



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.03

УДК 539.3

ОЦЕНКА УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ МНОГООСНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СДВИГОМ ФАЗ

Н.Г. Бураго¹, И.С. Никитин², А.Д. Никитин², Б.А. Стратула²

¹Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

²Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 апреля 2019 г.
Принята: 14 августа 2019 г.
Опубликована: 17 октября 2019 г.

Ключевые слова:

циклическое нагружение, усталостное разрушение, критерий для многоосного напряженного состояния, критическая плоскость, малоцикловая усталость, многоцикловая усталость, долговечность элемента конструкции.

АННОТАЦИЯ

Опыт эксплуатации разнообразных элементов конструкций показывает, что условия циклического нагружения и виды напряженного состояния зачастую отличаются от условий лабораторных испытаний, таких как одноосное растяжение-сжатие, изгиб или кручение. Как правило, в эксплуатации конструкционные элементы подвержены сложным (многоосным) напряженным состояниям, поэтому для оценки долговечности реальных элементов необходимо использовать многоосные усталостные критерии.

Современные многоосные критерии позволяют оценить количество циклов до разрушения образца или конструкционного элемента (усталостная долговечность) с учетом ориентации так называемой критической плоскости развития усталостных повреждений.

Получены аналитические решения для определения ориентации критической плоскости при циклическом нагружении с использованием современного усталостного критерия для многоосных напряженных состояний. Рассмотрено циклическое нагружение с произвольным сдвигом фаз для классического диапазона усталости (малоцикловая и многоцикловая усталость). Исследованы случаи трехосного циклического нагружения «растяжение-сжатие» и циклического нагружения, часто используемого при усталостных испытаниях, «кручение с изгибом». Показано, что при определенных значениях сдвига фаз усталостная долговечность может принимать очень низкие значения даже в тех случаях, когда синфазное нагружение вообще не приводит к усталостному разрушению. Проведено сравнение исследуемого критерия с экспериментальными данными и численными расчетами, выполненными с использованием иного критерия.

Рассмотрен диск компрессора низкого давления газотурбинного двигателя, подверженный циклическому воздействию центробежных нагрузок. Путем распределения напряжений, рассчитанного приближенным численно-аналитическим методом, а также распределения напряжений, рассчитанного методом конечных элементов, определены зоны наибольшей концентрации напряжений, ориентация критической плоскости в зонах концентрации и на этой основе оценена долговечность эксплуатации такого диска с использованием многоосного критерия усталостного разрушения.

© ПНИПУ

© Бураго Николай Георгиевич – д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: burago@ipmnet.ru, iD: 0000-0002-1806-9386

Никитин Илья Степанович – д.ф.-м.н., дир., e-mail: i_nikitin@list.ru, iD: 0000-0003-3499-6910

Никитин Александр Дмитриевич – к.т.н., н.с., e-mail: nikitin_alex@bk.ru, iD: 0000-0002-2916-758X

Стратула Борис Андреевич – м.н.с., e-mail: stratula@matway.net, iD: 0000-0001-8916-5263

Nikolay G. Burago – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher,

e-mail: burago@ipmnet.ru, iD: 0000-0002-1806-9386

Ilya S. Nikitin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director, e-mail: i_nikitin@list.ru, iD: 0000-0003-3499-6910

Aleksandr D. Nikitin – CSc in Technical Sciences, Researcher, e-mail: nikitin_alex@bk.ru, iD: 0000-0002-2916-758X

Boris A. Stratula – Junior Researcher, e-mail: stratula@matway.net, iD: 0000-0001-8916-5263



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



THE ASSESSMENT OF FATIGUE DURABILITY AND CRITICAL PLANE DETERMINATION FOR MULTIAXIAL CYCLIC LOADING AT AN ARBITRARY SHIFT OF PHASES

N.G. Burago¹, I.S. Nikitin², A.D. Nikitin², B.A. Stratula²

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 April 2019
Accepted: 14 August 2019
Published: 17 October 2019

Keywords:

cyclic loading, fatigue failure, criterion for multiaxial stress state, critical plane, low-cycle fatigue, multicycle fatigue, durability of the structural element.

ABSTRACT

The real experience of different structural elements shows that cyclic loading conditions and stress strain state are often quite different from laboratory test conditions such as axial tension-compression, bending or pure torsion. As a rule, the structural elements are subjected to complex (multiaxial) loading conditions during service, that is why multiaxial fatigue criteria should be used for durability estimation of such elements.

A present multiaxial criterion allows us to estimate the number of cycles to fracture for specimens or structural element (fatigue life) with an influence of the orientation of the so-call critical plane of fatigue damage accumulation.

Analytical solutions were obtained for the present fatigue criterion to determine the orientation of the critical plane of the fatigue damage development under cyclic loading for multiaxial stress states. Cyclic loading with arbitrary shifts of phases for the classical fatigue range (low-cycle and high-cycle fatigue) was considered. Several common cases of the three dimensional cyclic loading, i.e. tension-compression and bending-torsion, are studied. It is shown that at certain values of phase shifts the fatigue durability can be very low even under stress amplitudes that do not lead to fracture in the case of sine phase loading. The comparison with the experimental data and numerical calculations based on the other criterion is made.

A disc of a low-pressure stage of a gas-turbine engine subjected to cyclic loading due to centrifugal forces was considered. By using a simplified stress distribution, as well as a stress distribution calculated by the finite element method, the areas of stress concentration and orientation of the critical plane in these zones are determine and the durability of the disk operating was estimated.

© PNRPU

Введение

Опыт эксплуатации разнообразных конструктивных элементов показывает, что условия циклического нагружения и виды напряженного состояния зачастую отличаются от условий лабораторных испытаний, таких

как одноосное растяжение-сжатие, изгиб или кручение. Как правило, в эксплуатации конструкционные элементы подвержены сложным (многоосным) напряженным состояниям, поэтому для оценки долговечности реальных элементов необходимо использовать многоосные усталостные критерии.

