



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.04

УДК 539.3

## ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ

А.О. Ватульян, Д.К. Плотников

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 04 апреля 2019 г.  
Принята: 17 сентября 2019 г.  
Опубликована: 17 октября 2019 г.

#### Ключевые слова:

обратная задача, некорректность, метод Прони, итерационный процесс, регуляризация, интегральное уравнение Фредгольма, функционально-градиентный материал, установившиеся колебания, приближенная модель, контактная задача.

### АННОТАЦИЯ

Представлены основные постановки и методы исследования коэффициентных обратных задач. Приведена классификация коэффициентных ОЗ в зависимости от реконструируемых объектов. Выделено три класса задач: конечномерные задачи, задачи об определении одномерных функций, задачи о восстановлении многомерных законов. Обсуждены основные подходы при исследовании ОЗ каждого типа.

Описаны схемы исследования конечномерных ОЗ, в том числе и метод Прони, позволяющий упростить схему решения нелинейной ОЗ. В качестве примера конечномерной ОЗ приведен способ определения линейных законов неоднородности полосы, состоящий в построении приближенной модели индентирования и использовании метода Прони на начальном этапе определения параметров модели.

Приведены основные схемы исследования коэффициентных ОЗ по определению одной или нескольких функций при анализе установившихся колебаний в различных постановках. В первой постановке в качестве дополнительной информации заданы компоненты физических полей внутри тела. В качестве примера приведена задача об определении переменного модуля Юнга балки при анализе изгибных колебаний, которая сводится к задаче для линейного операторного уравнения с компактным оператором. В качестве второго типичного примера коэффициентных ОЗ в первой постановке приведена задача об определении переменных коэффициентов Ляме при анализе колебаний прямоугольника, исследование которой сводится к решению задачи Коши для системы уравнений в частных производных первого порядка.

Во второй постановке задано поле смещений на границе тела в некотором частотном диапазоне, что значительно усложняет задачу, поскольку приводит к существенно нелинейной некорректной проблеме. На примере задачи об определении модуля Юнга, модуля сдвига и плотности для функционально-градиентного консольно закрепленного стержня постоянного сечения при анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний построен итерационный процесс, приводящий к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода для нахождения поправок на каждом шаге. Обсуждены вопросы единственности восстановления искомым характеристикам.

© ПНИПУ

© Ватульян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru),

ИД: [0000-0003-0444-4496](https://orcid.org/0000-0003-0444-4496).

Плотников Дмитрий Константинович – асп., e-mail: [dplotnikov@sfnedu.ru](mailto:dplotnikov@sfnedu.ru), ИД: [0000-0002-2989-1949](https://orcid.org/0000-0002-2989-1949).

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru), ИД: [0000-0003-0444-4496](https://orcid.org/0000-0003-0444-4496).

Dmitrii K. Plotnikov – PhD Student, e-mail: [dplotnikov@sfnedu.ru](mailto:dplotnikov@sfnedu.ru), ИД: [0000-0002-2989-1949](https://orcid.org/0000-0002-2989-1949).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS IN MECHANICS

A.O. Vatulyan, D.K. Plotnikov

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 04 April 2019  
 Accepted: 17 September 2019  
 Published: 17 October 2019

#### Keywords:

inverse problem, incorrectness, Prony method, iterative process, regularization, Fredholm integral equation, functionally gradient material, steady-state oscillations, approximate model, contact problem.

### ABSTRACT

The main statements and methods for studying coefficient inverse problems are presented. The classification of coefficient inverse problems is given depending on the objects being reconstructed. Three classes of tasks are highlighted: finite dimensional tasks, problems on determining one-dimensional functions, problems of multidimensional functions restoring. The main approaches in the study of each type of inverse problems are discussed.

Finite-dimensional inverse problems research methods including Prony's method that allows to simplify the solution scheme for a nonlinear inverse problem are described. As an example of a finite-dimensional inverse problem, a method for determining the linear laws of strip inhomogeneity is given.

Basic technics for the study of the coefficient inverse problems by the definition of one or several functions in the analysis of steady-state oscillations in various settings are given. In the first setting, the components of the physical fields inside the body are specified as additional information. As an example, the problem of determining the variable Young's modulus of a beam in the analysis of bending vibrations is given. It reduces to a problem for a linear operator equation with a compact operator. As the second typical example of coefficient inverse problem in the first formulation, the problem of determining the variable Lamé coefficients when analyzing rectangle oscillations is given. It is reduced to solving the Cauchy problem for a system of partial differential equations of the first order.

In the second formulation, the displacement field at the boundary of the body is given in a certain frequency range. It leads to a significantly non-linear incorrect problem. Using the example of the problem of determining the Young's modulus, shear modulus, and density for a functionally gradient cantilever rod of the constant cross section, an iterative process is developed for the analysis of longitudinal, bending and torsional vibrations. At each step, a solution for a system of Fredholm integral equations of the first kind is constructed. The issues of the uniqueness of restoring the desired characteristics are discussed.

© PNRPU

### Введение

Коэффициентные обратные задачи (ОЗ) – один из важнейших классов обратных задач, возникающих при моделировании в различных областях естествознания. В рамках математической модели, которая описывается краевой или начально-краевой задачей для оператора с постоянными или переменными коэффициентами, коэффициентная ОЗ состоит в нахождении коэффициентов операторов по некоторой дополнительной информации о решении. Так, для моделей механики, в первую очередь для моделей теории упругости, такой информацией может быть поле смещений, измеренное либо внутри, либо на поверхности тела. Задачи такого типа, как правило, являются нелинейными и некорректными и требуют развития как теоретических аспектов, так и вычислительных схем. Здесь, не претендуя на полноту, отметим ряд монографий и обзорных статей, посвященных разным постановкам и методам исследования коэффициентных ОЗ [1–19].

Настоящая работа представляет собой обзор наиболее часто используемых методов решения конечномерных ОЗ и задач об определении функциональных зависимостей, характеризующих неоднородные свойства тел.

