



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.08

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ ПРИ КРУЧЕНИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ СПЛАВА ГЕЙСЛЕРА

А.А. Роговой, О.С. Столбова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 4 апреля 2019 г.
Принята: 17 сентября 2019 г.
Опубликована: 17 октября 2019 г.

Ключевые слова:

сплавы с памятью формы, сплавы Гейслера, фазовый переход, аустенит, мартенсит, магнитное поле, конечные деформации, фазовые деформации, краевая задача, вариационная постановка, метод конечных элементов.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются ферромагнитные сплавы с эффектом памяти формы (сплавы Гейслера), испытывающие фазовый переход из высокотемпературной кубической фазы (аустенит) в низкотемпературную тетрагональную фазу (мартенсит) в ферромагнитном состоянии. В этих сплавах в процессе прямого температурного фазового перехода из аустенитного состояния в мартенситное возможны генерации значительных макроскопических деформаций за счет приложения механических напряжений. Поскольку критические температуры процесса зависят от магнитного поля и полей напряжений, в таких сплавах возможно управление процессом фазового перехода аустенит–мартенсит с помощью магнитного поля.

Представлена модель, позволяющая в рамках конечных деформаций описывать процесс управления прямым (аустенит–мартенсит) и обратным (мартенсит–аустенит) фазовыми переходами с помощью магнитного поля в ферромагнитных поликристаллических материалах с памятью формы при действии внешних силовых, тепловых и магнитных полей. Поскольку магнитное поле влияет на деформацию материала, которая, в свою очередь, изменяет магнитное поле, поставлена связанная краевая задача и рассмотрен пример об азимутальном кручении длинного полого цилиндра (плоская деформация) из сплава Гейслера. Задача реализована численно методом конечных элементов с использованием процедуры пошагового нагружения. Накопление фазовых деформаций происходило в процессе прямого фазового перехода в цилиндре, внешняя поверхность которого была предварительно в аустенитном состоянии закручена в азимутальном направлении относительно фиксированной внутренней. При этом величина накопленных фазовых деформаций зависела от того, какие граничные условия (силовые или кинематические), производящие закручивание, заданы на внешней поверхности цилиндра. Полное снятие накопленных деформаций и раскручивание внешней поверхности цилиндра обратно происходило как при нагревании образца в интервале температур обратного фазового перехода в отсутствие магнитного поля, так и при постоянной температуре, превышающей этот интервал, при снятии магнитного поля, приложенного предварительно в мартенситном состоянии.

© ПНИПУ

© Роговой Анатолий Алексеевич – д.ф.-м.н., проф., г.н.с., e-mail: rogovoy@icmm.ru, [ID: 0000-0003-1723-0067](https://orcid.org/0000-0003-1723-0067)

Столбова Ольга Серафимовна – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: sos@icmm.ru, [ID: 0000-0002-2190-4311](https://orcid.org/0000-0002-2190-4311)

Anatoli A. Rogovoy – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher,

e-mail: rogovoy@icmm.ru, [ID: 0000-0003-1723-0067](https://orcid.org/0000-0003-1723-0067)

Olga S. Stolbova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: sos@icmm.ru,

[ID: 0000-0002-2190-4311](https://orcid.org/0000-0002-2190-4311)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



NUMERICAL SIMULATION OF THE PHASE TRANSITION CONTROL IN TORSION OF A HOLLOW CYLINDER MADE OF HEUSLER ALLOY

A.A. Rogovoy, O.S. Stolbova

Institute of Continuous Media Mechanics of the UrB RAS, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 April 2019
Accepted: 17 September 2019
Published: 17 October 2019

Keywords:

shape memory alloys, Heusler alloys, phase transformation, austenite, martensite, magnetic field, finite deformations, phase strains, boundary value problem, variational formulation, finite element method.

ABSTRACT

The paper discusses ferromagnetic alloys with shape memory (Heusler alloys) undergoing a phase transformation from the high-temperature cubic phase (austenite) to the low-temperature tetragonal phase (martensite) in the ferromagnetic state. In these alloys, significant macroscopic strains are generated during the direct temperature phase transition from the austenitic to the martensitic state due to the application of mechanical stresses. Since the critical temperatures of the process depend on the magnetic field and stress fields, in such alloys it is possible to control the austenite – martensite phase transformation process by applying a magnetic field.