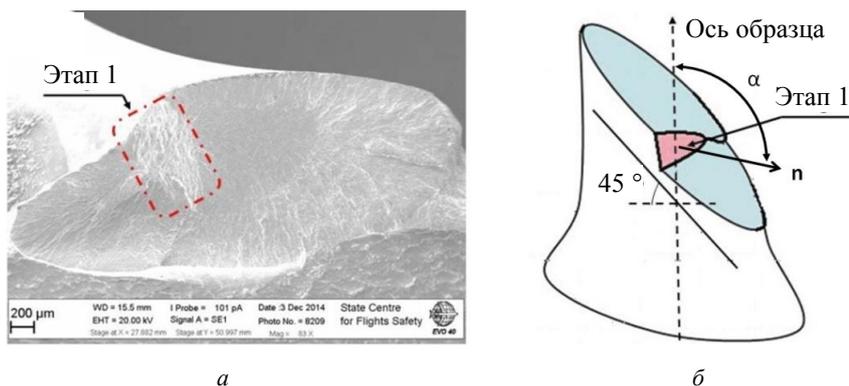


Рис. 1. Поверхность излома в титановом (BT3-1) образце с критической плоскостью: *a* – изображение, полученное с помощью сканирующего электронного микроскопа [23]; *б* – схематическое изображение поверхности излома с критической плоскостью

Fig. 1. The fracture surface in a titanium (BT3-1) specimen with a critical plane (*a*) an image obtained using the scanning electron microscope [23]; (*b*) a schematic image of the fracture surface with a critical plane

Для оценки усталостной долговечности элементов конструкций существуют различные модели и критерии усталостного разрушения с учетом многоосного напря-

женного состояния [1–7]. Современные многоосные усталостные критерии позволяют оценить количество циклов N до разрушения образца или конструкционного

элемента (усталостная долговечность) с учетом ориентации так называемой критической плоскости развития усталостных повреждений [8–17]. Такую площадку (элемент критической плоскости) можно наблюдать при фрактографическом исследовании поверхностей изломов разрушенных при циклических испытаниях образцов в зоне зарождения усталостной микротрещины (рис. 1). В данной работе предлагается процедура определения ориентации критической плоскости и, следовательно, усталостной долговечности образца, подверженного многоосному циклическому нагружению с произвольным сдвигом фаз для двух классических диапазонов усталости – малоциклового (МЦУ) и многоциклового (МНЦУ). Предлагаемая процедура основана на хорошо апробированном критерии [9, 18]. Отметим, что ранее в [22] была предпринята попытка определения ориентации критической плоскости для критерия [8], в котором при определении ее ориентации кроме размаха касательных напряжений дополнительно учитывается величина нормального к ней напряжения. В силу этого обстоятельства попытка удалась только для случая синфазного и противофазного циклического нагружения. Можно ожидать, что предложенная в настоящей работе методика позволит аналитически исследовать иные критерии, в формулировке которых с критической плоскостью связаны только касательные напряжения и не участвуют нормальные.

1. Усталостный критерий с определением критической плоскости

Рассмотрим частицу, подверженную многоосному напряженному состоянию, которое описывается тензором напряжений $\sigma(t)$, который зависит от времени. Выберем систему координат, связанную с главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Выберем площадку, ориентированную единичной нормалью \mathbf{n} . Для определения долговечности одноосного циклического нагружения образца вплоть до его усталостного разрушения существует соотношение Баскина [19], которое аналитически представляет усталостную кривую при различных коэффициентах асимметрии цикла (левая ветвь бимодальной усталостной кривой [20]):

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_c N^\beta.$$

Выберем для анализа хорошо апробированный критерий многоосного усталостного разрушения, учитывающий ориентацию критической плоскости развития повреждений [9]. Этот критерий, обобщающий (как и многие другие критерии многоосного усталостного разрушения) соотношение Баскина для одноосного нагружения, выглядит следующим образом:

$$\max_{\mathbf{n}} T_a + \alpha_\infty \sigma_{H,\max} = S_0 + AN^\beta,$$

где коэффициенты S_0, A, α_∞ и β определяются из одноосных усталостных испытаний на растяжение-сжатие с двумя разными коэффициентами асимметрии $R = 0$ и $R = -1$ [21]; N – количество циклов до разрушения. Величина $\max_{\mathbf{n}} T_a$ есть максимальное значение размаха сдвигового напряжения за цикл нагружения среди всех возможных плоскостей с нормальным вектором \mathbf{n} , проходящих через рассматриваемую частицу. Выражение для величины T_a имеет следующий вид:

$$T_a^2(\mathbf{n}) = \int_0^{2\pi} \tau_a^2(\mathbf{n}, \chi) d\chi / \pi,$$

$$\tau_a(\mathbf{n}, \chi) = \left[\max_{t \in P} \tau(\mathbf{n}, \chi, t) - \min_{t \in P} \tau(\mathbf{n}, \chi, t) \right].$$

Величина $\sigma_{H,\max}$ – эквивалентное пиковое гидростатическое напряжение в рассматриваемой частице за цикл нагружения:

$$\sigma_{H,\max} = \max_{t \in P} \sigma_{kk}(t) / 3.$$

Сдвиговое напряжение на заданной плоскости определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Выражение для размаха сдвигового напряжения, как следует из [22], можно привести к виду

$$T_a^2(\mathbf{n}) = |\Delta\boldsymbol{\tau}|^2 = (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2.$$

2. Частные случаи напряженного состояния

2.1. Трехосное нагружение «растяжение-сжатие»

Выберем гармонический закон изменения главных напряжений в цикле с учетом произвольного сдвига фаз. Запишем главные напряжения следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma_{1m} + \sigma_{1a} \cos \omega t,$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2m} + \sigma_{2a} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$\sigma_3 = \sigma_{3m} + \sigma_{3a} \cos(\omega t + \varphi_3),$$

где ω – частота нагружения; φ_2 и φ_3 – произвольные сдвиги фаз; σ_{1m}, σ_{2m} и σ_{3m} – средние значения, а σ_{1a}, σ_{2a} и σ_{3a} – амплитуды компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Размах главных компонент тензора напряжений за цикл нагружения можно записать в виде

$$\Delta\sigma_1 = \sigma_{1a} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2),$$

$$\Delta\sigma_2 = \sigma_{2a} (\cos(\omega t_1 + \varphi_2) - \cos(\omega t_2 + \varphi_2)),$$

$$\Delta\sigma_3 = \sigma_{3a} (\cos(\omega t_1 + \varphi_3) - \cos(\omega t_2 + \varphi_3)),$$

где моменты времени t_1 и t_2 определяются из условия максимума по времени размаха касательного напряжения на площадке с нормалью \mathbf{n} ; $t_1, t_2 \in [0, T]$, $T = 2\pi/\omega$.

