при 2D- и 4D-структурах армирования кольцевой пластины

Fig. 5. Rigid insertion oscillations calculated by the refined theory with 2D- and 4D-structures for reinforcement of a ring plate

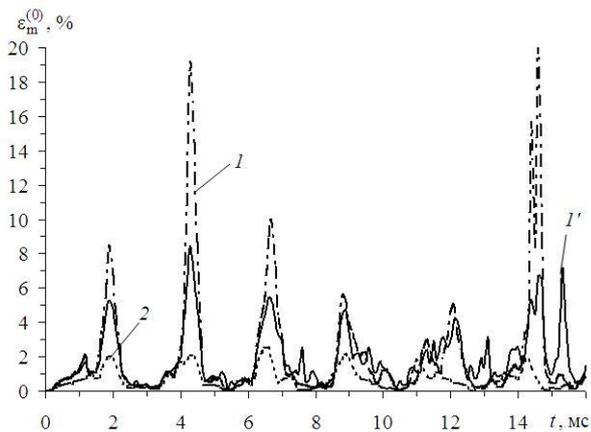


Рис. 6. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций связующего, рассчитанная по разным теориям при 2D- и 4D-структурах армирования кольцевой пластины

Fig. 6. The time dependence of the maximum value of the intensity of deformation of the binder, calculated according to different theories for 2D and 4D structures of reinforcement of the annular plate

Отметим, что наибольшее по модулю перемещение шайбы соответствует точке *A* на кривой *1* (4D-армирование пластины), причем это смещение по направлению обратно действию внешней нагрузки (27) и достигается в момент времени  $t \approx 9,5$  мс, т.е. много позже момента времени прекращения воздействия нагрузки ( $t \approx t_{\min} = 2$  мс). Последнее обстоятельство является следствием геометрической и физической нелинейности задачи, а также сложных волновых процессов, протекающих в КМ-конструкции [15]. (Зависимости  $w_0(t)$ , рассчитанные по теории Редди, визуально практически

не отличаются от кривых, приведенных на рис. 5, поэтому не изображены.)

Сопоставление кривых *1* и *2* на рис. 6 свидетельствует о том, что в кольцевой пластине с шайбой наибольшие значения интенсивности деформаций связующего в конструкции с 2D-структурой почти на порядок меньше аналогичных величин в конструкции с 4D-структурой армирования. Сравнение же кривых *1* и *1'* на рис. 6 показывает, что, в отличие от рис. 4, в, для кольцевой пластины с 4D-структурой армирования расчет по теории Редди (кривая *1'*) значительно занижает значения  $\max \varepsilon_m^{(0)}$  по сравнению с расчетом по уточненной теории. Следовательно, теория Редди может предсказывать как завышенные, так и заниженные значения интенсивности деформаций компонентов КМ-пластин с пространственными структурами армирования по сравнению с расчетами, выполненными в рамках уточненной теории.

## Заключение

Проведенный анализ изгибного динамического деформирования прямоугольных пластин с однородными плоскими и пространственными структурами армирования продемонстрировал, что в случаях относительно толстых КМ-конструкций (с относительной толщиной 1/10 и более), изготовленных из нелинейно-упругих материалов и обладающих слабо выраженной анизотропией композиции, замена плоской структуры на пространственную структуру армирования при сохранении общего расхода волокон приводит не столько к уменьшению податливости КМ-пластины в поперечном направлении, сколько к снижению интенсивности деформаций компонентов композиции (на несколько десятков процентов). При наличии сильно выраженной анизотропии композиции такой конструкции замена плоской структуры армирования на пространственную структуру в относительно толстой прямоугольной пластине позволяет уменьшить максимальный ее прогиб на десятки процентов, а величину интенсивности деформаций связующего материала в разы. В относительно тонких КМ-пластинах (с относительной толщиной 1/20 и менее) эффект уменьшения податливости конструкции в поперечном направлении при такой замене структуры армирования не наблюдается.