Одним из важных классов коэффициентных ОЗ является класс задач об определении постоянных коэффициентов дифференциальных операторов [9, 17]. Эта

проблема, которая обычно в моделировании именуется проблемой верификации модели, может решаться как в рамках общих подходов, опирающихся на теорию коэффициентных ОЗ, так и в рамках частных схем, ориентированных на тот или иной вид операторов (линейные операторы с постоянными коэффициентами, нелинейные операторы с постоянными коэффициентами). Стратегия исследования общих коэффициентных ОЗ в естествознании, в механике в частности, в настоящее время направлена на разработку различных подходов к изучению нелинейных некорректных проблем, к которым сводятся ОЗ, на разработку эффективных численных схем, сочетающих прямые методы, итерационные схемы и регуляризацию в той или иной форме.

По степени сложности коэффициентные ОЗ можно разбить на несколько типов. Так, например, проблема идентификации модели приводит к некоторой конечномерной ОЗ, для построения решения которой могут быть использованы различные подходы, описываемые ниже. Далее попутно отметим, что в рамках конечномерных ОЗ могут быть изучены многие ОЗ, которые и не относятся к классу коэффициентных, в частности те, для которых осуществлен этап структурной идентификации или имеются формулы, которые связывают параметры модели и дополнительную информацию, по которой производится идентификация параметров. К таким задачам в механике можно отнести задачи об

определении параметров полостей канонической формы (сфера, эллипсоид), прямолинейных трещин в упругой среде по данным акустического зондирования, дефектов в покрытиях и в элементах балочных конструкций, задачи по идентификации коэффициентов постели, входящих в граничные условия [20].

Отметим, что наиболее востребованными и изученными являются конечномерные ОЗ об определении коэффициентов (всех или некоторых) линейных обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, которые являются наиболее часто используемыми объектами в математическом моделировании в теоретической механике, теории упругости, вязкоупругости, термоупругости, в изучении колебаний стержневых конструкций. С помощью краевых задач или задач Коши для них моделируются различные процессы, например малые колебания систем материальных точек, деформирование материалов с реологическими свойствами, деформирование и колебания стержней, пластин. Если для ряда моделей механики вопрос об определении постоянных коэффициентов операторов решается достаточно просто в силу их ясного физического смысла (плотность, модуль упругости, коэффициент температурного расширения, кинематическая вязкость) и простых экспериментов для их определения, то для большинства из них требуется решение ОЗ об их идентификации на основе некоторой дополнительной информации о решении. Простота этого класса задач состоит в том, что для них можно в явной форме построить решения, удовлетворяющие начальным или граничным условиям, и на их основе формировать операторные уравнения для решения ОЗ.

Второй по сложности класс ОЗ представляют собой одномерные коэффициентные ОЗ, в которых требуется определить одну или несколько функций одной переменной, характеризующих механические и физические свойства объекта исследования. Отметим, что математические модели механики, сложившиеся достаточно давно (например, классическая модель термоупругости), опирающиеся на гипотезы однородности и изотропии, позволили с достаточной степенью точности описывать различные теплофизические процессы в линейной постановке. Эти модели требовали определения лишь нескольких параметров на этапе параметрической идентификации, что позволяло строить аналитические решения для канонических областей, исследовать влияние параметров задачи, условий нагружения на процесс и формировать операторные уравнения для различных классов ОЗ. В последнее время объектами исследования в механике стали объекты и материалы, переменностью свойств которых для адекватного прогноза на воздействие пренебрегать нельзя. Здесь в первую очередь отметим задачи геофизики и горной механики, биомеханики тканей, задачи о деформировании элементов конструкций из композиционных и функционально-градиентных материалов. Конечно, для таких объектов развиты и совершенствуются способы осреднения, со-

гласно которым вычисляются характеристики однородного тела, однако в ряде проблем данные расчетов в рамках осредненных моделей могут дать весьма отдаленные от наблюдаемых в эксперименте результаты.

В качестве модельных задач об определении одной или нескольких одномерных функций упомянем, например, задачи об определении модуля Юнга, модуля сдвига и плотности для неоднородного упругого стержня, изготовленного из функционально-градиентного материала [17, 21]. Главное отличие таких ОЗ по сравнению с ОЗ предыдущего класса состоит в том, что даже для простейших видов неоднородности, задаваемых линейными или степенными функциями, нельзя в явном виде построить решение, на основе которого затем можно формировать операторные уравнения, связывающие искомые и заданные (измеренные в эксперименте) функции. В то же время можно от этого класса задач перебросить мостик к конечномерным коэффициентным ОЗ, отыскивая решение ОЗ в некотором просто параметризуемом классе функций – линейных, степенных, экспоненциальных.

Для таких коэффициентных ОЗ в случае зависимости искомых параметров-функций от координат операторные уравнения, связывающие заданные и искомые функции, в общем случае неоднородности в явном виде построены быть не могут; таким образом, они относятся к самому трудному классу ОЗ.

Третий класс коэффициентных ОЗ составляют задачи об определении одной или нескольких многомерных (двумерных или трехмерных) функций, входящих в постановку краевой задачи для упругого, вязкоупругого или термоупругого тела. Этот класс ОЗ исследован весьма слабо не только с точки зрения построения операторных соотношений в ОЗ, но и в части разработки эффективных вычислительных схем при построении решений.

## 1. Основные схемы исследования конечномерных ОЗ

Опишем наиболее употребительные схемы исследования конечномерных ОЗ для обыкновенного дифференциального уравнения  $N$ -го порядка. Первая из них состоит в выполнении дифференциального уравнения в опорных точках, что приводит к решению линейной алгебраической системы (возможно переопределенной) относительно коэффициентов [9]. Заметим, что при реализации этого подхода требуется знание не только самих решений, но и их производных, что в условиях неточно заданной входной информации при использовании традиционных для вычислительных схем разностных аппроксимаций с целью нахождения производных приводит к большим вычислительным погрешностям и как следствие неустойчивой процедуре отыскания коэффициентов. Эта проблема обычно преодолевается путем использования сплайн-аппроксимаций, позволяющих находить производные аналитически с небольшой погрешностью [22].

