



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.05

УДК 539.3

## ПОСТРОЕНИЕ МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК, ПЛАСТИН И БАЛОК НА ОСНОВЕ ОБРАЗУЮЩИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**А.Д. Матвеев**

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 12 апреля 2019 г.  
Принята: 17 сентября 2019 г.  
Опубликована: 17 октября 2019 г.

#### Ключевые слова:

упругость, композиты, многосеточные конечные элементы, образующие конечные элементы, оболочки вращения, цилиндрические оболочки, пластины и балки.

### АННОТАЦИЯ

На практике широко применяются композитные (однородные) оболочки, пластины и балки сложной формы. Расчеты методом конечных элементов трехмерных композитных тел с учетом их структуры и сложной формы сводятся к построению дискретных моделей высокой размерности. Для понижения размерности дискретных моделей эффективно применяются многосеточные конечные элементы (МНКЭ). При построении композитного  $m$ -сеточного конечного элемента ( $m$ СКЭ) используется  $m$  вложенных сеток. Мелкая сетка порождена базовым разбиением  $m$ СКЭ, которое учитывает композитную структуру и форму  $m$ СКЭ. На  $m - 1$  крупных сетках определяются функции перемещений, применяемые для понижения размерности базового разбиения, что позволяет проектировать  $m$ СКЭ малой размерности. Функции перемещений и напряженное состояние в МНКЭ, которое описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости, представляются в локальных декартовых системах координат. Особенность МНКЭ состоит в следующем. При построении МНКЭ (без увеличения их размерности) можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения, которые сколь угодно точно учитывают сложную неоднородную структуру и форму МНКЭ, и в этом случае сколь угодно точно описывается трехмерное напряженно-деформированное состояние в МНКЭ. В данной работе предложен метод образующих конечных элементов (КЭ) для построения трехмерных композитных МНКЭ двух типов сложной формы. Суть предлагаемого метода состоит в следующем. Область МНКЭ 1-го типа получается путем поворота заданного плоского образующего односеточного КЭ (сложной формы) вокруг заданной оси на заданный угол, МНКЭ 2-го типа – путем параллельного перемещения образующего КЭ в заданном направлении на заданное расстояние. МНКЭ 1-го типа применяются для расчета композитных оболочек вращения, МНКЭ 2-го типа – для расчета композитных цилиндрических оболочек (с переменным радиусом кривизны срединной поверхности), пластин и балок сложной формы. Основные достоинства предлагаемых МНКЭ состоят в том, что они учитывают сложную неоднородную и микронеоднородную структуру и форму тел, образуют дискретные модели малой размерности и порождают приближенные решения с малой погрешностью.

© ПНИПУ

© Матвеев Александр Данилович – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., e-mail: mtv241@mail.ru.

Alexander D. Matveev – CSc in Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: mtv241@mail.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



# CONSTRUCTION OF MULTIGRID FINITE ELEMENTS TO CALCULATE SHELLS, PLATES AND BEAMS BASED ON GENERATING FINITE ELEMENTS

A.D. Matveev

Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 12 April 2018  
Accepted: 17 September 2019  
Published: 17 October 2019

### Keywords:

elasticity, composites, multigrid finite elements, generating finite elements, shells of revolution, cylindrical shells, plates and beams.

## ABSTRACT

In practice, composite shells, plates and beams of complex shapes are widely used. Finite element calculations of three-dimensional composite bodies, taking into account their structure and complex shape are reduced to the construction of high dimensional discrete models. To reduce the discrete model dimension, multigrid finite elements (MgFE) are effectively used. When constructing  $m$  – grid finite element ( $mgFE$ )  $m$  nested grids are used. The fine grid is generated by the base partitioning of  $mgFE$ , taking into account its heterogeneous structure and shape. On  $m - 1$  coarse grids, the displacement functions used to reduce the dimension of the base partitioning are determined, which allows one to develop a small dimensional MgFE. The displacement functions and stress state in the MgFE described by the equations of the three-dimensional elasticity problems are represented in local rectangular coordinates. Characteristic properties of MgFE are as follows. When constructing MgFE (without increasing their dimension), arbitrarily small basic partitions can be used arbitrarily closely taking into account the complex inhomogeneous structure and shape of the MgFE, and arbitrarily closely describing the three-dimensional stress state in the MgFE. The present paper proposes a method of generating finite elements (FE) to construct complex-shaped three-dimensional composite multi-grid finite elements (MgFE) of two types. The principal of the generating FE method is as follows. The 1st type MgFE region is obtained by turning a given flat generating single-grid FE (complex shape) around a given axis by a given angle, the 2nd type MgFE region by a parallel moving the generated FE in a given direction to a specified distance. The 1st type MgFEs are used to calculate the composite rotational shells, the 2nd type MgFE are for composite cylindrical complex-shaped shells (with a variable radius of curvature), plates and beams. The advantages of the proposed MgFE are to take into account the complex heterogeneous and micro-heterogeneous body structure and shape, to give rise to small-dimensional discrete models and high accuracy solutions.

© PNRPU

## Введение

Метод конечных элементов (МКЭ) [1–7] широко используется при расчете упругих оболочек [8–22], пластин [14, 16, 22] и балок. Построение криволинейных конечных элементов (КЭ) при расчете оболочек сопряжено с различными трудностями [3], в частности, связанными с исключением смещений в КЭ как жесткого целого [8], выполнением условий непрерывности, что необходимо для сходимости конечно-элементных решений [4]. Эти трудности объясняются тем, что в технических теориях оболочек, пластин и балок используются гипотезы, которые накладывают определенные ограничения на поля перемещений, деформаций и напряжений, что порождает неустранимые погрешности в решениях и затрудняет их применение. В работе [22] представлен обзор основных вариантов использования МКЭ для расчета композитных пластин и оболочек в двухмерной постановке. Расчет композитных оболочек по МКЭ в постановке трехмерной задачи теории упругости [23] с учетом их структуры сводится к построению базовых дискретных моделей высокой размерности, порядка  $10^9 \div 10^{12}$ . Применение для таких дискретных моделей программ расчета ANSYS, NASTRAN и др. [3] требует больших ресурсов ЭВМ. Кроме того,

увеличение размерностей дискретных моделей приводит к резкому возрастанию погрешности вычислений ЭВМ, определить точное значение которой трудно. Для понижения размерностей дискретных моделей композитных тел эффективно применяются многосеточные конечные элементы (МнКЭ) [24–28], в которых реализуется трехмерное напряженное состояние и которые используются в методе многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [26–28]. ММКЭ реализуется на основе выполнения принципа возможных перемещений [29] для каждого МнКЭ и для всей дискретной модели тела, на базе алгоритмов МКЭ. Основные достоинства ММКЭ:

1. В ММКЭ (без увеличения размерностей МнКЭ) можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения тел (т.е. МнКЭ), что позволяет сколь угодно точно учитывать их сложную форму, неоднородную и микрон неоднородную структуру, сложный характер закрепления и нагружения тел.