Кратко величину сдвигового напряжения можно записать как

$$\Delta\tau^2 = 4 \left[A_{12}^2 \sin^2(\omega\xi - \psi_{12}) n_1^2 n_2^2 + A_{13}^2 \sin^2(\omega\xi - \psi_{13}) n_1^2 n_3^2 + A_{23}^2 \sin^2(\omega\xi - \psi_{23}) n_2^2 n_3^2 \right],$$

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \xi, \quad A_{12}^2 = \Delta\sigma_{12}^2 + \theta_{2a}^2, \quad A_{13}^2 = \Delta\sigma_{13}^2 + \theta_{3a}^2,$$

$$A_{23}^2 = \Delta\sigma_{23}^2 + \Delta\theta_{23}^2,$$

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega} = t_1 + T/2, \quad \psi_{12} = \arctg \frac{\theta_{2a}}{\Delta\sigma_{12}},$$

$$\psi_{13} = \arctg \frac{\theta_{3a}}{\Delta\sigma_{13}}, \quad \psi_{23} = -\arctg \frac{\Delta\theta_{23}}{\Delta\sigma_{23}}$$

со следующими дополнительными обозначениями:

$$\Delta\sigma_{12} = \sigma_{1a} - \sigma_{2a} \cos \varphi_2, \quad \Delta\sigma_{13} = \sigma_{1a} - \sigma_{3a} \cos \varphi_3,$$

$$\Delta\sigma_{23} = \sigma_{2a} \cos \varphi_2 - \sigma_{3a} \cos \varphi_3,$$

$$\theta_{2a} = \sigma_{2a} \sin \varphi_2, \quad \theta_{3a} = \sigma_{3a} \sin \varphi_3,$$

$$\Delta\theta_{23} = \sigma_{2a} \sin \varphi_2 - \sigma_{3a} \sin \varphi_3,$$

$$A_S = A_{12}^2 \sin 2\psi_{12} n_1^2 n_2^2 + A_{13}^2 \sin 2\psi_{13} n_1^2 n_3^2 + A_{23}^2 \sin 2\psi_{23} n_2^2 n_3^2,$$

$$A_C = A_{12}^2 \cos 2\psi_{12} n_1^2 n_2^2 + A_{13}^2 \cos 2\psi_{13} n_1^2 n_3^2 + A_{23}^2 \cos 2\psi_{23} n_2^2 n_3^2.$$

Моменты времени, для которых достигаются экстремальные значения размаха касательных напряжений внутри цикла при произвольном \mathbf{n} определяются так:

$$t_1 = \frac{T}{4} \left(\frac{\arctg(A_S / A_C)}{\pi} + k - 1 \right),$$

$$t_2 = \frac{T}{4} \left(\frac{\arctg(A_S / A_C)}{\pi} + k + 1 \right),$$

$$\omega\xi_0 = \frac{\arctg(A_S / A_C)}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Далее, из условия экстремума функции $\Delta\tau^2(x_i)$, $i = 1, 2, 3$, при ограничении $\sum x_k = 1$ для моментов времени t_1 и t_2 определяются компоненты вектора нормали $x_i = n_i^2$, $0 < x_i < 1$:

$$x_1 = (2b_1b_2 - b_2b_{12}) / (4b_1b_2 - b_{12}^2),$$

$$x_2 = (2b_1b_2 - b_1b_{12}) / (4b_1b_2 - b_{12}^2), \quad x_3 = 1 - x_1 - x_2,$$

$$b_1 = A_{13}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{13}), \quad b_2 = A_{23}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{23}),$$

$$b_{12} = A_{13}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{13}) + A_{23}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{23}) - A_{12}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{12}).$$

Отбор компонент x_i , соответствующих максимальным и минимальным значениям размаха касательных напряжений, проводился явным образом, так как отделить их путем исследования квадратичной формы вторых производных в данном случае не удастся, в отличие от случая синфазного и антифазного нагружения [22]. Если функция $\Delta\tau^2(x_i)$ не имеет максимума внутри области $0 < x_i < 1$, то с помощью упрощенного анализа определяются значения компонент x_i , соответствующие экстремумам $\Delta\tau^2(x_i)$ на границах этой области:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = x_3 = 0,5, \quad \text{либо} \quad x_2 = 0, \quad x_1 = x_3 = 0,5,$$

$$\text{либо} \quad x_3 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0,5.$$

После вычисления функции $\Delta\tau^2(x_i)$ при найденных значениях x_i выбирается тот случай из найденных экстремумов, где эта функция имеет максимальное значение.

Аналогичным образом получается выражение для определения момента времени, когда эквивалентное гидростатическое напряжение $\alpha_\infty \sigma_{H, \max}$ максимально.

С учетом полученных значений t_1 , t_2 и компонент нормали $x_i = n_i^2$ из критерия многоосного усталостного разрушения можно определить количество циклов N для произвольных величин амплитуд напряжений при циклическом нагружении в зависимости от сдвига фаз. Проведенные расчеты показывают значительное влияние сдвига фаз на усталостную долговечность, что видно на рис. 2, где показана зависимость $N(\varphi_2, \varphi_3)$ для конкретных значений амплитуд главных напряжений. Так, например, на рис. 2, а приведены результаты для гидростатического напряженного состояния, которое без сдвига фаз вообще не должно приводить к усталостному разрушению в связи с отсутствием касательных напряжений на любой площадке.