Второй способ основан на свойстве решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которое состоит в том, что общие решения задач для таких операторов формируются в виде линейных комбинаций функций экспоненциального вида с комплексными показателями, которые представляют общее решение однородного уравнения. Отметим, что эти показатели и коэффициенты уравнения связаны характеристическим уравнением соответствующего дифференциального оператора и могут быть найдены либо с помощью метода Прони [17], либо прямой минимизацией некоторого неквадратичного функционала невязки, обобщающего широко известный абстрактный метод наименьших квадратов. При нахождении минимума функционала невязки обычно используются современные численные методы минимизации функционалов, как градиентные, так и не использующие процедуру вычисления частных производных. Наиболее популярны среди последних методы глобального случайного поиска, эволюционные или генетические алгоритмы [23], которые стали весьма востребованными в последние годы при решении широкого класса задач верификации моделей.

В качестве иллюстрации метода Прони представим пример задачи идентификации характеристик полимерного материала при использовании дифференциальной формы определяющих соотношений второго порядка из опыта на ползучесть приходим к решению квадратного уравнения относительно показателей экспонент и решения простых линейных систем [24]

Третий метод определения коэффициентов в нелинейных дифференциальных уравнениях базируется на методе квазилинеаризации, представленном в [25]. Заметим, что в случае, когда дифференциальный оператор нелинеен, построение его решения далеко не всегда возможно в явном виде и нельзя предложить простого метода алгебраизации, как в линейном случае. Решение краевой задачи чаще всего можно построить только численно, в связи с этим возникает вопрос, можно ли по результатам наблюдения за решением (допустим, что в некотором наборе точек известно решение некоторой краевой задачи или задачи Коши для этого дифференциального оператора) эффективно осуществить этап параметрической идентификации. Для ряда операторов нелинейной динамики (например, для уравнения Ван-дер-Поля) схема и вычислительные эксперименты описаны в [25] и дают прекрасные результаты. Задача об определении параметров трехпараметрического упругого потенциала Блейтца и Ко

$$W = \frac{\mu}{2} \left( \beta \left( I_1 + \frac{I_3^{-\alpha} - 1}{\alpha} - 3 \right) + (1 - \beta) \left( \frac{I_2}{I_3} + \frac{I_3^{-\alpha} - 1}{\alpha} - 3 \right) \right) \quad (1.1)$$

на основе анализа данных на кручение стержня представлена в [26]. Результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность процедуры квазилинеаризации в нахождении искомых параметров.

Четвертый метод определения коэффициентов модели опирается на ставшие весьма популярными в последние годы эволюционные или генетические алгоритмы. Суть этого подхода состоит в параметризации исходной задачи набором параметров и соответственно их отыскании из задачи отыскания минимума функционала невязки на некотором подпространстве в  $R_n$ . Обычно ограничения на функции (выпуклость, монотонность) позволяют сузить область поиска до выпуклого многогранника в  $R_n$ . Естественно, что для нахождения такого решения можно использовать методы нахождения минимума функции многих переменных. При этом необходимо решать сложные нелинейные системы трансцендентных уравнений либо использовать итерационные процессы для нахождения минимального значения функционала невязки, что требует нахождения его градиента. Существует широкий класс градиентных методов, позволяющих определить направление поиска оптимума в соответствии с информацией о градиенте целевой функции, однако в ряде случаев, особенно для некорректных задач, эта схема оказывается малоэффективной. В то же время возможно использовать некие альтернативные подходы, связанные либо с процедурой глобального случайного поиска в конечномерном пространстве, либо с неким промежуточным гибридным вариантом, который позволяет находить минимум функции многих переменных со сложным рельефом без нахождения градиента. Подробно такие методы изложены в [23]; в качестве примеров конструктивного использования приведем результаты реконструкции модулей упругости ортотропного материала по данным акустического зондирования [27], реконструкции свойств слоистой структуры [28].

Отметим также и пятый метод, стоящий особняком, который достаточно эффективен при исследовании ряда коэффициентных ОЗ и связан с упрощением операторных уравнений, объединяющих искомые и заданные величины, базируется на использовании некоторого приближения, которое строится из различных соображений, в том числе и на асимптотическом анализе прямой задачи. Так, удалось исследовать задачи об идентификации включения [29], на основе асимптотического анализа выявить влияние наличия малой наклонной трещины в упругом слое на поля смещений и на его основе разработать схему последовательного определения параметров трещины [13], построить решения задач об определении надреза [17, 30], малой полости и включения в упругой балке при анализе изгибных колебаний на основе нескольких первых резонансных частот [17, 31].

В качестве примера использования различных подходов при исследовании конечномерных обратных задач приведем способ определения простых законов неоднородности упругой полосы (линейных), сочетающий в себе как упрощение модели деформирования, так и использование метода Прони при нахождении параметров на основе процедуры воздействия индентором.

В работе [32] представлена приближенная модель деформирования неоднородной упругой полосы и исследована задача о контактном взаимодействии параболического штампа с упругой полосой, жестко заземленной по основанию. Модель построена на основе метода Канторовича, в качестве гипотез о характере изменения компонент поля перемещения по толщине приняты соотношения

$$u_1(\xi_1, \xi_3) = \frac{g_1(\xi_3)}{g_1(1)} u(\xi_1), \quad u_3(\xi_1, \xi_3) = \frac{g_3(\xi_3)}{g_3(1)} w(\xi_1),$$

$$g_1(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{dx}{f_2(x)}, \quad g_3(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{dx}{f_1(x) + 2f_2(x)}, \quad (1.2)$$

где  $\xi_1, \xi_3$  – безразмерные координаты;  $f_1(\xi_3), f_2(\xi_3)$  – безразмерные параметры Ляме, отнесенные к характерному значению модуля сдвига  $\mu_0 = \max_{\xi_3 \in [0,1]} \mu(\xi_3 h)$ .

Сформулировано операторное соотношение, связывающее вертикальное смещение верхней границы полосы с контактными давлением в виде

$$b_2 w^{(4)} - b_1 w'' + b_0 w = -a_1 q'' + a_0 q, \quad (1.3)$$

где коэффициенты  $a_k, b_k$  зависят от законов неоднородности полосы.