In this work, within the framework of finite deformations a model has been presented to describe the process of controlling the forward (austenite – martensite) and reverse (martensite – austenite) phase transformation by applying a magnetic field in ferromagnetic polycrystalline materials with shape memory under the action of external force, thermal and magnetic fields. Since the magnetic field affects the strain of the material, which in turn changes the magnetic field, a connected boundary value problem has been constructed. The problem of azimuthal torsion of a long hollow cylinder (plane deformation) from a Heusler alloy has been solved numerically by the finite element method using the step-by-step loading procedure. The accumulation of phase strains occurred during the forward phase transformation in a cylinder, the outer surface of which was previously twisted in the azimuthal direction with respect to a fixed inner. In this case, the value of the accumulated phase strains depended on the boundary conditions (force or kinematic), that produced twisting the outer surface of the cylinder. The complete removal of the accumulated strains and the unwinding of the outer surface of the cylinder occurred both when the sample was heated in the temperature range of the reverse phase transformation in the absence of a magnetic field, and at a constant temperature exceeding this interval, when the magnetic field applied previously in the martensitic state was removed.

© PNRPU

Введение

Ферромагнитные сплавы Гейслера, в которых наблюдается эффект памяти формы, относятся к классу функциональных (интеллектуальных) материалов [1–14]. Конструкции из таких материалов могут существенно изменять свою конфигурацию под действием внешних тепловых, магнитных или электрических полей. Среди сплавов Гейслера с эффектом памяти формы наиболее изученной является система Ni–Mn–Ga, которая демонстрирует структурный (мартенситный) фазовый переход из высокотемпературной кубической фазы (аустенит) в низкотемпературную тетрагональную фазу (мартенсит) в ферромагнитном состоянии.

Выделяют два различных физических механизма, ответственных за инициирование больших деформаций (до 10 %) в ферромагнитных сплавах с памятью формы под действием внешних сил и магнитных полей. Один из них связан с восстановлением структурных доменов в мартенситной фазе и наблюдается в монокристаллических материалах или сильно текстурированных поликристаллических образцах [1–9]. При отсутствии приложенной механической нагрузки прямое фазовое превращение из кубической высокотемпературной фазы (аустенит) в тетрагональную низкотемпературную фазу (мартенсит) приводит к образованию сдвойникованных

вариантов мартенситного состояния (структурные домены). При этом изменение симметрии кристаллической решетки вызывает деформации, которые при пространственном усреднении по репрезентативному объему материала, состоящему из определенного числа структурных доменов, приводят только к несущественной макроскопической объемной деформации. Структурный домен, в свою очередь, делится на магнитные домены, в которых векторы намагниченности имеют противоположные направления: в каждом магнитном домене этот вектор направлен вдоль или против оси легкого намагничивания данного домена, при этом домены согласованы таким образом, что минимизируют магнитостатическую энергию. Приложение внешнего магнитного поля к ферромагнитным сплавам вызывает движение стенок магнитных доменов, вращение вектора намагниченности и, при условии высокой магнитной анизотропии, переориентацию мартенсита. Первые два процесса также происходят в обычных ферромагнитных материалах, в то время как последний процесс присущ только сплавам с памятью формы: приложение внешнего магнитного поля к материалу в мартенситном состоянии (так же, как приложение силового поля) приводит к вращению структурных доменов (движению границ двойников) таким образом, что оси легкого намагничивания пытаются выстроиться по индуциро-

ванному в теле магнитному полю. Совместная реориентация определенного числа мартенситных вариантов приводит к раздвоиванию мартенсита и сопровождается макроскопической деформацией, которая в некоторых ферромагнитных сплавах может быть чрезвычайно сильной. В случае снятия магнитного поля деформация, создаваемая вращением мартенситных вариантов, не восстанавливается, но частично или полностью исчезает, когда материал переводится в аустенитное состояние в интервале температур обратного фазового перехода.