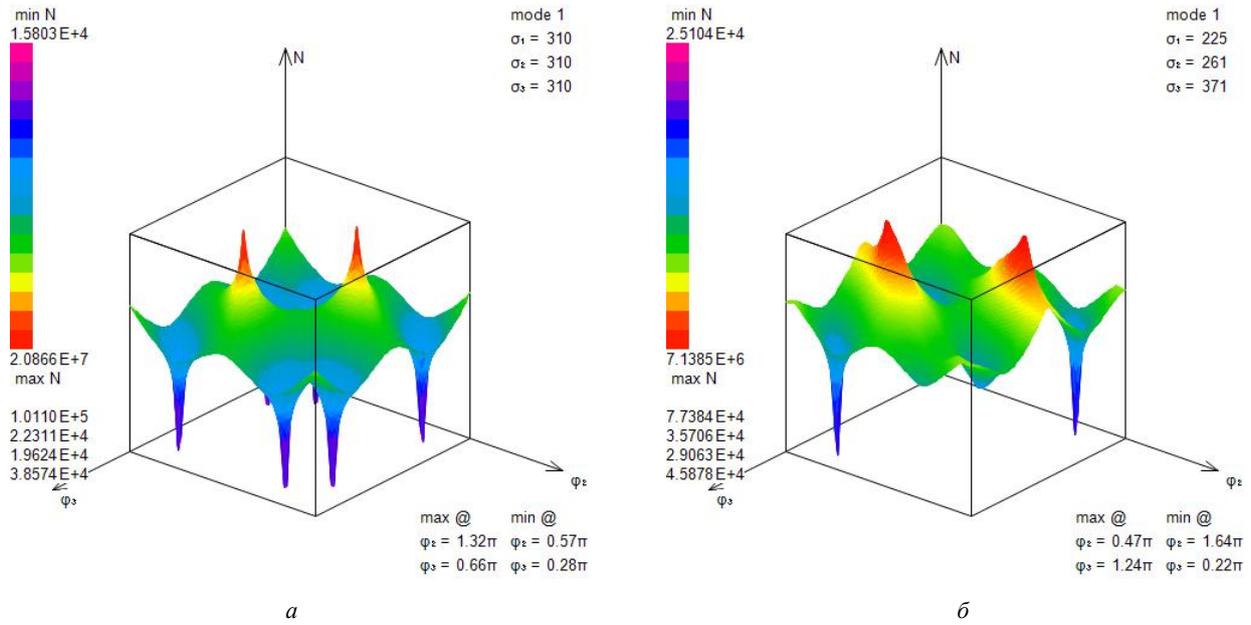


Рис. 2. Усталостная долговечность, представленная в виде количества циклов N , как функция от сдвигов фаз φ_2 и φ_3

Fig. 2. Fatigue life in terms of N cycles as a function of shifts of phases φ_2 , φ_3

2.2. Двухосное нагружение вида «кручение с изгибом»

Аналогичный анализ был проведен для широко распространенного вида нагружения – кручения с изгибом. При этом также учитывается произвольный сдвиг фаз. В данном случае в циклическом процессе нагружения отличны от нуля компоненты напряжений $\sigma_{33}(t)$ и $\tau_{23}(t)$, которые меняются по гармоническому закону:

$$\begin{aligned} \tau_{23}(t) &= \tau_m + \tau_a \cos \omega t, \\ \sigma_{33}(t) &= \sigma_m + \sigma_a \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

где ω – частота нагружения; φ – произвольный сдвиг фаз; σ_m и τ_m – средние значения, а σ_a и τ_a – амплитуды компонент тензора напряжений $\sigma(t)$. Размах главных компонент тензора напряжений за цикл нагружения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{23} &= \tau_a (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) = \\ &= 2\tau_a \sin\left(\omega \frac{t_2 - t_1}{2}\right) \sin\left(\omega \frac{t_2 + t_1}{2}\right), \\ \Delta\sigma_{33} &= \sigma_a (\cos(\omega t_1 + \varphi) - \cos(\omega t_2 + \varphi)) = \\ &= 2\sigma_a \sin\left(\omega \frac{t_2 - t_1}{2}\right) \sin\left(\omega \frac{t_2 + t_1}{2} + \varphi\right), \end{aligned}$$

где моменты времени t_1 и t_2 определяются из условия максимума по времени размаха касательного напряжения на площадке с нормалью \mathbf{n} ; $t_1, t_2 \in [0, T]$, $T = 2\pi / \omega$.

Кратко величину сдвигового напряжения можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta\tau^2 &= 4 \sin^2 \omega \frac{t_2 - t_1}{2} \left[\tau_a^2 X_\tau \sin^2 \omega \xi + \right. \\ &\left. + \tau_a \sigma_a X_{\sigma\tau} \sin \omega \xi \sin(\omega \xi + \varphi) + \sigma_a^2 X_\sigma \sin^2(\omega \xi + \varphi) \right], \end{aligned}$$

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \xi, \quad X_\tau = x_2 + x_3 - 4x_2x_3,$$

$$X_{\sigma\tau} = 2\sqrt{x_2x_3}(1 - 2x_3), \quad X_\sigma = x_3(1 - x_3)$$

со следующими дополнительными обозначениями:

$$B_S = \tau_a \sigma_a X_{\sigma\tau} \sin \varphi + \sigma_a^2 X_\sigma \sin 2\varphi,$$

$$B_C = \tau_a^2 X_\tau + \tau_a \sigma_a X_{\sigma\tau} \cos \varphi + \sigma_a^2 X_\sigma \cos 2\varphi.$$

Были определены моменты времени, для которых достигаются экстремальные значения размаха касательных напряжений внутри цикла при произвольном \mathbf{n} :

$$t_1 = \frac{T}{4} \left(-\frac{\arctg(B_S / B_C)}{\pi} + k - 1 \right),$$

$$t_2 = \frac{T}{4} \left(-\frac{\arctg(B_S / B_C)}{\pi} + k + 1 \right),$$

$$\omega \xi_0 = -\frac{\arctg(B_S / B_C)}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Из условия экстремума функции $\Delta\tau^2(x_i)$, $i = 1, 2, 3$, при ограничении $\sum x_k = 1$ были определены соответствующие данным моментам времени t_1 и t_2 – компоненты вектора нормали x_i :

$$x_3 = \frac{\tau_a^2 \sin^2 \omega \xi_0 + \sigma_a^2 \sin^2 (\omega \xi_0 + \varphi)}{2\sigma_a^2 \sin^2 (\omega \xi_0 + \varphi)},$$

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3.$$

Отбор компонент x_i , соответствующих максимальным и минимальным значениям размаха касательных напряжений, также проводился явным образом. Если функция $\Delta\tau^2(x_i)$ не имеет максимума внутри области $0 < x_i < 1$, то с помощью упрощенного анализа были

определены значения компонент x_i , соответствующие экстремумам $\Delta\tau^2(x_i)$ на границах этой области.