2. Реализация ММКЭ (на основе базовых моделей тел) требует значительно (в  $10^3 \div 10^6$  раз) меньше памяти ЭВМ и временных затрат, чем реализация МКЭ для базовых моделей, т.е. ММКЭ более экономичный, чем МКЭ.

3. В ММКЭ применяются однородные и композитные МнКЭ, при построении которых используются

вложенные сетки, что расширяет область применения ММКЭ. В МКЭ применяются односеточные КЭ, которые являются однородными. Отметим, что при решении краевых задач всегда вместо МКЭ можно применить ММКЭ, так как всегда вместо односеточных КЭ можно использовать МнКЭ. Поскольку при построении  $n$ -сеточного КЭ используется не одна, а  $n$  вложенных сеток ( $n \geq 2$ ), то ММКЭ можно считать обобщением МКЭ, т.е. МКЭ – частный случай ММКЭ. Отсюда следует, что если в расчетах тел на базе МКЭ применяются МнКЭ, то в этом случае, по сути, реализуется ММКЭ.

В данной работе для проектирования трехмерных композитных и однородных МнКЭ двух типов сложной формы предложен метод образующих КЭ, который отличается от известных подходов построения МнКЭ [24–28]. Согласно этому методу область МнКЭ получается путем заданного перемещения в трехмерном пространстве плоского односеточного КЭ заданной (сложной) формы и заданного порядка (с заданным расположением и количеством узлов), который будем называть образующим КЭ. Область МнКЭ 1-го типа получается путем поворота образующего КЭ вокруг заданной оси на заданный угол, область МнКЭ 2-го типа – путем параллельного перемещения образующего КЭ вдоль заданной прямой на заданное расстояние. Предлагаемый метод позволяет проектировать МнКЭ, у которых один характерный размер значительно больше (МнКЭ балочного типа) или меньше (МнКЭ пластинчатого типа) других. Узлы образующего КЭ являются узлами крупной сетки МнКЭ, причем узлы всякого поперечного сечения крупной сетки МнКЭ являются узлами образующего КЭ. Такой подход упрощает процедуру построения аппроксимирующих функций перемещений на крупных сетках МнКЭ сложной формы, в которой используются базисные функции образующих КЭ, и по направлению движения образующих КЭ – полиномы Лагранжа. МнКЭ 1-го типа применяются для расчета композитных (однородных) оболочек вращения, МнКЭ 2-го типа – композитных (однородных) цилиндрических оболочек (с переменным радиусом кривизны срединной поверхности), пластин и балок сложной формы.

### 1. Многосеточные КЭ 1-го типа

Рассмотрим процедуры построения МнКЭ 1-го типа для расчета композитных и однородных оболочек вращения, колец сложной формы и валов, имеющих центральные круговые отверстия. Отметим, что МнКЭ 1-го типа могут применяться для расчета оболочечных конструкций, состоящих из фрагментов оболочек вращения. Например, овальная цилиндрическая оболочка [30] (главная часть фюзеляжа самолета, корпуса подводной лодки) состоит из фрагментов двух круговых цилиндрических оболочек различных радиусов.

Основные положения построения МнКЭ 1-го типа, используемых для анализа трехмерного напряженно-

деформированного состояния (НДС) композитных (однородных) оболочек вращения, рассмотрим на примере оболочечного двухсеточного КЭ (2сКЭ)  $V_d$  сложной формы, имеющего неоднородную структуру (рис. 1). Считаем, что между разномодульными изотропными однородными телами, представляющими неоднородную структуру 2сКЭ  $V_d$ , связи идеальны (т.е. на общих границах разномодульных однородных тел 2сКЭ  $V_d$  перемещения и напряжения непрерывны). Базовое разбиение  $R_d$  2сКЭ  $V_d$  состоит из криволинейных однородных 1сКЭ  $V_e$  1-го порядка,  $e=1, \dots, M$ ,  $M$  – общее число 1сКЭ  $V_e$ . Разбиение  $R_d$  учитывает неоднородную структуру (в рамках микроподхода), сложную форму 2сКЭ и порождает трехмерную криволинейную мелкую сетку  $h_d$ .

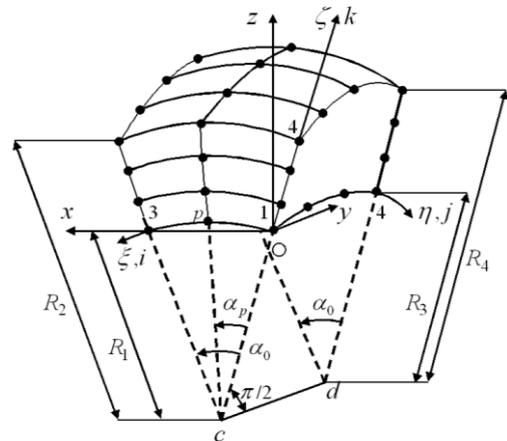


Рис. 1. Оболочечный 2сКЭ  $V_d$

Fig. 1. Shell-type 2gFE  $V_d$

На рис. 2 показано сечение мелкой сетки  $h_d$ . При построении 1сКЭ  $V_e$  используем уравнения трехмерной задачи теории упругости [23], записанные в локальной декартовой системе координат 1сКЭ  $V_e$  (более подробно в [25]). Следовательно, в 2сКЭ реализуется трехмерное НДС. На мелкой сетке определяется крупная сетка  $H_d$  2сКЭ  $V_d$ , т.е.  $H_d \subset h_d$ . Отметим, что в общем случае некоторые узлы крупных сеток МнКЭ могут не совпадать с узлами мелких сеток. Для 2сКЭ  $V_d$  введены три локальные системы координат: декартова  $Oxyz$ , криволинейная  $O\xi\eta\zeta$  и для узлов крупной сетки  $H_d$  2сКЭ – криволинейная целочисленная  $ijk$ , оси которой совпадают с осями  $O\xi, O\eta, O\xi$ . На оси  $O\xi$  расположены 3 узла сетки  $H_d$ , т.е.  $i=1, \dots, 3$ , на осях  $O\eta, O\xi$  – по 4 узла сетки  $H_d$ , т.е.  $j, k=1, \dots, 4$ , узлы сетки  $H_d$  отмечены точками, 36 узлов, на каждой оси  $i, j, k$  отмечен нумерацией только первый и последний узел (рис. 1, 2). Ось  $Oy$  лежит в плоскости  $O\eta\zeta$ , причем,  $Oy \perp O\zeta$ . Ось  $Ox$  проходит через крайние узлы сетки