Другой механизм генерации значительных макроскопических деформаций в материалах связан с прямым температурным фазовым переходом из аустенитного состояния в мартенситное в присутствии механических напряжений. Этот механизм имеет место как в монокристаллах, так и в поликристаллах [1, 2, 10–14]. В соответствии с ним формирование типа мартенситного варианта полностью зависит от направления поля напряжений, так что возникающие деформации ориентированы в соответствии с этим напряжением. Эти деформации называются фазовыми и дополняют обычные деформации, возникающие в материалах из-за приложенных сил. Усреднение фазовых деформаций по репрезентативному объему материала приводит к макроскопической деформации, которая может быть значительно выше, чем обычная деформация в мартенситном состоянии, и, в отличие от обычной деформации, не исчезает после силовой разгрузки материала.

С помощью магнитного поля можно эффективно управлять процессом фазового перехода, о чем свидетельствуют экспериментальные исследования [10–12]. Если прямые или обратные фазовые переходы в ферромагнитном материале осуществляются под действием магнитного поля, критические температуры процесса изменяются в соответствии с обобщенным законом Клаузиуса-Клапейрона и зависят от магнитного поля и полей напряжений [13, 14]. Такое влияние магнитного поля и поля напряжений позволяет варьировать температуры прямых и обратных фазовых превращений и тем самым управлять процессом фазового перехода аустенит–мартенсит.

В серии работ [15–17] задача магнитоупругости исследуется в рамках теории конечных деформаций. Внутреннее магнитное поле, индуцированное внешним магнитным полем в образце конечных размеров, генерирует как массовые (пондеромоторные), так и поверхностные силы в дополнение к обычным силовым или температурным внешним воздействиям. В свою очередь индуцированное внутреннее магнитное поле и деформация образца оказывают сильное влияние на внешнее магнитное поле, вызывая его возмущение. В результате внутреннее поле изменяется, что приводит к изменению массовых и поверхностных сил, генерируемых этим полем, и к изменению формы образца. Кроме того, вектор магнитной индукции и вектор напряженности маг-

нитного поля имеют на поверхности тела конечной геометрии разрывы в их тангенциальной и нормальной составляющих соответственно. Это порождает поверхностный эффект, который проявляется в определенной области и не учитывается в большинстве работ, посвященных рассматриваемой проблеме. Таким образом, необходимо решить связанную магнитомеханическую задачу для намагничиваемого тела конечных размеров, которое находится в пространстве, где действует магнитное поле.

Для построения физико-механической модели поведения ферромагнитного сплава с памятью формы (ФСПФ) в процессах прямого и обратного фазовых превращений, которая будет учитывать влияние теплового, магнитного и силового внешних полей на разных стадиях этих процессов, будем использовать три группы соотношений:

- 1) соотношения механики деформируемого твердого тела;
- 2) соотношения, описывающие прямой и обратный температурно-индуцированные управляемые фазовые переходы аустенит–мартенсит;
- 3) соотношения, описывающие изменение магнитного поля в кусочно-однородной среде (уравнения Максвелла).

Эти соотношения с краткими пояснениями и необходимыми ссылками на первоисточники приведены ниже в разд. 1–3 для удобства читателя. В разд. 4 разработанная физико-механическая модель поведения ферромагнитного сплава с памятью формы используется для описания магнитомеханических процессов, происходящих в длинном полом цилиндра из ферромагнитного материала с закрепленной внутренней поверхностью при прямом и обратном фазовых переходах. В аустенитном состоянии внешняя поверхность этого цилиндра сдвигается (закручивается) относительно внутренней в азимутальном направлении (азимутальное кручение) заданным угловым перемещением или усилием. Затем цилиндр охлаждается, в результате чего осуществляется прямой фазовый переход, и сдвиговые усилия, приложенные к внешней поверхности (заданные или соответствующие заданному угловому перемещению этой поверхности), снимаются. Цилиндр находится в мартенситном состоянии, в деформированной за счет возникших в нем фазовых деформаций, но устойчивой форме. Включается внешнее магнитное поле, и цилиндр нагревается до температуры, превышающей температуру окончания обратного фазового перехода, соответствующую случаю отсутствия механических и магнитных внешних полей. Но обратный фазовый переход при этом не происходит, так как приложенное магнитное поле увеличивает температуру начала этого перехода. При уменьшении магнитного поля до нуля осуществляется обратный фазовый переход, и закрученная в азимутальном направлении внешняя поверхность цилиндра раскручивается обратно в свое первоначальное положение.