В рамках данной модели исследуем задачу об определении упругих свойств неоднородной полосы, которые характеризуются функциями  $f_1(\xi_3), f_2(\xi_3)$ . Основными данными в экспериментах на индентирование являются кривые, отражающие зависимость между силой, действующей на индентор, и глубиной его внедрения. Также информацией в обратной задаче может служить поле перемещений на свободной поверхности полосы. В настоящем примере в качестве информации для оценки свойств неоднородной полосы используем данные о вертикальном смещении верхней границы в наборе точек  $\xi_{3j}$  вблизи контактной зоны и силе, действующей на штамп. Вне области контакта  $q = 0$  и смещение полосы описывается однородным уравнением четвертого порядка, решение которого, убывающее при  $\xi_1 \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$w(\xi_1) = C_1 \exp(\lambda_1 \xi_1) + C_2 \exp(\lambda_2 \xi_1), \quad \lambda_k < 0. \quad (1.4)$$

Для определения показателей  $\lambda_1, \lambda_2$  и коэффициентов  $C_1, C_2$  использован метод Прони, соответствующий случаю  $N = 2$ . Далее, по этим величинам найдены значения параметров модели:

$$r_1 = A_{20}^{-1}, \quad r_2 = A_{22}, \quad r_3 = \frac{A_{11}}{A_{10}}, \quad r_4 = \frac{(A_{12} - A_{21})^2}{A_{10}}. \quad (1.5)$$

Коэффициенты  $A_{ij}$  представляют собой некоторые интегральные характеристики параметров Ляме, например

$$A_{11} = \int_0^1 \frac{f_1(\xi_3)}{f_1(\xi_3) + 2f_2(\xi_3)} \int_0^{\xi_3} \frac{dx}{f_2(x)} d\xi_3, \quad (1.6)$$

$$A_{20}^{-1} = \int_0^1 \frac{d\xi_3}{f_1(\xi_3) + 2f_2(\xi_3)},$$

поэтому определить однозначно законы неоднородности полосы в произвольном классе функций в рамках данной модели нельзя. Необходимо сузить класс функций и искать неизвестные законы в классе дробно-рациональных функций вида

$$f_2(\xi_3) = ((d_1 - d_0)\xi_3 + d_0)^{-1},$$

$$f_1(\xi_3) + 2f_2(\xi_3) = ((p_1 - p_0)\xi_3 + p_0)^{-1}. \quad (1.7)$$

Таким образом, параметры  $d_0^{-1} = f_2(0)$ ,  $d_1^{-1} = f_2(1)$ ,  $p_0^{-1} = f_1(0) + 2f_2(0)$ ,  $p_1^{-1} = f_1(1) + 2f_2(1)$  представляют собой значения соответствующих модулей и являются положительными. В этом случае интегралы типа (1.6) могут быть вычислены и уравнения (1.5) дают систему для определения параметров в (1.7).

Приведем решения коэффициентной ОЗ в простейших вариантах.

1. Пусть известно значение параметров Ляме на верхней границе полосы  $d_1, p_1$ . Необходимо определить два параметра  $d_0, p_0$ , характеризующие свойства полосы на нижней границе. В данном случае нахождение неизвестных параметров удастся свести к простым уравнениям. Параметр  $p_0$  определяется по формуле  $p_0 = 2r_1 - p_1$ , а  $d_0$  находится из решения квадратного уравнения  $k_2 d_0^2 + k_1 d_0 + k_0 = 0$ . Коэффициенты  $k_i$  зависят от параметров  $r_k$  и от величин  $d_1, p_0, p_1$ . В качестве решения выбирается корень уравнения, который соответствует условию  $f_2(\xi_3) > 0$ .

2. Уравнения для отыскания неизвестных параметров также значительно упрощаются в случае, когда коэффициент Пуассона является постоянной величиной, а модуль Юнга переменным по вертикальной координате. Рассмотрим задачу об определении трех неизвестных параметров: коэффициента Пуассона  $\nu$  и двух параметров в представлении безразмерного модуля упругости

$$\varphi(\xi_3) = ((\varphi_1 - \varphi_0)\xi_3 + \varphi_0)^{-1}. \quad (1.8)$$

Подстановка представления (1.8) в (1.5) при постоянном значении коэффициента Пуассона приводит к формулам

$$\nu = \frac{1-\gamma}{1-2\gamma}, \quad E_0 = -\theta_1 + \theta_2, \quad E_1 = 2\theta_1 - \theta_2,$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{r_3}{r_1 r_2} \right)^{1/2}, \quad \theta_1 = \frac{2r_1(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (1.9)$$

$$\theta_2 = \left( \frac{72r_1^3 r_4 (1-\nu)^3}{(1-4\nu)^2 (1+\nu)^2 (1-2\nu)} \right)^{1/2},$$

откуда и определяются искомые параметры.

Если в прямой задаче законы неоднородности полосы являются дробно-рациональными функциями вида (1.7), то искомые параметры в постановках 1 и 2 восстанавливаются практически точно. Если в прямой задаче законы изменения упругих свойств принадлежат другим классам функций, то изложенный метод определения характеристик неоднородной полосы в рамках приближенной модели позволяет получить оценку упругих свойств полосы и определить характер монотонности искомых законов (убывание, возрастание).

На рис. 1 изображены результаты восстановления линейной зависимости модуля Юнга в классе дробно-рациональных функций в постановке 2. Сплошной кривой обозначены точные значения модуля Юнга, пунктирная линия соответствует закону, восстановленному в классе дробно-рациональных функций. В качестве за-

конов неоднородности взяты возрастающий  $\varphi(\xi_3) = 1 + \xi_3$  (рис. 1, а) и убывающий  $\varphi(\xi_3) = 2 - \xi_3$  (рис. 1, б), коэффициент Пуассона в обоих случаях принят равным  $\nu = 0,3$ . Значение коэффициента Пуассона по формуле (1.9) восстанавливается практически точно. Погрешность восстановления параметров в случае, представленном на рис. 1, а, составила для  $\varphi_0$  8,98 %, для  $\varphi_1$  – 6,67 %; на рис. 1, б  $\varphi_0$  – 11,9 %,  $\varphi_1$  – 6,442 %.

Поскольку в описанном подходе восстанавливаются параметры законов  $f_2(\xi_3)$  и  $f_1(\xi_3) + 2f_2(\xi_3)$ , погрешность определения закона  $f_1(\xi_3)$  в некоторых случаях может достигать порядка 40 %, однако даже в этом случае удается определить характер монотонности неоднородных свойств полосы.