Аналогичным образом было получено выражение для определения момента времени, когда эквивалентное гидростатическое напряжение $\alpha_\infty \sigma_{H,\max}$ максимально.

Как и в предыдущем случае нагружения, в данном варианте можно определить количество циклов N для произвольных величин амплитуд напряжений многоосного циклического нагружения в зависимости от сдвига фаз. Проведенные расчеты показывают значительное влияние сдвига фаз на усталостную долговечность, что видно на рис. 3.

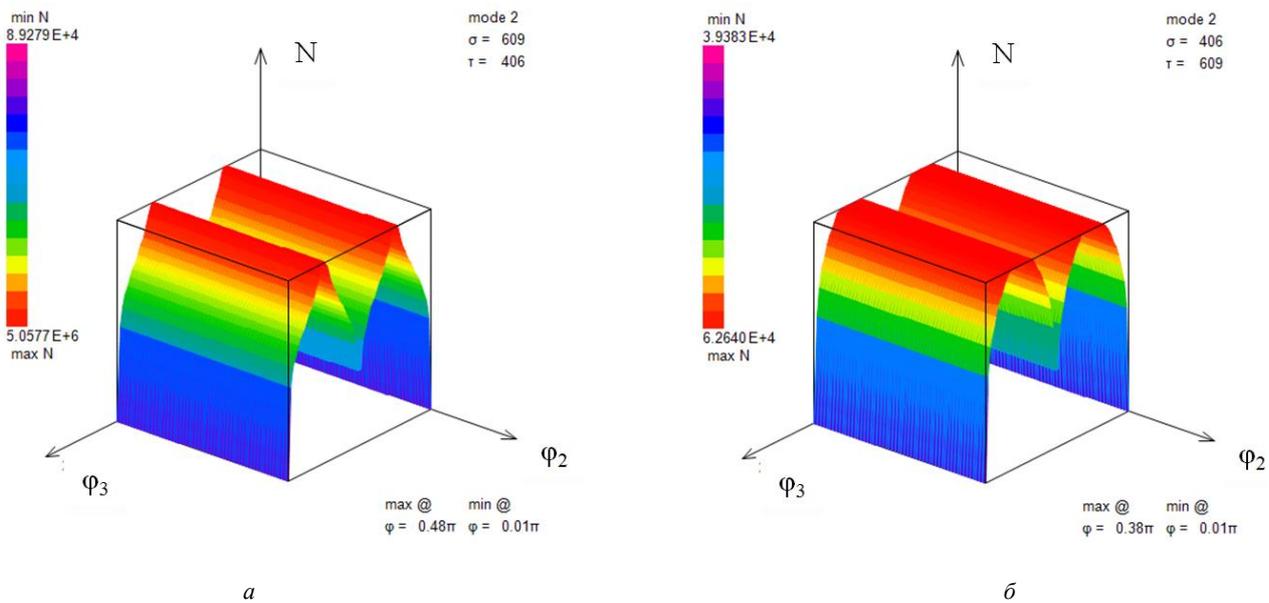


Рис. 3. Усталостная долговечность, представленная в виде количества циклов N , как функция от сдвига фазы $\varphi = \varphi_3$

Fig. 3. Fatigue life in terms of cycles N as a function of a shift of phase $\varphi = \varphi_3$

3. Сравнение рассматриваемого критерия с экспериментальными данными

Для оценки корректности определения ориентации критической плоскости было проведено сравнение с немногочисленными экспериментальными результатами, с учетом сдвига фаз для углеродистой стали 0,51 % при усталостных испытаниях на изгиб с кручением [24], а также с другим известным многоосным критерием усталостного разрушения [11]. Приведем сравнительную таблицу для нагружения вида «изгиб с кручением». Первые два столбца представляют собой амплитуды изгибающих и крутильных напряжений. Третий столбец – сдвиг фаз между ними. В четвертом по седьмой приведены данные для угла ориентации, который является углом между продольной осью образца и нормалью к критической плоскости (см. рис. 1). Численные результаты были получены

путем прямого перебора для рассматриваемого критерия [9], а именно, с малым шагом были рассчитаны возможные комбинации дискретных значений времени и сдвига фаз. Ориентация плоскости с наибольшим найденным значением размаха касательного напряжения была выбрана в качестве критической; аналитические значения для угла α получены с применением формул, приведенных выше. Предлагаемая аналитическая процедура приводит к результату в 200 раз быстрее, чем прямой числовой перебор.

Из приведенной таблицы видно, что аналитическая процедура дает результаты, полностью совпадающие с трудоемким численным определением ориентации критической плоскости для выбранного критерия усталостного разрушения Пападопулоса [9, 18] и относительно близкие к экспериментальным и полученным на основе иного критерия усталостного разрушения с определением критической плоскости [11].