В кольцевых пластинах с жесткой внутренней шайбой, имеющих неоднородные структуры армирования, даже при относительно большой толщине КМ-конструкции замена плоскоперекрестной структуры армирования на пространственную структуру с сохранением расхода волокон может оказаться неэффективной. Поэтому вопрос о целесообразности замены плоской структуры армирования в КМ-пластинах из нелинейно-упругих материалов на более сложную пространственную структуру армирования должен рассматриваться самостоятельно в каждом конкретном случае.

Кроме того, проведенные расчеты показали, что при изучении динамики гибких КМ-пластин из нелинейно-упругих материалов применение традиционной неклассической теории Редди приводит к значительным расхождениям с решениями, построенными по уточненным теориям, особенно при определении деформированного состояния компонентов композиции. Теория Редди может как неоправданно сильно (в разы) завышать, так и занижать значения интенсивности деформаций компонентов композиции по сравнению с уточненными расчетами. Следовательно, для получения адекватных результатов расчетов динамического поведения КМ-пластин с пространственными структурами армирования необходимо использовать уточненные теории, например, предложенные в данной работе.

## Библиографический список

1. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
2. Справочник по композитным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
3. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*. – 2001. – Part A 32. – P. 901–910. DOI: 10.1016/S1359-835X(01)00008-2
4. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / A.P. Mouritz, E. Gellert, P. Burchill, K. Challis // *Compos. Struct.* – 2001. – Vol. 53. – No. 1. – P. 21–42. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00175-6
5. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 3<sup>rd</sup> ed. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. – 686 p.
6. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers of Mechanical Eng.* – 2013. – Vol. 8. – No. 2. – P. 187–200. DOI: 10.1007/s11465-013-0262-x
7. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение / И.Г. Жигун, М.И. Душин, В.А. Поляков, В.А. Якушин // *Механика полимеров*. – 1973. – № 6. – С. 1011–1018.
8. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
9. A new generation of 3D woven fabric performs and composites / M.H. Mohamed, A.E. Bogdanovich, L.C. Dickinson, J.N. Singletary, R.R. Lienhart // *SAMPE J.* – 2001. – Vol. 37. – No. 3. – P. 3–17.
10. Измерение и моделирование теплопроводности трехмерных тканых композитов / Й. Шустер, Д. Гейдер, К. Шарп, М. Глования // *Механика композитных материалов*. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 241–254. DOI: 10.1007/s11029-009-9072-y
11. Тарнопольский Ю.М., Поляков В.А., Жигун И.Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // *Механика полимеров*. – 1973. – № 5. – С. 853–860.
12. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // *Механика композитных материалов*. – 1982. – № 1. – С. 14–22.
13. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при

## Благодарность

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

## Acknowledgment

The work was carried out within the framework of the Program of Basic Scientific Research of the State Academies of Sciences for 2017–2020 (Project 23.4.1 – Mechanics of deformation and fracture of materials, media under mechanical loads, the effects of physical fields and chemically active media).

- общей анизотропии материалов компонент композиции.
1. Структурная модель // *Механика композитных материалов*. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 663–678.
  14. Reissner E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plate // *J. Appl. Mech.* – 1945. – Vol. 12. – No. 2. – P. 69–77.
  15. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
  16. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 400 с.
  17. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 336 с.
  18. Reddy J.N. Energy and variational methods in applied mechanics. – N.Y.: John Wiley, 1984. – 545 p.
  19. Reddy J.N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation // *Int. J. of Solids and Structures*. – 1984. – Vol. 20. – No. 9. – P. 881–896.
  20. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
  21. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
  22. Янковский А.П. Моделирование динамики армированных пологих оболочек из нелинейно-упругих материалов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2017. – № 2. – С. 226–245. DOI: 10.15593/pern.mech/2017.2.13
  23. Янковский А.П. Построение уточненной модели динамического поведения гибких армированных пластин из нелинейно-упругих материалов на основе явной численной схемы типа «крест» // *Математичні методи та фізико-механічні поля*. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 43–61.
  24. Whitney J., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. of Sound and Vibration*. – 1973. – Vol. 30. – No. 1. – P. 85–97.
  25. Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M. A higher-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* – 1977. – Vol. 44. – P. 669–676.
  26. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers & Structures*. – 1987. – Vol. 26. – No. 1/2. – P. 1–15.

27. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.
28. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading // *Composites*. – 2004. – Part B 35. – P. 673–683.

## References

1. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.*
2. Lubin G. *Handbook of composites. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.*
3. Bannister, M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Composites*, 2001, part A 32, pp. 901-910. DOI: 10.1016/S1359-835X(01)00008-2
4. Mouritz, A.P., Gellert, E., Burchill, P., Challis, K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21-42. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00175-6
5. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics / 3<sup>rd</sup> ed. Boca Raton. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012, 686 p.*
6. Gill, S.K., Gupta, M., Satsangi, P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Frontiers of Mechanical Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187-200. DOI: 10.1007/s11465-013-0262-x
7. Zhigun, I.G., Dushin, M.I., Poliakov, V.A., Yakushin, V.A. *Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoi priamykh vzaimno ortogonal'nykh volokon. 2. Eksperimental'noe izuchenie [Composite materials reinforced with a system of straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study]. Mekhanika polimerov*, 1973, no. 6, pp. 1011-1018.
8. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 p.*
9. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites. *SAMPE J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3-17.
10. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mechanics of Composite Materials*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241-254. DOI: 10.1007/s11029-009-9072-y
11. Tarnopol'skii, Yu.M., Zhigun, I.G., Poliakov, V.A. *Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoi priamykh vzaimno ortogonal'nykh volokon. 1. Raschet uprugikh kharakteristik [Composite materials reinforced with a system of straight mutually orthogonal fibers. 1. Calculation of elastic characteristics]. Mekhanika polimerov*, 1973, no. 5, pp. 853-860.
12. Kregers, A.F., Teters, G.A. *Strukturnaya model' deformirovaniya anizotropnykh, prostranstvenno armirovannykh kompozitov [Structural model of deformation of anisotropic, spatially reinforced composites]. Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1982, no. 1, pp. 14-22.
13. Yankovskii, A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mechanics of Composite materials*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451-460.
14. Reissner, E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plate. *J. Appl. Mech.*, 1945, vol. 12, no. 2, pp. 69-77.
15. Bogdanovich A.E., *Nelineinye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.*
16. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhniy Novgorod, Publ Nizhniy Novgorod State University, 2002, 400 p.*
17. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineinoe deformirovaniye i ustoychivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]. Moscow, Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012, 336 p.*
18. Reddy J.N. *Energy and variational methods in applied mechanics. New York, John Wiley, 1984, 545 p.*
19. Reddy, J.N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, no. 9, pp. 881-896.
20. Ambarcumian S.A. *Teoria anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebania [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. Moscow, Nauka, 1987, 360 p.*
21. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotoryye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. Saarbrücken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.*
22. Yankovskii, A.P. Modeling the dynamics of reinforced shallow shells made of nonlinear elastic materials. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 2, pp. 226-245. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.13
23. Yankovskii, A.P. *Postroenie utochnennoj modeli dinamicheskogo povedeniya gibkikh armirovannykh plastin iz nelineino-uprugikh materialov na osnove yavnoi chislennoi skhemy tipa "krest" [Refined modeling of the dynamic behavior of flexible reinforced plates of nonlinear elastic materials on the basis of an explicit numerical "cross" scheme]. Matematicheskiy metodi ta fiziko-mekhanicheskiy polia, 2017, vol. 60, no. 1, pp. 43-61.*
24. Whitney, J., Sun, C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *J. of Sound and Vibration*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85-97.
25. Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M. A higher-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, pp. 669-676.
26. Houlston, R., DesRochers, C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1-15.
27. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. *Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000, 707 p.*
28. Librescu, L., Oh, S.-Y., Hohe, J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading. *Composites*, 2004, part B 35, pp. 673-683.
29. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 807-817.
30. Il'yushin A.A. *Trudy. Tom 3. Teoriya termov'yazkouprugosti [Works. Vol. 3. The theory of thermo-visco-elastic]. Compilers: E.A. Il'yushina, V.G. Tunguskova. Moscow, Fizmatlit, 2007, 288 p.*