$H_d$ , лежащие на оси  $O\xi$  (см. рис. 1),  $cd$  – ось оболочки. Образующий односеточный КЭ (1сКЭ)  $V_d^a$  для 2сКЭ  $V_d$  имеет 12 узлов крупной сетки  $H_d$ , которые отмечены точками (см. рис. 2). Боковые стороны 1сКЭ  $V_d^a$  параллельны и пунктиром продолжены до пересечения с осью  $cd$ . Область 2сКЭ  $V_d$  получается путем вращения образующего 1сКЭ  $V_d^a$  сложной формы вокруг оси  $cd$  на заданный угол  $\alpha_0$  (отвечающий разбиению оболочки на 2сКЭ),  $\alpha_0$  – угол раствора 2сКЭ  $V_d$ . С помощью узлов образующего КЭ (при его вращении) определяется крупная сетка 2сКЭ. Радиусы  $R_1, R_3$  ( $R_2, R_4$ ) описывают нижние (верхние) границы боковых граней 2сКЭ. На крупной сетке  $H_d$  определяем функции перемещений  $u_d, v_d, w_d$ .

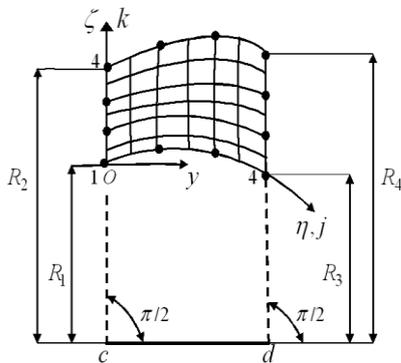


Рис. 2. Образующий 1сКЭ  $V_d^a$

Fig. 2. Forming 1gFE  $V_d^a$

Базисную функцию  $\psi_{ijk}$  для узла  $i, j, k$  крупной сетки  $H_d$  2сКЭ  $V_d$  ищем в форме

$$\psi_{ijk}(\alpha, y, \zeta) = N_{jk}(y, \zeta)L_i(\alpha), \quad (1)$$

где  $N_{jk}(y, \zeta)$  – базисная функция узла  $j, k$  1сКЭ  $V_d^a$ , отвечающая полиному  $P_d(y, \zeta)$  вида [2],  $P_d = a_1 + a_2y + a_3\zeta + a_4y\zeta + a_5y^2 + a_6\zeta^2 + a_7y^2\zeta + a_8y\zeta^2 + a_9y\zeta^3 + a_{10}y^3\zeta + a_{11}y^3 + a_{12}\zeta^3$ ,  $j, k = 1, \dots, 4$ ;  $L_i(\alpha)$  – полином Лагранжа 2-го порядка, имеющие вид

$$L_i(\alpha) = \prod_{p=1, p \neq i}^3 \frac{\alpha - \alpha_p}{\alpha_i - \alpha_p},$$

где  $\alpha_p$  ( $\alpha_i$ ) – угол раствора узла  $p$  (узла  $i$ ),  $i = 1, \dots, 3$  (см. рис. 1);  $\alpha$  – угол раствора точки  $r_\alpha$ , лежащей на оси  $O\xi$ .

Таким образом, базисные функции  $\psi_{ijk}$  2сКЭ  $V_d$  1-го типа представляются функциями формы образующего 1сКЭ  $V_d^a$  и полиномами Лагранжа (в направлении вра-

щения образующего КЭ вокруг оси  $cd$ ). Обозначим:  $N_\beta = \psi_{ijk}$ , где  $i = 1, \dots, 3$ ;  $j, k = 1, \dots, 4$ ;  $\beta = 1, \dots, 36$ . Используя (1), функции перемещений  $u_d, v_d, w_d$  представим в форме

$$u_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta u_\beta, \quad v_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta v_\beta, \quad w_d = \sum_{\beta=1}^{36} N_\beta w_\beta, \quad (2)$$

где  $N_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$  – базисная функция и перемещения  $\beta$ -го узла сетки  $H_d$ ;  $\beta = \overline{1, 36}$ .

Функционал полной потенциальной энергии  $\Pi_d$  базового разбиения  $R_d$  2сКЭ запишем в форме

$$\Pi_d = \sum_{e=1}^M \left( \frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (3)$$

где  $[K_e], \mathbf{P}_e, \delta_e$  – матрица жесткости, векторы узловых сил и перемещений 1сКЭ  $V_e$ , отвечающие локальной декартовой системе координат  $Oxyz$  2сКЭ  $V_d$  (см. рис. 1).

Используя (2), вектор узловых перемещений  $\delta_e$  базового 1сКЭ  $V_e$  выражаем через вектор узловых перемещений  $\delta_d$  крупной сетки  $H_d$  ( $\delta_d = \{u_\beta, v_\beta, w_\beta\}^T$ ), т.е.

$$\delta_e = [A_e^d] \delta_d, \quad (4)$$

где  $[A_e^d]$  – прямоугольная матрица,  $e = 1, \dots, M$ .

Подставляя (4) в (3) и выполняя условие  $\partial \Pi_d(\delta_d) / \partial \delta_d = 0$  [29], получаем матричное соотношение  $[K_d] \delta_d = \mathbf{F}_d$ , где

$$[K_d] = \sum_{e=1}^M [A_e^d]^T [K_e] [A_e^d], \quad \mathbf{F}_d = \sum_{e=1}^M [A_e^d]^T \mathbf{P}_e. \quad (5)$$

Здесь  $[K_d]$  – матрица жесткости и  $\mathbf{F}_d$  – вектор узловых сил 2сКЭ  $V_d$  1-го типа.

Отметим, что функции перемещений  $u_d, v_d, w_d$ , построенные на крупной сетке  $H_d$ , применяются для понижения размерности базового разбиения  $R_d$  2сКЭ  $V_d$ .

Решение, построенное для сетки  $H_d$  2сКЭ  $V_d$ , с помощью формулы (4) проецируем на мелкую сетку  $h_d$  базового разбиения  $R_d$  2сКЭ  $V_d$ , что дает возможность вычислять напряжения в любом 1сКЭ  $V_e$  базового разбиения  $R_d$ , т.е. определять напряжения в любой точке области 2сКЭ  $V_d$ .