1. Основные соотношения

Кинематические соотношения. В рамках конечных деформаций введем согласно [18, 19] следующие понятия и обозначения, используемые в рассматриваемом процессе: κ_0 и κ – начальная (недеформированная) и текущая конфигурации, \mathbf{F} – градиент места, переводящий конфигурацию κ_0 и κ , \mathbf{C} – мера деформации Коши–Грина, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$; \mathbf{E} – тензор деформации Коши–Грина, $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{g}) / 2$; \mathbf{g} – метрический (единичный) тензор. Согласно [20] введем в рассмотрение промежуточную конфигурацию κ_* , близкую к текущей, и \mathbf{F}_* – градиент места, переводящий конфигурацию κ_0 в κ_* . Градиент места, мера и тензор деформации Коши–Грина относительно промежуточной конфигурации представляются в виде [20]

$$\mathbf{F} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}_*, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_*, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_* + \varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_* = \mathbf{E}_* + \Delta \mathbf{E},$$

где \mathbf{h} – градиент относительно промежуточного состояния вектора перемещений из конфигурации κ_* в близкую текущую κ ; \mathbf{e} – тензор малых деформаций относительно промежуточной конфигурации, $\mathbf{e} = (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) / 2$; ε – малый положительный параметр, характеризующий близость конфигураций κ_* и κ . Значения всех величин, помеченных здесь и ниже в статье «звездочкой», относятся к промежуточной конфигурации.

В результате предельного перехода при стремлении промежуточной конфигурации к текущей ($\kappa_* \rightarrow \kappa$) из соотношений (1) следует, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{C} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \quad (2)$$

где $\mathbf{I} = \mathbf{F}^{-1}$, \mathbf{D} – тензор деформации скорости, $\mathbf{D} = (\mathbf{I} + \mathbf{I}^T) / 2$, совпадающий в данном случае с тензором скорости деформаций $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{C}}$.

Определяющее уравнение. Из эквивалентных форм представления определяющих соотношений для простого материала, удовлетворяющих принципу объективности [18], используем форму

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{C}_E, \Theta) \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3)$$

в которой $\mathbf{g}(\mathbf{C}_E, \Theta)$ – функция отклика материала на упругую деформацию $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ – совпадает со вторым (симметричным) тензором напряжений Пиола–Кирхгоффа: $\mathbf{g} \equiv \mathbf{P}_{II} = 2(\partial W / \partial \mathbf{C}_E)$, $W(\mathbf{C}_E)$ – упругий потенциал. В соотношении (3) \mathbf{T} – тензор истинных напряжений, $J = I_3(\mathbf{F})$ – третий инвариант \mathbf{F} , определяющий относительное изменение объема; Θ – абсолютная температура.

Из соотношения (3) с учетом (1) вытекает следующее представление второго тензора напряжений Пиола–Кирхгоффа, записанного относительно промежуточной конфигурации с точностью до линейных по ε слагаемых:

$$\mathbf{P}_{II} = \mathbf{P}_{II*} + \mathbf{L}_*^{IV} \cdot \varepsilon \mathbf{e}_E = \mathbf{P}_{II*} + \mathbf{L}_*^{IV} \cdot \Delta \mathbf{E}_E, \quad (4)$$