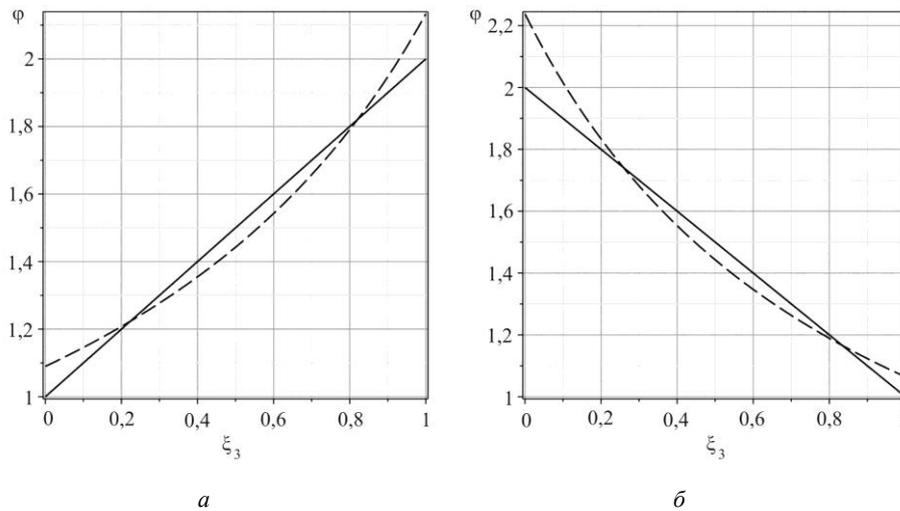


Рис. Результаты восстановления модуля Юнга: а – возрастающий закон; б – убывающий закон

Fig. The results of the restoration of Young's modulus, (a) the increasing law, (b) the decreasing law

## 2. Основные схемы исследования коэффициентных ОЗ по определению одной или нескольких функций при анализе установившихся колебаний

Некоторые общие результаты исследования коэффициентных ОЗ весьма многочисленны и представлены выше. Среди коэффициентных задач теории упругости наиболее детально изучены одномерные ОЗ для полупространства в рамках нестационарных постановок [2, 7], базирующиеся на анализе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, для слоистых структур при анализе толщинных колебаний и стержневых структур при анализе продольных и изгибных колебаний [17], опирающиеся на итерационные процессы и метод регуляризации А. Н. Тихонова [1].

### 2.1. Первая постановка. Ограничения на нагрузки

Весьма часто при решении ОЗ особенности нагружения и съема информации могут быть проанализированы из первой постановки [17], в которой в качестве

дополнительной информации заданы компоненты физических полей внутри тела, а не на его границе. В этом случае решение обратной задачи приводится к проблеме решения либо линейного операторного уравнения с компактным оператором, либо к задаче Коши для уравнения (или системы уравнений) в частных производных первого порядка.

Типичными примерами таких постановок являются следующие задачи

**Пример 1. Задача об определении переменного модуля Юнга** при анализе изгибных колебаний балки длиной  $L$ . Для простоты будем считать плотность постоянной и осуществим обезразмеривание задачи. Введем безразмерную координату  $\xi = \frac{x}{L}$ , функцию безраз-

мерной жесткости  $D(\xi) = \frac{EI}{E_0 I_0}$ , а также спектральный

параметр, связанный с частотой колебаний  $k^4 = \frac{\rho \omega^2 FL^4}{E_0 I_0}$ ,

где  $E_0$  – некоторое характерное значения модуля Юнга,

в частности максимальное (далее будем обозначать введенную безразмерную координату  $\xi$  через  $x$ ). Таким образом, основное уравнение примет вид

$$(D(x)w''(x))'' - k^4 w(x) = 0. \quad (2.1)$$

Будем считать, что левый конец балки жестко защемлен, а на правом приложена зондирующая нагрузка, в качестве которой используется сосредоточенный момент либо сосредоточенная сила. Граничные условия в первом случае (сосредоточенный момент) принимают вид

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) = 0, \quad D(1) \cdot w''(1) = 1, \\ (D(x) \cdot w''(x))'(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

а граничные условия во втором случае (сосредоточенная сила) имеют вид

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) = 0, \quad D(1) \cdot w''(1) = 0, \\ (D(x) \cdot w''(x))'(1) = 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Коэффициентная ОЗ состоит в нахождении функции  $D(x)$ , если известна функция  $w(x, k_0) = w(x)$ . Интегрируя (2.1) относительно  $D(x)$ , получим, что решение для граничных условий (2.2) имеет вид

$$D(x) = (1 - k^4 \int_x^1 (x - \xi) w(\xi) d\xi (w''(x))^{-1},$$

а для граничных условий (2.3)

$$D(x) = (x - 1 - k^4 \int_x^1 (x - \xi) w(\xi) d\xi (w''(x))^{-1}.$$

Обратим внимание, что на частотах ниже первой резонансной частоты  $w''(x)$  отлично от нуля и первая формула дает искомое решение, а вторая не позволяет его строить в точке  $x = 1$ , поскольку  $w''(1) = 0$ . Причина этого в свойствах задачи Коши, возникающей при анализе ОЗ. Действительно, для граничных условий (2.2) формируются данные Коши для  $D(1), D'(1)$ , а для граничных условий (2.3) данные Коши недоопределены, поскольку  $D(1)$  не может быть определено из граничных условий. Таким образом, исходя из первой постановки можно выяснить, какая нагрузка более благоприятна для построения решения ОЗ; в рассматриваемом случае это приложение момента на конце балки.