Частный случай оболочки вращения, т.е. расчет упругой композитной круговой цилиндрической оболочки (срединная поверхность которой имеет один радиус кривизны) сложной формы с помощью МКЭ оболочечного типа рассмотрен в работе [25]. Базисные функции крупных сеток 2сКЭ в этом случае определяются в виде полиномов Лагранжа или с помощью известных

степенных полиномов 1, 2 и 3-го порядка [2, 6], записанных в локальных декартовых системах координат. Для верификации МКЭ оболочек вращения используется известная численная процедура, подробно описанная в работе [25]. Аналогично, с помощью процедур, изложенных в п. 1, проектируются 2сКЭ для расчета композитных колец сложной формы и валов, которые имеют центральные круговые отверстия.

**Замечание 1.** В силу (4) размерность вектора  $\delta_d$  (т.е. размерность 2сКЭ  $V_d$ ) не зависит от  $M$  – общего числа базовых КЭ  $V_e$ , из которых состоит область 2сКЭ  $V_d$ . Следовательно, можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения  $R_d$ , которые позволяют сколь угодно точно учитывать сложную форму, неоднородную (микрон неоднородную) структуру 2сКЭ  $V_d$ , сложный характер его закрепления и нагружения и сколь угодно точно описывать трехмерное напряженное состояние в 2сКЭ  $V_d$ . Итак, измельчение базового разбиения  $R_d$  не приводит к увеличению размерности 2сКЭ  $V_d$ .

Расчеты показывают, что измельчение базовых разбиений МКЭ приводит к уменьшению погрешности решений. Трехсеточные КЭ (3сКЭ) 1-го типа проектируются на основе 2сКЭ 1-го типа с помощью процедур, аналогичных процедурам в п. 1. Итак, при проектировании  $n$ -сеточного КЭ используются  $n-1$  образующих КЭ, причем, узлы  $n-1$  образующего КЭ создают крупную сетку  $n$ -сеточного КЭ. Однородные МКЭ оболочек вращения, колец и круглых валов с центральными круговыми отверстиями проектируются по процедурам п. 1. Важно отметить, что расчет однородных тел с применением МКЭ требует в  $10^2 \div 10^5$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовых моделей, при этом решения, отвечающие многосеточным и базовым дискретным моделям, мало отличаются друг от друга.

## 2. Многосеточные КЭ 2-го типа

Рассмотрим процедуры построения МКЭ 2-го типа, применяемые для расчета композитных и однородных цилиндрических оболочек, пластин и балок сложной формы, которые широко используются на практике.

### 2.1. Многосеточные КЭ для расчета цилиндрических оболочек сложной формы

Процедуру построения МКЭ 2-го типа, которые используются для анализа трехмерного НДС композитных (однородных) цилиндрических оболочек (с переменным радиусом кривизны срединной поверхности) сложной формы, рассмотрим на примере композитного 2сКЭ  $V_e^a$  (который используется в примере расчета цилиндрической оболочки, см. п. 3) с характерными размерами  $17h \times 24h \times 18h$ , имеющего прямоугольное отвер-

стие, сечение которого на рис. 3 закрашено;  $Oxyz$  – локальная декартовая система координат. Область 2сКЭ  $V_e^a$  получается путем параллельного перемещения образующего 1сКЭ  $V_a$  сложной формы (сечение отверстия закрашено, рис. 4) вдоль оси  $Oy$  на заданное расстояние  $d = 24h$ . Считаем, что между разномодульными изотропными однородными телами, представляющими неоднородную структуру 2сКЭ  $V_e^a$ , связи идеальны.

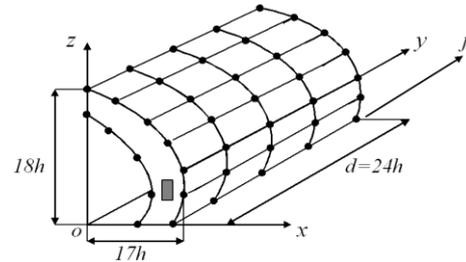


Рис. 3. Двухсеточный КЭ  $V_e^a$

Fig. 3. Two-mesh FE  $V_e^a$

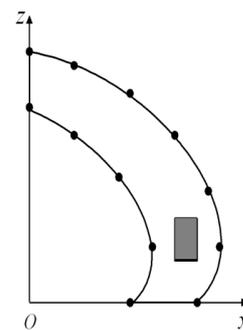


Рис. 4. Образующий 1сКЭ  $V_a$

Fig. 4. Forming 1gFE  $V_a$

Базовое разбиение  $R_a$  2сКЭ  $V_e^a$  состоит из однородных 1сКЭ  $V_m$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$  [2, 6],  $m = 1, \dots, M$ , где  $M$  – общее число 1сКЭ  $V_m$ . Разбиение  $R_a$  учитывает неоднородную структуру, сложную форму 2сКЭ  $V_e^a$  и порождает мелкую сетку  $h_a$ , в которую вложена крупная сетка  $H_a$  2сКЭ,  $H_a \subset h_a$ . Узлы крупной сетки  $H_a$  на рис. 3 отмечены точками, 60 узлов. Узлы образующего 1сКЭ  $V_a$  являются узлами крупной сетки  $H_a$ . С помощью узлов образующего КЭ (при его параллельном перемещении) определяется крупная сетка 2сКЭ. На рис. 4 1сКЭ  $V_a$  имеет 12 узлов, которые отмечены точками. В 1сКЭ  $V_m$  напряженное состояние описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости [23], записанными в локальной декартовой системе координат 1сКЭ  $V_m$ . Следовательно, в области 2сКЭ  $V_e^a$  реализуется трех-

мерное НДС. Паре чисел  $i, j$ , где  $i = 1, \dots, 12$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , определим целое  $\beta \geq 1$ ,  $\beta = 1, \dots, 60$ . Базисную функцию  $\psi_\beta(x, y, z)$  для узла  $\beta$  крупной сетки 2сКЭ  $V_e^a$  ищем в форме

$$\psi_\beta(x, y, z) = N_i(x, z)L_j(y), \quad (6)$$

где  $\beta = 1, \dots, 60$ ;  $N_i(x, z)$  – функция формы  $i$ -го узла образующего 1сКЭ  $V_a$ ,  $i = 1, \dots, 12$ , отвечающая полиному  $P(x, z)$ , который в локальной декартовой системе координат  $Oxz$  (см. рис. 4) имеет вид [2]

$$P(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9xz^3 + a_{10}x^3z + a_{11}x^3 + a_{12}z^3, \quad (7)$$

где  $L_j(y)$  – полином Лагранжа 4-го порядка,  $L_j(y) = \prod_{p=1, p \neq j}^5 \frac{y - y_p}{y_j - y_p}$ ,  $j = 1, \dots, 5$ ,  $y_p$  – координата узла  $p$  сетки  $H_a$ , лежащего на оси  $j$ , которая параллельна оси  $Oy$  (см. рис. 3).