Экспериментальные и расчетные данные

Experimental and calculated data

σ , МПа	τ , МПа	δ	$\alpha(\cdot\pi)$ экспер. [24]	$\alpha(\cdot\pi)$ Carpinteri [11]	$\alpha(\cdot\pi)$ численно [9]	$\alpha(\cdot\pi)$ аналит.
0,00	201,11	0	0,249	0,250	0,250	0,250
162,85	195,69	0	0,194	0,193	0,193	0,193
274,68	137,34	0	0,128	0,125	0,125	0,125
141,95	171,18	$\pi/6$	0,177	0,197	0,193	0,193
255,06	127,53	$\pi/6$	0,090	0,119	0,125	0,125
147,15	177,56	$\pi/6$	0,120	0,206	0,213	0,213
255,06	127,53	$\pi/6$	0,045	0,094	0,125	0,125
152,45	184,23	$\pi/6$	0,158	0,207	0,000	0,000
264,87	132,44	$\pi/6$	0,000	0,076	0,000	0,000
308,03	63,86	$\pi/6$	0,000	0,055	0,000	0,000

4. Численный подход

Рассмотрена задача усталостного разрушения диска компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения. Аналитическим и численным методами расчета напряженно-деформированного состояния дисков и лопаток ГТД на различные воздействия посвящена обширная литература [25–31]. Для примера был рассмотрен диск переменной толщины (модельный вариант диска компрессора газотурбинного двигателя) под воздействием центробежных нагрузок. Напряженное состояние диска рассчитывалось численно-аналитическим методом [30–31], обобщающим на несимметричный случай метод, разработанный в [26].

Геометрия половины поперечного сечения диска представлена на рис. 4, а, распределение по радиальной координате некоторых компонент тензора напряжений – на рис. 4, б. Значения параметров частоты вращения $\omega = 600$ 1/с, модулей упругости и плотности $\lambda = 78$ МПа, $\mu = 44$ МПа, $\rho = 4370$ кг/м³ (титановый сплав ВТ3-1). Для данного диска была проведена оценка количества циклов N до разрушения с выбранным пределом усталости для реверсного цикла 350 МПа. Было получено несколько схожих результатов для разных частей диска, все они лежат в диапазоне от $12 \cdot 10^3$ до $40 \cdot 10^3$ циклов, что соответствует экспериментальным данным [30].

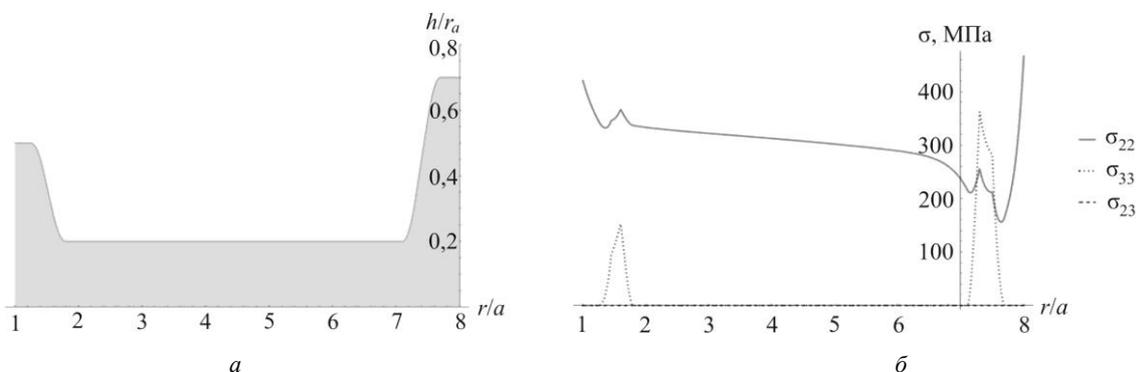


Рис. 4. Распределение напряжений в диске рассматриваемой геометрии без учета v-образных углублений

Fig. 4. Stress distribution in a simplified disc of the considered geometry without v-shaped notches for blades

Также был рассмотрен более реалистичный элемент конструкции – сегмент диска компрессора низкого давления газотурбинного двигателя с лопаткой, представленные на рис. 5, а. Лопатки подвержены аэродинамическим нагрузкам, лопатки и диск подвержены центробежным нагрузкам. Рассматриваются следующие типы контактных условий на границе диска и лопаток – полное сцепление и проскальзывание с трением с возможностью отлипания. Расчеты показали, что наиболее опасными с точки зрения зарождения усталостных трещин являются окрестности зон контакта диска и лопаток, имеющих вид соединения типа «ласточкин хвост».

Также показано, что наилучшее соответствие расчетных и экспериментально наблюдаемых зон концентрации напряжений достигается при учете возможности отлипания и проскальзывания контактных границ диска и лопаток.

Концентрация напряжений в окрестности соединения «ласточкин хвост» приводит к необходимости значительного сгущения расчетной сетки в этой области. Оценки показывают, что расчет полномасштабной модели диска с полным набором лопаток и с достаточной степенью сгущения, а также с учетом значительного времени обработки каждого контактного условия неэкономичен по времени. В то же время при рассмотре-

нии сектора диска с единственной лопаткой остаются неизвестными граничные условия на его боковых поверхностях, так как в силу разворота лопаток относительно оси вращения и самого вращения задача не является осесимметричной. Поэтому расчет проводился в два этапа. Сначала была создана сетка с умеренным сгущением для полной модели. Количество элементов $\sim 2 \cdot 10^5$. В дальнейшем для задачи на секторе диска с сильным сгущением сетки в качестве условий на боковых поверхностях использовались перемещения, полученные из расчета на полной модели. Сетка значительно сгущена в окрестности ожидаемых концентраторов напряжений. Общее количество элементов не превосходит 100 000, что вполне приемлемо для проведения расчетов на персональном компьютере.

По результатам конечно-элементного расчета на рис. 5, б показано распределение напряжений в зоне контакта диска и лопатки. На рис. 5, в показано количество циклов N до разрушения в наиболее нагруженной области диска – в углу паза для закрепления лопатки для трех критериев (слева направо): классических критериев [6] и [7], сформулированных для инвариантов тензора напряжений и не использующих понятие критической плоскости, и для критерия [9], учитывающего ориентацию критической плоскости. Критерии [6] и [9] дали оценку долговечности дисков ГТД на уровне 35 000–50 000 циклов. Критерий [7] предсказал возможность усталостного разрушения в 20 000 полетных циклов. В целом все эти критерии дали сходное расположение зон усталостного разрушения.