**Пример 2. Задача об определении переменных коэффициентов Ляме** при анализе колебаний прямоугольника. Пусть в прямоугольнике  $S = [0, l] \times [-b, b]$  возбуждаются колебания с частотой  $\omega$  двухкомпонентной нагрузкой, приложенной к грани  $x_1 = l$ , граница  $x_1 = 0$  заземлена, на остальной части границы нагрузки отсутствуют. Краевая задача при переменных упругих характеристиках имеет вид

$$\begin{aligned} (\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}))_{,1} + (\mu(u_{1,2} + u_{2,1}))_{,2} + \\ + (\mu(2u_{1,1}))_{,1} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ (\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}))_{,2} + (\mu(u_{1,2} + u_{2,1}))_{,1} + \\ + (\mu(2u_{2,2}))_{,2} + \rho\omega^2 u_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} u_i|_{x_i=0} = 0, (\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + \mu(2u_{1,1}))|_{x_1=l} = \\ = P_1, \mu(u_{1,2} + u_{2,1})|_{x_1=l} = P_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что краевая задача (2.4)–(2.5) представляет собой задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно двух неизвестных функций  $\lambda(x_1, x_2)$  и  $\mu(x_1, x_2)$ ; ее решение может быть построено численно на основе сплайн-аппроксимаций для вычисления производных и методик анализа задач Коши для этого вида систем уравнений [31]. Для того чтобы сформировать задачу Коши для этих функций, необходимо исходя из (2.5) определить значения искомых функций на границе  $x_1 = l$ . В работе [32] сформулированы условия на нагрузки, которые обеспечивают формирование корректных данных Коши для произвольной области; в настоящем случае по крайней мере необходимо, чтобы  $P_2 \neq 0$ , т.е. чтобы на этой грани была задана ненулевая касательная нагрузка, поскольку в противном случае данные Коши оказываются недоопределенными, ибо не задано  $\mu(l, x_2)$ .

Таким образом, базируясь на этих двух примерах, можно констатировать, что уже на этапе постановки задачи выделяются классы нагрузок, при которых невозможно построить единственное решение ОЗ.

## 2.2. Вторая постановка. Итерационные процессы

Вторая постановка ОЗ для моделей теории упругости, в которой задано поле смещений на границе тела в некотором частотном диапазоне, приводит к существенно нелинейной некорректной проблеме. Наиболее эффективным способом нахождения искомых функций, характеризующих упругие свойства, является построение итерационного процесса, при реализации которого происходит уточнение некоторых начальных приближений простой структуры – постоянных или линейных. Проиллюстрируем реализацию на модели теории упругости. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой  $\omega$  ограниченной области  $V$  с границей  $S = S_u \cup S_\sigma$ , занятой упругой средой,  $n_j$  – компоненты единичного вектора внешней нормали к  $S$ .

Постановка прямой задачи имеет вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.7)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i. \quad (2.8)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  – переменные параметры Ляме, являющиеся гладкими функциями координат;  $\rho$  – плотность среды. Сформулируем ОЗ определения этих коэффициентов дифференциального оператора и собственно полей смещений внутри  $V$  по дополнительной информации вида

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (2.9)$$

Такая постановка соответствует измерению поля перемещений на части границы  $S_{\sigma_0}$  в некотором диапазоне частот, где  $S_{\sigma_0}$  – часть, на которой нагрузка либо известна, либо равна нулю. Понятно, что в первую очередь необходимо выяснить, достаточно ли такой информации для того, чтобы найти все характеристики, или требуется изменить вид нагружения и область приложения нагрузки, сформулировать еще одну или несколько задач подобного вида и решать получающиеся задачи совместно. Изложим некоторые общие подходы к исследованию задачи об отыскании функций в соответствии с [17]. Поскольку задача имеет переменные коэффициенты и построить ее решение в явном виде и сформировать операторные уравнения для решения ОЗ невозможно, то для ее решения используется итерационная схема, на каждом шаге которой решается прямая задача с некоторыми законами неоднородности, полученными на предыдущем этапе, и формируется линейное операторное уравнение с компактным оператором для нахождения поправок. Начальный шаг такого процесса базируется на нахождении закона неоднородности в простом классе функций, например, линейном. Основная проблема на этом пути – формирование операторного соотношения для поправки. Для этой цели используется процедура линеаризации, причем полевые функции первого приближения удовлетворяют неоднородной краевой задаче, а в правые части уравнений входят искомые поправки. Формирование операторного уравнения основано либо на слабой постановке, либо на соотношении разрешимости неоднородной краевой задачи. Продемонстрируем эту схему на описанной выше задаче. Построим операторное соотношение, связывающее законы изменения параметров Ляме и плотность. Применение описанной выше процедуры линеаризации приводит к следующему операторному соотношению на каждом шаге итерационного процесса [35]:

$$\int_V 2L(u_i^{(n-1)}, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}, \rho^{(n)})dV - \int_{S_\sigma} p_i(f_i - u_i^{(n-1)})dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (2.10)$$

причем

$$2L(u_i^{(n-1)}, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}, \rho^{(n)}) = \rho^{(n)}\omega^2 u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} - \lambda^{(n)}(u_{k,k}^{(n-1)})^2 - 2\mu^{(n)}(u_{i,j}^{(n-1)} + u_{j,i}^{(n-1)})(u_{i,j}^{(n-1)} + u_{j,i}^{(n-1)})$$

– есть условный лагранжиан для тела, поскольку материальные характеристики соответствуют  $n$  итерации, а компоненты смещений соответствуют  $n-1$  итерации. Это равенство служит базовым операторным уравнением первого рода с вполне непрерывным оператором, позволяющим определять поправки к модулям и плотности, начиная с некоторого начального приближения. Отметим, что одного равенства (2.10) недостаточно для определения всех неизвестных функций. Дополнительные уравнения такого же вида, как описано выше, получаются путем изменения места приложения нагрузки или ее структуры.

**Пример 3.** Приведем пример построения системы операторных уравнений на каждой итерации для нахождения модуля Юнга, модуля сдвига и плотности для функционально-градиентного материала. В этом случае система независимых экспериментов по их определению реализуется для консольно закрепленного стержня постоянного сечения длиной  $l$  при анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний.

ОЗ на базе продольных колебаний стержня переменной жесткости на основании (2.10) (достаточно ввести гипотезы, соответствующие продольным колебаниям, и подсчитать кинетическую и потенциальную энергию) приводит к следующему уравнению Фредгольма первого рода для нахождения поправок на каждой итерации:

$$\int_0^l ((u^{(n-1)}(x, \omega))^n)^2 E^{(n)}(x)dx - \omega^2 \int_0^l (u^{(n-1)}(x, \omega))^2 \rho^{(n)}(x)dx = -P_0(f_1(\omega) - u^{(n-1)}(l, \omega)), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (2.11)$$

где  $P_0 = PF^{-1}$ ;  $P$  – сила, приложенная на конце стержня;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $E(x), \rho(x)$  – соответственно переменные модуль Юнга и плотность;  $f_1(\omega)$  – заданная АЧХ конца  $x = l$  стержня.