В формуле (6) базисные функции  $\psi_\beta$  2сКЭ  $V_e^a$  2-го типа представляются функциями формы  $N_i(x, z)$  образующего 1сКЭ  $V_a$  и в направлении движения образующего 1сКЭ (т.е. по оси  $Oy$ ) – полиномами Лагранжа  $L_j(y)$ . Используя (6), функции перемещений  $u_a, v_a, w_a$  для крупной сетки  $H_a$  представим как

$$u_a = \sum_{\beta=1}^{60} N_\beta u_\beta, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^{60} N_\beta v_\beta, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^{60} N_\beta w_\beta, \quad (8)$$

где  $N_\beta, u_\beta, v_\beta, w_\beta$  – базисная функция и функция перемещения  $\beta$ -го узла сетки  $H_a$ ,  $\beta = \overline{1, 60}$ .

Отметим, что функции перемещений  $u_a, v_a, w_a$ , построенные на крупной сетке  $H_a$ , используются только для понижения размерности базового разбиения  $R_a$  2сКЭ  $V_e^a$  (см. п. 1). Используя функции перемещений (8), по алгоритмам, аналогичным алгоритмам в п. 1, определяем матрицу жесткости и вектор узловых сил 2сКЭ  $V_e^a$  2-го типа. Трехсеточные КЭ 2-го типа, которые применяются для расчета композитных (однородных) цилиндрических оболочек сложной формы, проектируются с применением 2сКЭ 2-го типа (см. рис. 3) на основе процедур, аналогичных процедурам в п. 1.

## 2.2. Многосеточные КЭ для расчета балок сложной формы

Процедуру построения МнКЭ 2-го типа, применяемых для анализа трехмерного НДС композитных и од-

нородных прямолинейных балок, рассмотрим на примере балочного композитного 2сКЭ  $V_p$ , имеющего сложную форму сечения. Пусть 2сКЭ  $V_p$  имеет отверстие прямоугольного сечения (на рис. 5 сечение заштриховано). Область 2сКЭ  $V_p$  получается путем параллельного перемещения образующего 1сКЭ  $V_p^a$  (сечение отверстия заштриховано, рис. 6) вдоль оси  $Oy$  на заданное расстояние  $d$ . Считаем, что между разномодульными изотропными однородными телами, представляющими неоднородную структуру 2сКЭ  $V_p$ , связи идеальны. Базовое разбиение  $R_p$  2сКЭ  $V_p$  состоит из трехмерных однородных 1сКЭ  $V_e$  1-го порядка, где  $e = 1, \dots, M$ . Разбиение  $R_p$  учитывает неоднородную структуру и сложную форму 2сКЭ  $V_p$  и порождает мелкую сетку  $h_p$ , в которую вложена крупная сетка  $H_p$  2сКЭ. Узлы сетки  $H_p$  отмечены точками, 48 узлов (см. рис. 5). Крупная сетка 2сКЭ определяется с помощью узлов образующего КЭ. Для 2сКЭ  $V_p$  введены две локальные системы координат: декартовая  $Oxyz$  и для узлов крупной сетки  $H_p$  – криволинейная целочисленная  $ijk$ , где  $i, j, k = 1, \dots, 4$ .

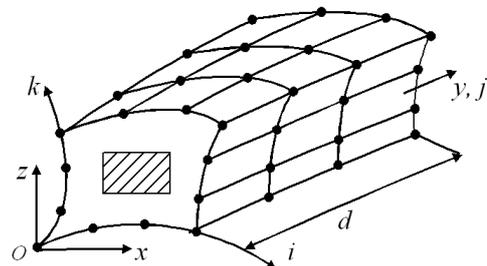


Рис. 5. 2сКЭ  $V_p$  балочного типа

Fig. 5. Beam-type 2gFE  $V_p$

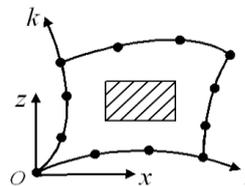


Рис. 6. Образующий 1сКЭ  $V_p^a$

Fig. 6. Forming 1gFE  $V_p^a$

В области 1сКЭ  $V_e$  напряженное состояние описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости [23], записанными в локальной декартовой системе координат КЭ  $V_e$ . Следовательно, в области 2сКЭ  $V_p$  реализуется трехмерное НДС. Узлы образующего 1сКЭ

$V_p^a$  3-го порядка являются узлами крупной сетки  $H_p$ , которые отмечены точками, 12 узлов (рис. 6). Базисную функцию  $\psi_{ijk}$  для узла  $i, j, k$  крупной сетки  $H_p$  определяем в виде

$$\psi_{ijk}(x, y, z) = N_{ik}(x, z)L_j(y), \quad (9)$$

где  $N_{ik}$  – базисная функция узла  $i, k$  образующего КЭ  $V_p^a$ , отвечающая полиному  $P(x, z)$  вида (7),  $i, k = 1, \dots, 4$ ;  $L_j(y)$  – полином Лагранжа 3-го порядка, имеющий вид  $L_j(y) = \prod_{p=1, p \neq j}^4 \frac{y - y_p}{y_j - y_p}$ , где  $j = 1, \dots, 4$ ,  $y_p$  – координата узла  $p$  сетки  $H_p$ , лежащего на оси  $Oy$  (т.е. на оси  $j$ ) (см. рис. 5).

Используя (9), функции перемещений  $u_p, v_p, w_p$  для сетки  $H_p$  запишем в виде

$$u_p = \sum_{\beta=1}^{48} N_{\beta} u_{\beta}, \quad v_p = \sum_{\beta=1}^{48} N_{\beta} v_{\beta}, \quad w_p = \sum_{\beta=1}^{48} N_{\beta} w_{\beta}, \quad (10)$$

где  $N_{\beta}, u_{\beta}, v_{\beta}, w_{\beta}$  – базисная функция и функция перемещения  $\beta$ -го узла сетки  $H_p$ ,  $\beta = \overline{1, 48}$ .

Отметим, что функции перемещений  $u_p, v_p, w_p$ , построенные на крупной сетке  $H_p$ , используются только для понижения размерности базового разбиения  $R_p$  2сКЭ  $V_p$  (см. п. 1). С помощью функций перемещений (10) по алгоритмам, аналогичным алгоритмам в п. 1, определяем матрицу жесткости и вектор узловых сил балочного 2сКЭ  $V_p$  2-го типа.