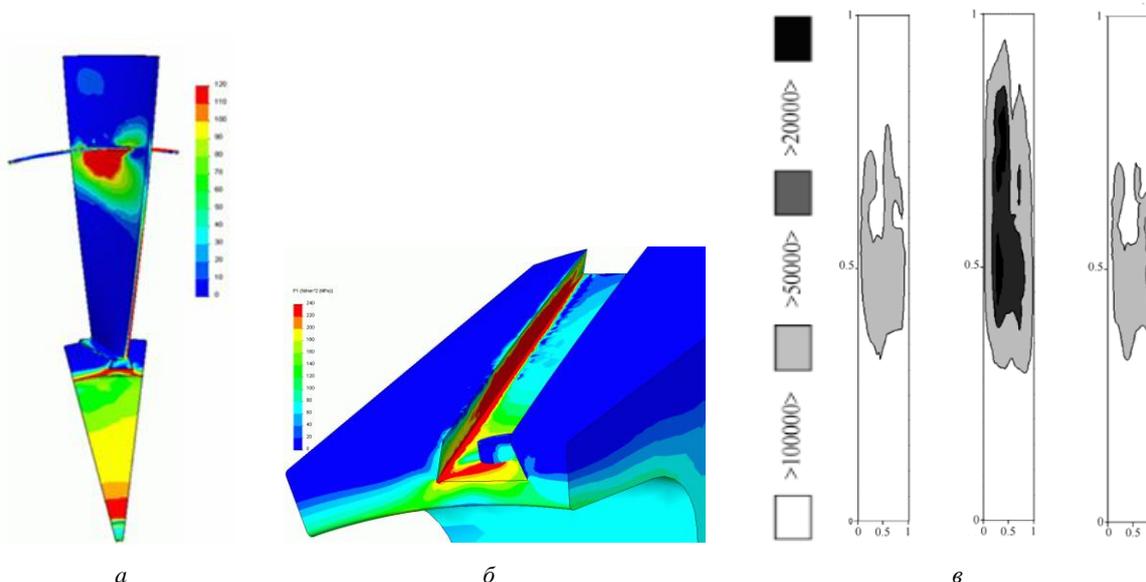


Рис. 5. Оценка долговечности диска компрессора; а – сегмент диска компрессора и лопатка; б – напряженное состояние в зоне контакта диска и лопатки; в – количество циклов N до разрушения в наиболее нагруженной области диска для критериев [6, 7, 9]

Fig. 5. Fatigue life assessment of the disc; (a) is a segment of a compressor disc and a blade, (b) is the stress state within the contact zone between the disc and the blade, (c) is the amount of cycles N to breakdown within the most vulnerable zone of the disc for criteria [6, 7, 9]

Заключение

Предложена процедура аналитического вычисления ориентации критической плоскости для многоосного циклического нагружения при произвольном сдвиге фаз в случаях классических усталостных диапазонов – малоциклового и многоциклового усталости. Проведено сравнение исследуемого критерия с экспериментальными данными и численными расчетами, произведенными с использованием иного критерия.

Рассмотрен диск компрессора газотурбинного двигателя, подверженный полетным циклам нагружения. Путем распределения напряжений, рассчитанного приближенным численно-аналитическим методом, а также распределения напряжений, рассчитанного методом конечных элементов, определены зоны наи-

большей концентрации напряжений, ориентация критической плоскости в зонах концентрации и получены оценки долговечности (число циклов до разрушения $N \sim 35\ 000 - 50\ 000$) эксплуатации диска с использованием выбранного многоосного критерия усталостного разрушения.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект РНФ № 19-19-00705.

Acknowledgment

The work was supported by The Russian Science Foundation, Project RSF No. 19-19-00705.

Библиографический список

1. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading // Proceedings of 19th Int. Congress of Mech. Eng. – Brasilia, DF, 2007.
2. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. of Fatigue. – 2009. – Vol. 31. – P. 2031–40.
3. Ying-Yu Wang, Wei-Xing Yao. Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria // Int. J. of Fatigue. – 2004. – Vol. 26. – P. 17–25.
4. Investigation of multiaxial fatigue in the prospect of turbine disc applications: Part II – Fatigue criteria analysis and formulation of a new combined one / V. Bonnard, J.L. Chaboche, H. Cherouali, P. Kanoute, E. Ostoja-Kuczynski, F. Vogel // Proceedings the 9-th Intern. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9). – Parma, Italy, 2010. – P. 691–698.
5. Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V // ASME J. Eng. Mater. Technol. – 2002. – Vol. 124. – P. 229–237.
6. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. – Metal fatigue. – McGraw-Hill, 1959. – P. 145–169.
7. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. – London, 1956. – P. 138–49.
8. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // J. of Eng. for Indust. – 1959. – P. 301–306.
9. Papadopoulos I.V. Long life fatigue under multiaxial loading // International Journal of Fatigue. – 2001. – Vol. 23. – P. 839–849.
10. Morel F. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading // Int. J. of Fatigue. – 2000. – Vol. 22(2). – P. 101–119.
11. Expected position of the fatigue plane by using the weighted mean principal Euler angles / A. Carpinteri, A. Karolczuk, E. Macha, S. Vantadori // International Journal of Fatigue. – 2002. – Vol. 115. – P. 87–99.
12. Banvillet A., Palin-Luc T., Lasserre S. A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion // International Journal of Fatigue. – 2003. – Vol. 25(8). – P. 755–769.
13. Mataka T. An explanation on fatigue limit under combined stress // Bull JSME. – 1977. – Vol. 20 – P. 257–763.
14. McDiarmid D.L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1999. – Vol. 17. – P. 1475–1484.
15. Susmel L., Taylor D. A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading // Int. J. of Fatigue. – 2012. – Vol. 38. – P. 7–24.
16. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane-based criterion // Int. J. of Fatigue. – 2011. – Vol. 33. – P. 969–76.
17. Fatemi A., Socie D.F. A critical plane approach to multiaxial damage including out-of-phase loading // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1988. – Vol. 11. – No. 3. – P. 149–166.
18. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals / I.V. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filipini, A. Bernasconi // Int. J. of Fatigue. – 1997. – Vol. 19. – No. 3. – P. 219–235.
19. Collins J.A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. – NY: Wiley, 1993. – 654 p.
20. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. – Уфа: Монография, 2007. – 498 с.
21. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46(6). – P. 828–838.
22. Определение критической плоскости и оценка усталостной долговечности при различных режимах циклического нагружения / И.С. Никитин, Н.Г. Бурого, А.Д. Никитин, В.Л. Якушев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 4. – С. 238–252.
23. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A. Fatigue crack initiation and growth on an extruded titanium alloy in gigacycle regime: comparison between tension and torsion loadings // 21st European Conference on Fracture, ECF21. – Catania, Italy, 2016.
24. Nishihara T., Kawamoto M. The strength of metals under combined alternation bending and torsion with phase difference // Memories of the College of Engineering. – Kyoto Imperial University, 1945. – Vol. 11. – P. 85–112.
25. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М: Машиностроение, 1978. – 247 с.
26. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. – М.: Изд. дом МЭИ, 2007. – 476 с.
27. Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2008. – 204 с.
28. Shlyannikov V.N., Yarullin R.R., Gizzatullin R.Z. Structural integrity prediction of turbine disk on a critical zone concept basis // Proceedings of 11th International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment. – Manchester, UK, 2011. – P. 1–10.
29. Residual life prediction of power steam turbine disk with fixed operating time / B.V. Ilchenko, R.R. Yarullin, A.P. Zakharov, R.Z. Gizzatullin // Proceeding of ECF-19 conference. – Kazan, Russia, 2012.
30. Burago N.G., Nikitin I.S., Yushkovskiy P.A. Lifetime of disks of variable thickness with anisotropy of fatigue properties taken into account // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 50(5). – P. 546–558.
31. The life duration for compressor disc under torsional vibrations of the blades / I.S. Nikitin, N.G. Burago, A.D. Nikitin, P.A. Yushkovskiy // Solid State Phenomena. – 2017. – Vol. 258. – P. 145–148.