ОЗ на базе изгибных колебаний на основании (2.10) приводит к следующему уравнению Фредгольма первого рода для нахождения поправок на каждой итерации:

$$\int_0^l ((w^{(n-1)}(x, \omega))^n)^2 E^{(n)}(x)dx - \gamma\omega^2 \int_0^l (w^{(n-1)}(x, \omega))^2 \rho^{(n)}(x)dx = M_{10}(f_2(\omega) - (w^{(n-1)}(l, \omega))'), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4] \quad (2.12)$$

Здесь отметим, что предполагается задание изгибающего момента  $M_1$  на конце в соответствии с соотношениями, изложенными выше при анализе первой

постановки ОЗ ( $M_{10} = MJ^{-1}$ ), и измерение соответственно угла поворота концевого сечения  $f_2(\omega)$  как функции частоты  $\omega$ ,  $\gamma = FJ^{-1}$ ;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $J$  – момент инерции сечения. Система уравнений Фредгольма первого рода является базовой при нахождении поправок для модуля упругости и плотности. Отметим некоторые особенности строения ядер этой системы. Все ядра являются неотрицательными. При этом в силу условий нагружения ядра при  $E^{(n)}(x)$  строго положительны, а ядра при  $\rho^{(n)}(x)$  неотрицательны, однако обращаются в ноль при  $x = 0$ . Несмотря на регуляризующие процедуры в рамках метода А. Н. Тихонова, в силу этого свойства ядер плотность определяется с достаточно большой погрешностью в месте закрепления стержня.

Таким образом, представлен итерационный процесс, на каждом шаге которого необходимо решать прямую задачу с переменными характеристиками, найденными на предыдущем этапе, и систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода для нахождения поправок. Обычно выход из итерационного процесса осуществляется при малости норм правых частей в интегральных уравнениях или по числу итераций.

После нахождения функций  $E(x), \rho(x)$  итерационный процесс для определения функции, задающей закон

изменения модуля сдвига  $G(x)$ , формируется согласно следующему уравнению Фредгольма:

$$\int_0^l ((v^{(n-1)}(x, \omega))')^2 G^{(n)}(x) dx = -M_{20}(f_3(\omega) - v^{(n-1)}(l, \omega)), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_6], \quad (2.13)$$

где  $v(x, \omega)$  – угол поворота,  $M_{20} = MJ_p^{-1}$ ;  $M$  – крутящий момент, приложенный на конце  $x = l$ ;  $J_p$  – полярный момент;  $f_3(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика угла закручивания конца стержня.

Различные аспекты вычислительных экспериментов и исследование сходимости итерационных процессов в зависимости от характера идентифицируемых функций (монотонные, немонотонные), исследование влияния зашумления входной информации представлены в [17].

### Благодарность

Работа выполнена при поддержке РФФ (код проекта № 18-11-00069).

### Acknowledgment

The work was supported by The Russian Science Foundation (Project Code 18-11-00069).

### Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 287 с.
2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 261 с.
3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
4. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 168 с.
5. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. – Новосибирск: Наука, 1988. – 184 с.
6. Численные методы решения некорректных задач / Тихонов А.Н. [и др.] – М.: Наука, 1990. – 230 с.
7. Яхно В.Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. – Новосибирск: Наука, 1990. – 304 с.
8. Bui H.D. Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. – CRC Press, Boca Raton, FL, 1994. – 224 p.
9. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 206 с.
10. Isakov V. Inverse problems for PDE. – Springer-Verlag, 2005. – 284 p.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
12. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problems in elasticity // Inverse Probl. – 2005. – No. 21. – P. 1–50.
13. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с.
14. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 458 с.
15. Bal G. Introduction to Inverse Problems. – New York: Columbia University, 2012. – 205 p.
16. Neto F.D.M., Neto A.J.S. An Introduction to Inverse Problems with Applications. – Berlin: Springer, 2013. – 255 p.
17. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. – М.: Физматлит, 2019. – 272 с.
18. Данилаев П.Г. Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения. – Казань: УНИПРЕСС, 1998. – 128 с.
19. Костин В.А., Торопов М.Ю., Снегуренко А.П. Обратные задачи прочности летательных аппаратов. – Казань: Изд-во КГТУ, 2002. – 247 с.
20. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
21. Бочарова О.В., Ватульян А.О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. – 2009. – Т. 55, № 3. – С. 281–288.
22. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 319 с.
23. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. – М.: Физматлит, 2006. – 320 с.
24. Ватульян А.О. Явруян О.В. Идентификация композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 174–180.
25. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с. (R. Bellman, R. Kalaba, Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems, Elsevier, New York, 1965).

26. Ватульян А.О., Сухов Д.Ю. Об одном методе определения параметров упругих потенциалов // Экологический вестник ЧЭС. – 2012. – №4. – С. 27-32.

27. Баранов И.В., Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычислительные технологии. – 2006. – № 3. – С.14-25.

28. Лу Л.-Ю., Жанг Б.-К. Нахождение слоя с малой скоростью сдвиговых волн релеевской волной с помощью генетических алгоритмов // Акуст. журн. – 2006. – Т. 52, № 6. – С. 811–824.

29. Шифрин Е.И. Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // Изв. РАН. МТГ. – 2010. – № 3. – С. 131–142.

30. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. – 2009. – № 6. – С. 83–89.

31. Ватульян А.О., Кашталыян Д.О. Об определении зоны деструкции в упругой балке // Изв вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естеств. науки. – 2015. – № 4. – С. 29–34.

32. Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18. – Вып. 4. – С. 421–432.

33. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1934. – 181 с.

34. Ватульян А.О., Гукасян Л.С., Недин Р.Д. О задаче Коши в теории коэффициентных обратных задач для упругих тел // Владикавказский математический журнал. – 2016. – Т. 18. – Вып. 2. – С. 31–40.

35. Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Докл. РАН. – 2005. – Т. 405, № 3. – С. 343–345.