**Замечание 2.** Предложенный метод позволяет проектировать 2сКЭ, у которых один характерный размер значительно больше или меньше других. В направлении  $Oy$  большого размера 2сКЭ  $V_p$  целесообразно использовать высокий порядок аппроксимации перемещений (т.е. высокий порядок полиномов Лагранжа  $L_j(y)$ ), что позволяет уменьшить погрешность решения.

### 2.3. Многосеточные КЭ для расчета пластин сложной формы

Рассмотрим процедуру построения 2сКЭ 2-го типа, которые используются для анализа трехмерного НДС композитных и однородных пластин на примере пластинчатого 2сКЭ  $V_g^b$  сложной формы, который имеет неоднородную структуру (рис. 7),  $Oxuz$  – декартова система координат. Считаем, что между разномодульными изотропными однородными телами, представляющими неоднородную структуру 2сКЭ, связи идеальны.

Характерные размеры  $B, H$  2сКЭ  $V_g^b$  значительно больше размера  $h, h$  – толщина 2сКЭ. Область 2сКЭ  $V_g^b$  получается путем параллельного перемещения образующего 1сКЭ  $V_g$  (который имеет 9 узлов, отмечены точками, рис. 8) вдоль оси  $Oy$  на заданное расстояние  $h$ . С помощью узлов образующего КЭ (при его перемещении) определяется крупная сетка 2сКЭ  $V_g^b$  имеет 27 узлов, отмеченных точками на рис. 7. Базовое разбиение 2сКЭ  $V_g^b$  состоит из однородных КЭ 1-го порядка формы куба (прямоугольного параллелепипеда [2, 6]), в которых реализуется трехмерное НДС. Отметим, что базовые разбиения 2сКЭ могут быть сколь угодно мелкими, т.е. могут сколь угодно точно учитывать неоднородную структуру и сложную форму 2сКЭ.

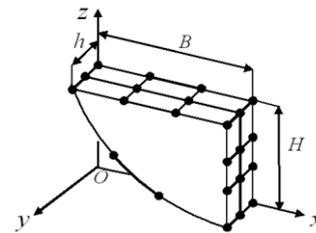


Рис. 7. Пластинчатый 2сКЭ  $V_g^b$

Fig. 7. Plate-type 2gFE  $V_g^b$

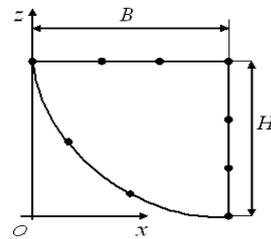


Рис. 8. Образующий 1сКЭ  $V_g$

Fig. 8. Forming 1gFE  $V_g$

Базисную функцию  $\psi_{\beta}(x, y, z)$  для узла  $\beta$  крупной сетки 2сКЭ  $V_g^b$  ищем в форме (6), где  $\beta = 1, \dots, 27$ ,  $N_i(x, z)$  – функция формы  $i$ -го узла образующего 1сКЭ  $V_g$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , отвечающая полиному вида

$$P_g(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9x^2z^2,$$

представленного в локальной декартовой системе координат  $Oxz$  (рис. 8),  $L_j(y)$  – полиномы Лагранжа 2-го порядка  $j = 1, 2, 3$ . Матрицу жесткости и вектор узловых сил 2сКЭ  $V_g^b$  пластинчатого типа определяем, исполь-

зую процедуры, аналогичные процедурам в подп. 2.1. Дискретные модели пластин в общем случае состоят из 2сКЭ сложной формы (криволинейных типа 2сКЭ  $V_g^b$ ) и 2сКЭ формы прямоугольного параллелепипеда, при построении которых используются степенные полиномы [2, 6] и полиномы Лагранжа [27]. Отметим, что предлагаемые МнКЭ 1-го и 2-го типа можно использовать при анализе трехмерного НДС гофрированных пластин, панелей и перекрытий [31–33] (гофра имеет вид трапеции, прямоугольника, треугольника, части дуги окружности и т.д.).

### 3. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу деформирования композитной цилиндрической оболочки  $V_0$  (с переменным радиусом кривизны срединной поверхности) сложной формы, с характерными размерами  $17h \times 144h \times 18h$ , где  $h = 0,5$ , имеющей отверстие, прямоугольное сечение которого на рис. 9 закрашено. При  $y = 0$  имеем  $u = v = w = 0$ .

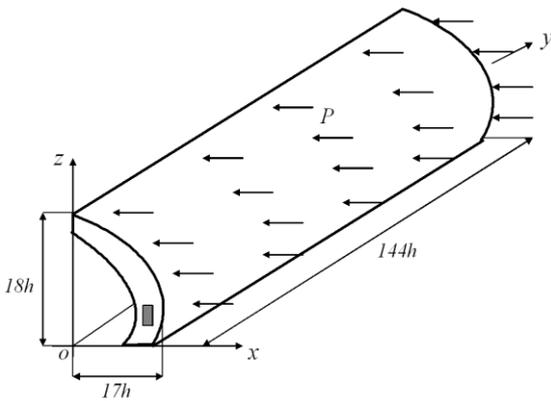


Рис. 9. Оболочка  $V_0$

Fig. 9. Shell  $V_0$

Базовое разбиение  $\mathbf{R}_0$  оболочки состоит из однородных КЭ  $V_j^h$  1-го порядка в форме куба со стороной  $h$  [2, 6], в которых реализуется трехмерное НДС [23]. Разбиение  $\mathbf{R}_0$  учитывает неоднородную структуру, форму оболочки  $V_0$  и порождает мелкую сетку  $h_0$ . Волокна (сечением  $h \times h$ ) параллельны оси  $Oy$ . Модуль Юнга связующего материала равен 1, волокна – 10, коэффициент Пуассона для волокон и матрицы равен 0,3.

В узлах сетки  $h_0$  с координатами  $x_1 = 9h, x_2 = 13h, x_3 = 16h, x_4 = 17h, z_1 = 15h, z_2 = 12h, z_3 = 9h, z_4 = 4h, y_j = 12h + 6h(\beta - 1), \beta = 1, \dots, 22, j = 1, \dots, 4$ , действуют горизонтальные силы  $P = -0,045$ . Двухсеточная модель  $\mathbf{R}_h$  оболочки состоит из 2сКЭ  $V_e^a$  (см. рис. 3), построенных по процедуре подп. 2.1,  $e = 1, \dots, 6$ . На рис. 10 показана

на мелкая сетка  $h_a$  (т. е. сетка  $h_0$ ) сечения 2сКЭ  $V_e^a$  при  $y = 0$ , точками отмечены узлы крупной сетки  $H_a$  2сКЭ  $V_e^a$ , вложенной в мелкую сетку  $h_a$ . Отверстие оболочки имеет размеры  $2h \times 3h$ , сечения волокон закрашены.