References

1. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading. *Brasilia, DF, Proceedings of 19th Int. Congress of Mech. Eng.*, 2007.
2. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy. *Int. J. of Fatigue*, 2009, vol. 31, pp. 2031-40.
3. Ying-Yu Wang, Wei-Xing Yao. Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria. *Int. J. of Fatigue*, 2004, vol. 26, pp. 17-25.
4. Bonnard vol., Chaboche J.L., Cherouali H., Kanoute P., Ostoja-Kuczynski E., Vogel F. Investigation of multiaxial fatigue in the prospect of turbine disc applications: Part II – Fatigue criteria analysis and formulation of a new combined one. *Parma, Italy, Proceedings the 9-th Intern. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9) – 2010*, pp.691-698.
5. Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4vol. *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, 2002, vol. 124, pp.229-237.
6. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. *Metal fatigue*, 1959, pp. 145-169.
7. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel. *London, Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, 1956, pp. 138–149.
8. W. Findley. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *J. of Eng. for Indust.*, 1959, pp. 301-306.
9. I.vol. Papadopoulos. Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 2001, vol. 23, pp. 839-49.
10. F. Morel. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading. *Int. J. of Fatigue*, 2000, vol. 22(2), pp. 101-119.
11. A. Carpinteri, A. Karolczuk, E. Macha, S. Vantadori. Expected position of the fatigue plane by using the weighted mean principal Euler angles. *International Journal of Fatigue*, 2002, vol. 115, pp. 87-99.
12. A. Banvillet, T. Palin-Luc, S. Lasserre. A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion. *International Journal of Fatigue*, 2003, vol. 25(8), pp. 755-769.
13. Mataka T. An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bull JSME*, 1977, vol.20 – pp. 257 – 263.
14. McDiarmid D.L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 1999, vol.17 – pp. 1475-1484.
15. Susmel L., Taylor D. A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading. *Int. J. of Fatigue*, 2012, vol. 38, pp. 7–24.
16. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane-based criterion. *Int. J. of Fatigue*, 2011, vol. 33, pp. 969-976.
17. Fatemi A., Socie D.F. A critical plane approach to multiaxial damage including out-of-phase loading. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 1988, vol. 11, No 3, pp.149-166.
18. Papadopoulos I.vol., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *Int. J. of Fatigue*, 1997, vol. 19, No. 3, pp. 219-235.
19. Collins J.A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. *NY, Wiley*, 1993, 654 p.
20. Shanyavsky A.A. Modeling of Metal Fatigue fracture. *Ufa, Monografia*, 2007, 498 p.
21. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46(6), pp. 828-838.
22. Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Yakushev vol.L. Determination of the critical plane and assessment of fatigue durability under various cyclic loading regimes. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, vol. 4, pp. 238-252.
23. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A. Fatigue crack initiation and growth on an extruded titanium alloy in gigacycle regime: comparison between tension and torsion loadings. *Catania, Italy, 21st European Conference on Fracture, ECF21*, 2016, .
24. T. Nishihara, M. Kawamoto. The strength of metals under combined alternation bending and torsion with phase difference. *Memories of the College of Engineering, Kyoto Imperial University*, 1945, vol. 11, pp. 85-112.
25. Demyanushko I.vol., Birger I.A. Calculation of the strength of the rotating discs, *Moscow, Mashinostroenie*, 1978, 247 p.
26. Kostyuk A.G. Dynamics and strength of turbomachines, *Moscow, Publishing House MEI*, 2007, 476 p.
27. Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.A., Sandratskiy vol.L. Dynamics and strength of aircraft engines and energy plants, *Moscow, Mashinostroenie*, 2008, 204 p.
28. Shlyannikov vol.N., Yarullin R.R., Gizzatullin R.Z. Structural integrity prediction of turbine disk on a critical zone concept basis. *Manchester, UK, Proceedings of 11th International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment*, 2011, pp. 1-10.
29. Ilchenko B.vol., Yarullin R.R., Zakharov A.P., Gizzatullin R.Z. Residual life prediction of power steam turbine disk with fixed operating time. *Kazan, Russia, Proceeding of ECF-19 conference*, 2012.
30. Burago N.G., Nikitin I.S., Yushkovskiy P.A. Lifetime of Disks of Variable Thickness with Anisotropy of Fatigue Properties Taken into Account. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50(5), pp. 546-558.
31. Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Yushkovskiy P.A. The Life Duration for Compressor Disc under Torsional Vibrations of the Blades. *Solid State Phenomena*, 2017, vol. 258, pp. 145-148.