## References

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniia nekorrektnykh zadach [Methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka, 1979, 287 p.

2. Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1984, 261 p.

3. Alifanov O.M., Artiukhin E.A., Rumiantsev S.V. Ekstremal'nye metody resheniia nekorrektnykh zadach [Extreme methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka, 1988, 288 p.

4. Kabanikhin S.I. Proektsionno-raznostnye metody opredeleniia koeffitsientov giperbolicheskikh uravnenii [Projection-difference methods for determining the coefficients of hyperbolic equations]. Novosibirsk, Nauka, 1988, 168 p.

5. Bukhgeim A.L. Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach [Introduction to the theory of inverse problems]. Novosibirsk, Nauka, 1988, 184 p.

6. Tikhonov A.N., Goncharkii A.V., Stepanov V.V., Iagola A.G. Chislennyye metody resheniia nekorrektnykh zadach [Numerical methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka, 1990, 230 p.

7. Iakhno V.G. Obratnye koeffitsientnye zadachi dlia differentsial'nykh uravnenii uprugosti [Inverse coefficient problems for differential equations of elasticity]. Novosibirsk, Nauka, 1990, 304 p.

8. Bui H.D. Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, 224 p.

9. Denisov A.M. Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, MGU, 1994, 206 p.

10. Isakov V. Inverse problems for PDE. Springer-Verlag, 2005, 284 p.

11. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Chislennyye metody resheniia obratnykh zadach matematicheskoi fiziki [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow, Editorial URSS, 2004, 480 p.

12. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problems in elasticity. Inverse Probl, 2005, no. 21, pp. 1-50.

13. Vatulyan A.O. Obratnye zadachi v mekhanike deformiruемого твердого тела [Inverse problems in the mechanics of a deformable solid]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 223 p.

14. Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi [Inverse and incorrect problems]. Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 458 p.

15. Bal G. Introduction to Inverse Problems. New York, Columbia University, 2012, 205 p.

16. Neto F.D.M., Neto A.J.S. An Introduction to Inverse Problems with Applications. Berlin, Springer, 2013, 255 p.

17. Vatulyan A.O. Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019, 272 p.

18. Danilaev P. G. Koehffitsientnye obratnye zadachi dlya uravnenij parabolicheskogo tipa i ikh prilozheniya [Inverse coefficient problems for parabolic equations and their applications]. Kazan, UNIPRESS Publ., 1998, 128 p.

19. Kostin V.A., Toropov M.YU., Snegurenko A.P. Obratnye zadachi prochnosti letatel'nykh apparatov [Inverse problems of the strength of aircraft]. Kazan, KSTU Publ., 2002, 247 p.

20. Akhtiamov A. M. Teoriia identifikatsii kraevykh uslovii i ee prilozheniia [Theory of identification of boundary conditions and applications]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 272 p.

21. Bocharova O.V., Vatulyan A.O. O the reconstruction of density and Young's modulus of an inhomogeneous rod. Acoustical Physics. 2009. vol. 55. no. 3. pp. 281-288.

22. Alberg Dzh., Nil'son E., Uolsh Dzh. Teoriia splainov i ee prilozheniia [Spline Theory and Applications]. Moscow, Mir, 1972, 319 p.

23. Gladkov L.A., Kureichik V.V., Kureichik V.M. Geneticheskie algoritmy [Genetic algorithms]. Moscow, Fizmatlit, 2006, 320 p.

24. Vatulyan A.O. Yavruyan O.V. Identifikatsiia kompozitsionnykh materialov [Identification of composite materials] Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2007, vol. 13. no.2. pp. 174-180.

25. R. Bellman, R. Kalaba, Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems, Elsevier, New York, 1965.

26. Vatulyan A.O., Sukhov D.Yu. Ob odnom metode opredeleniia parametrov uprugikh potentsialov [On a method for determining the parameters of elastic potentials]. Ekologicheskii vestnik ChES, 2012, no.4, pp. 27-32.

27. Baranov I.V., Vatulyan A.O., Solov'ev A.N. Ob odnom geneticheskom algoritme i ego primenenii v obratnykh zadachakh identifikatsii uprugikh sred [On a genetic algorithm and its application in inverse problems of identification of elastic media]. Vychislitel'nye tekhnologii, 2006, no. 3, pp. 14-25.

28. Lu L.-Ju., Zhang B.-K. Nakhozhdenie sloia s maloi skorost'iu sdvigovykh voln releevskoi volnoi s pomoshch'iu

geneticheskikh algoritmov [Finding a layer with a low shear wave velocity of the Rayleigh wave using genetic algorithms]. *Akust. zhurn*, 2006, vol. 52, no.6, pp. 811-824.

29. Shifrin E.I. Ellipsoidal defect identification in an elastic body from the results of a uniaxial tension (compression) test. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 417-426.

30. Il'gamov M.A., Khakimov A.G. Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2009, vol. 45, no. 6, pp. 430-435.

31. Vatulyan A.O., Kashtalyan D.O. Ob opredelenii zony destruktzii v uprugoi balke [On the determination of the zone of destruction in the elastic beam]. *Izv vuzov. Severo-Kavkazskii region. Ser. Estestv. Nauki*, 2015, no.4, pp. 29-34.

32. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K., Poddubny A.A. O nekotorykh modeliakh indentirovaniia funktsional'no-gradientnykh pokrytii [On Some Models of Indentation for Functionally-

Graded Coatings]. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 421–432. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432.

33. Giunter N. M. Integrirovanie uravnenii pervogo poriadka v chastnykh proizvodnykh [Integration of first order partial differential equations]. M., L. GITTL, 1934, 181 p.

34. Vatulyan A.O., Gukasyan L.S., Nedin R.D. O zadache Koshi v teorii koeffitsientnykh obratnykh zadach dlia uprugikh tel [On the Cauchy problem in the theory of coefficient inverse problems for elastic bodies]. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 31-40.

35. Vatulyan A.O. Integral'nye uravneniia v obratnykh zadachakh opredeleniia koeffitsientov differentsial'nykh operatorov teorii uprugosti [Integral equations in inverse problems of determining the coefficients of differential operators in the theory of elasticity]. *Doklady RAN*, 2005, vol. 405, no. 3, pp.343-345.