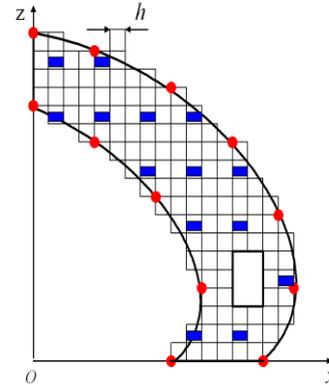


Рис. 10. Сетка  $h_a$  в сечении 2сКЭ  $V_e^a$

Fig. 10. Grid  $h_a$  in section 2gFE  $V_e^a$

Анализ результатов расчета оболочки показывает, что максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_h = 3,080$  (перемещение  $u_h = -169,050$ ) двухсеточной дискретной модели  $\mathbf{R}_h$  оболочки отличается от максимального эквивалентного напряжения  $\sigma_0 = 3,077$  (перемещения  $u_0 = -171,179$ ) базовой дискретной модели  $\mathbf{R}_0$  на 0,11 % (на 1,24 %). Размерность базовой модели оболочки  $V_0$  равна 71280, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 534. Двухсеточная модель  $\mathbf{R}_h$  оболочки  $V_0$  имеет 864 узловых неизвестных (т.е. имеет в 82,5 раз меньше неизвестных базовой модели), ширина ленты СУ ММКЭ равна 180 (в 2,9 раз меньше ширины ленты СУ МКЭ модели  $\mathbf{R}_0$ ). Реализация ММКЭ для двухсеточной модели  $\mathbf{R}_h$  требует в 244,75 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой  $\mathbf{R}_0$ . Эквивалентные напряжения определяются по 4-й теории прочности [34, 35]. Сравнительный анализ полученных результатов показывает, что использование в расчетах 2сКЭ  $V_e^a$  обеспечивают малую погрешность (меньше 1,5 %) для максимальных перемещений, напряжений и экономию памяти ЭВМ в 244 раза.

### Заключение

В данной работе рассмотрены трехмерные композитные и однородные МнКЭ двух типов сложной формы, которые проектируются с применением образующих КЭ. Показаны процедуры построения МнКЭ 1-го и 2-го типа, которые используются для расчета композитных (однородных) оболочек вращения, цилиндрических оболочек (с переменным радиусом кривизны), пластин и балок сложной формы. Основные достоинств-

ва предлагаемых МКЭ состоят в том, что они учитывают неоднородную, микрон неоднородную структуру и сложную форму тел, описывают трехмерное НДС

в композитных (однородных) телах, образуют дискретные модели малой размерности и порождают приближенные решения с малой погрешностью.

## Библиографический список

- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. – Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. – 715 p.
- Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – С. 304.
- Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – С. 392.
- Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
- Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.
- Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
- Секулович М. Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
- Кабанов В.В., Железнов Л.П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов // Прикладная механика. – 1985. – Т. XXI, № 9. – С. 35–40.
- Клочков Ю.В., Николаев А.П., Шубович А.А. Анализ напряженного деформированного состояния оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке при различных вариантах интерполяции перемещений. – Волгоград, 2013. – 152 с.
- Киселев А.П. Расчет тонких оболочек на прочность в трехмерной постановке без упрощающих гипотез // Изв. вузов. Строительство. – 2008. – № 1. – С. 18–23.
- Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З. Расчет многослойных оболочек вращения и пластин с использованием объемных конечных элементов // Изв. вузов. Строительство. – 2010. – № 1. – С. 106–112.
- Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсеченных поверхностей // Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 54–64.
- Kulik G.M., Plotnikova S.V. On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory // Advanced Structured Materials. – 2011. – Vol. 15 – P. 715–726.
- Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – М.: Физматлит, 2008. – 432 с.
- Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered composite shells // Applied Mechanics Reviews. – 1990. – Vol. 43. – P. 67–97.
- Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2002. – Vol. 9. – P. 1–60.
- A partial hybrid stress solid-shell element for the analysis of laminated composites / K. Rah, W. Van Paeppegem, A.M. Habraken, J. Degrieck // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2011. – Vol. 200. – No. 49–52. – P. 3526–3539.
- Cinefra M., Carrera E. Shell finite elements with different through-the-thickness kinematics for the linear analysis of cylindrical multilayered structures // Int. J. Num. Meth. Eng. – 2013. – Vol. 93 – No. 2. – P. 160–182.
- Ahmed A., Kapuria S. A four-node facet shell element for laminated shells based on the third order zigzag theory // Composite Structures. – 2016. – Vol. 158. – P. 112–127.
- Carrera E., Pagani A., Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure // Composites Part B: Engineering. – 2017. – Vol. 111. – P. 294–314.
- Yasin M.Y., Kapuria S. An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells // Composite Structures. – 2013. – Vol. 98. – P. 202–214.
- Caliri M.F., Ferreira A.J.M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the finite element method // Composite Structures. – 2016. – Vol. 156. – P. 63–77.
- Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
- Матвеев А.Д. Смешанные дискретные модели в анализе упругих трехмерных неоднородных тел сложной формы // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 182–195.
- Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Трехмерные композитные многосеточные конечные элементы оболочечного типа // Изв. АлтГУ. – 2017. – № 4. Сер.: Физ.-мат. науки. – С. 120–125. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-22
- Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – Vol. 158. – No. 1. – Art. 012067. – P. 1–9.
- Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. – 2016. – № 12. – С. 93–100.
- Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 530–543.
- Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. – Ленинград: Судостроение, 1977. – 280 с.
- Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В. Нелинейное деформирование и устойчивость овалных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 119–125.
- Xia Y., Friswell M.L., Saavedra Flores E.I. Equivalent models of corrugated panels // Intern. J. Solids Structures. – 2012. – Vol. 49. – No. 14. – P. 1453–1462.
- Andrianov I.V., Diskovsky A.A., Kholod E.I. Homogenization method in the theory of corrugated plates // Tech. Mech. – 1998. – Bd. 18. – P. 123–133.
- An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard / N. Talbi, A. Batti, R. Ayad, Y.Q. Guo // Composite Structures. – 2009. – Vol. 88. – P. 280–289.
- Биргер И.А., Шопр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. Справочник. – М.: Машиностроение, 1993. – 639 с.
- Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975. – 704 с.

## References

- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. *Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann*, 2013, 715 p.
- Norri D., de Friz Zh. Vvedenie v metod konechnykh elementov [Introduction to the finite element method]. *Moscow, Mir*, 1981, 304 p.
- Golovanov A.I., Tiuleneva O.I., Shigabutdinov A.F. Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktssii [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2006, 392 p.
- Bate K., Vilson E. Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov [Numerical analysis methods and finite element method]. *Moscow, Stroizdat*, 1982, 448 p.
- Obraztsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S. Metod konechnykh elementov v za-dachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov [Finite element method in problems of aircraft structural mechanics]. *Moscow, Vysshaya shkola*, 1985, 392 p.
- Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering]. *Moscow, Mir*, 1975, 544 p.
- Sekulovich M. Metod konechnykh elementov [Finite element method]. *Moscow, Stroizdat*, 1993, 664 p.
- Kabanov V.V., Zhelezov L.P. K raschetu tsilindricheskoi obolochki metodom ko-nechnykh elementov [To the calculation of the cylindrical shell by the finite element method]. *Prikladnaia mekhanika*, 1985, T. XXI, № 9, pp. 35-40.
- Klochkov Iu.V., Nikolaev A.P., Shubovich A.A. Analiz napriazhenogo deformirovannogo sostoianiia obolochek vrashcheniia v geometricheski nelineinoy posta-novke pri razlichnykh variantakh interpolatsii peremeshchenii [The analysis of the stress strain state of shells of revolution in a geometrically nonlinear statement with different variants of interpolation of the displacements.]. *Volgograd: FGBOU VPO Volgogradskii GAU*, 2013, 152 p.
- Kiselev A.P. Raschet tonkikh obolochek na prochnost' v trekhmernoi postanovke bez uproschchaiushchikh Gipotez [Calculation of thin shells for strength in three-dimensional formulation without simplifying hypotheses]. *Izv. Vuzov, Stroitel'stvo*, 2008, no. 1, pp. 18-23.
- Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z. Raschet mnogoslennykh obolochek vrashcheniia i plastin s ispol'zovaniem ob'emnykh konechnykh elementov [Calculation of multilayer shells of rotation and plates using volumetric finite elements]. *Izv. Vuzov, Stroitel'stvo*, 2010, no. 1, pp. 106-112.
- Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Reshenie trekhmernykh zadach dlia tolstykh uprugikh obolochek na osnove metoda otschetnykh poverkhnostei [Solution of three-dimensional problems for thick elastic shells based on the method of reference surfaces]. *Mekhanika tverdogo tela*, 2014, no. 4, pp. 54–64.
- Kulikov G.M., Plotnikova S.V. On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory. *Advanced Structured Materials*, 2011, vol. 15, pp. 715–726.
- Golushko S.K., Nemirovskii Iu.V. Priamyie i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniia [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2008, 432 p.
- Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered composite shells. *Applied Mechanics Reviews*, 1990, vol. 43, pp. 67–97.
- Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2002, vol. 9, pp. 1–60.
- Rah K., Van Paeppegem W., Habraken A.M. and Degrieck J. A partial hybrid stress solid-shell element for the analysis of laminated composites. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2011, vol. 200, no. 49–52, pp. 3526-3539.
- Cinefra M., Carrera E. Shell finite elements with different through-the-thickness kinematics for the linear analysis of cylindrical multilayered structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2013, vol. 93, no. 2, pp. 160-182.
- Ahmed A., Kapuria S. A four-node facet shell element for laminated shells based on the third order zigzag theory. *Composite Structures*, 2016, vol. 158, pp. 112-127.
- Carrera E., Pagani A., Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure. *Composites Part B: Engineering*, 2017, vol. 111, pp. 294-314.
- Yasin M.Y., Kapuria S. An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells. *Composite Structures*, 2013, vol. 98, pp. 202-214.
- Caliri M.F., Ferreira A.J.M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method. *Composite Structures*, 2016, vol. 156, pp. 63-77.
- Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. *Moscow, Vysshaya shkola*, 1982, 264 p.
- Matveev A.D. Smeshannyye diskretnyye modeli v analize uprugikh trekhmernykh neodnorodnykh tel slozhnoi formy [Mixed discrete models in the analysis of elastic three-dimensional inhomogeneous bodies of complex shape]. *Vestnik PNIPIU. Mekhanika, Perm': Izd-vo Perm. nats. issled. politekhn. un-ta*, 2013, no. 1, pp. 182-195.
- Matveev A.D., Grishanov A.N. Trekhmernyye kompozitnyye mnogosetochnyye konechnyye elementy obolochek tipa [Three-dimensional composite multigrid finite elements of shell type]. *Izvestiia AltGU*, 2017, no. 4, Seriya: fiziko-matematicheskie nauki, pp. 120–125, DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-22.
- Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016, vol. 158, no. 1, Art. 012067, pp. 1-9.
- Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh kompozitnykh plastin i balok [Multigrid method for finite elements in the analysis of composite plates and beams]. *Vestnik KrasGAU*, 2016, no. 12, pp. 93–100.
- Matveev A.D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh trekhmernykh odnorodnykh i kompozitnykh tel [The method of multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki*, 2016, T. 158, kn. 4, pp. 530–543.
- Postnov V.A. Chislennyye metody rascheta sudovykh konstruktssii [Numerical methods for calculating ship structures]. *Leningrad, Sudostroenie*, 1977, 280 p.
- Zhelezov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nelineinoe deformirovanie i ustoychivost' oval'nykh tsilindricheskikh obolochek pri chistom izgibe s vnutrennim davleniem [Nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under pure bending with internal pressure]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2006, T. 47, no. 3, pp. 119–125.
- Xia Y., Friswell M.L., Saavedra Flores E.I. Equivalent models of corrugated panels. *Intern. J. Solids Structures*, 2012, vol. 49, no. 14, pp. 1453-1462.
- Andrianov I.V., Diskovsky A.A., Kholod E.I. Homogenization method in the theory of corrugated plates. *Tech. Mech.*, 1998, Bd. 18, pp. 123-133.
- Talbi N., Batti A., Ayad R., Guo Y.Q. An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard. *Composite Structures*, 2009, vol. 88, pp. 280-289.
- Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. Raschet na prochnost' detalei mashin. Spravochnik [Calculation of the strength of machine parts. Handbook]. *Moscow, MASHINOSTROENIE* 1993, 639 p.
- Pisarenko G.S., Iakovlev A.P., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniiu materialov [Handbook on strength of materials]. *Kiev, «NAUKOVA DUMKA»*, 1975, 704 p.