где \mathbf{L}_*^{IV} и \mathbf{L}_*^{IV} – тензоры четвертого ранга, определяющие отклик материала на приращение упругих деформаций \mathbf{e}_E и $\Delta \mathbf{E}_E$ соответственно. Эти тензоры представляются следующим образом:

$$\mathbf{L}_*^{IV} = 4 \mathbf{F}_* \cdot \frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E^2} \Big|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}} \cdot \mathbf{F}_*^T =$$

$$= 2 \mathbf{F}_* \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_{II}(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E^2} \Big|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}} \cdot \mathbf{F}_*^T,$$

$$\mathbf{L}_*^{IV} = 4 \frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E^2} \Big|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}} =$$

$$= 2 \frac{\partial \mathbf{P}_{II}(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E} \Big|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}},$$

где \cdot – позиционное скалярное умножение тензора второго ранга слева на третий базисный вектор тензора четвертого ранга [21, 22]. В результате предельного перехода $\kappa_* \rightarrow \kappa$ в соотношении (4) получаем, что

$$\mathbf{P}_{II} = \mathbf{L}^{IV} \cdot \mathbf{D}_E = \mathbf{L}^{IV} \cdot \mathbf{E}_E,$$

где тензоры \mathbf{L}^{IV} и \mathbf{L}^{IV} имеют тот же вид, что \mathbf{L}_*^{IV} и \mathbf{L}_*^{IV} , но с величинами, определенными не в промежуточной, а в текущей конфигурации.

Уравнения магнитного поля. Как уже отмечалось, внутреннее магнитное поле, наведенное в образце конечных размеров внешним магнитным полем, возмущает последнее. В результате внутреннее поле изменяется тоже. В отсутствие электрического тока изменения внутреннего и внешнего полей описывается зависимостью [26] $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \nabla^0 \Psi$, где \mathbf{H} и \mathbf{H}_0 – напряженности возмущенного и приложенного магнитных полей; ∇^0 – оператор Гамильтона в текущей конфигурации; Ψ – скалярная функция, характеризующая возмущение. Вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} определяется в теле ($x \in V^{(i)}$, текущая конфигурация) соотношением $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, а в пространстве вне тела ($x \in V^{(e)}$, текущая конфигурация) – соотношением $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Здесь μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$); \mathbf{M} – вектор намагниченности тела, определяемый соотношением $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, в котором χ – магнитная восприимчивость. Вектор индукции магнит-

ного поля \mathbf{V} удовлетворяет условию $\nabla\% \mathbf{V} = 0$, в результате чего имеем два уравнения $\nabla\%(\mathbf{H}_0 - \nabla\% \Psi) = 0 \quad x \in V^{(e)}$ и $\nabla\%(1 + \chi)(\mathbf{H}_0 - \nabla\% \Psi) = 0 \quad x \in V^{(i)}$, позволяющих определить функцию Ψ вне тела и в теле. Причем $\Psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и на поверхности S , разделяющей тело и его внешность, $\Psi^{(i)} = \Psi^{(e)}$ и $\partial\Psi^{(i)} / \partial\mathbf{N} - \partial\Psi^{(e)} / \partial\mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$, где \mathbf{N} – внешняя единичная нормаль к поверхности S объема $V^{(i)}$ в текущей конфигурации, а $\partial\Psi^{(\alpha)} / \partial\mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \nabla\% \Psi^{(\alpha)}$ ($\alpha = i, e$). Из последнего соотношения следует, что вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} испытывает скачок в нормальной составляющей на поверхности раздела S .

Внешнее магнитное поле и магнитное поле, наведенное в образце конечных размеров, генерируют объемные (пондеромоторные) \mathbf{K} и поверхностные \mathbf{Q} силы в дополнение к внешним силам другой физической природы: $\mathbf{K} = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla\% \mathbf{H}$, $\mathbf{Q} = (1/2)\mu_0 M_N^2 \mathbf{N}$, где $M_N = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$.

2. Описание фазового перехода

Для описания кинематики фазового перехода за основу принята модель, предложенная для полимеров с памятью формы в работах [23–25] и адаптированная к сплавам с памятью формы в работе [26]. Поскольку в ФСПФ имеет место фазовый переход аустенит–мартенсит, определим кинематику процесса градиентами места \mathbf{F}_A для аустенитной фазы и \mathbf{F}_M для мартенситной. Тогда соотношения (2) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\gamma^\& = \mathbf{1}_\gamma \cdot \mathbf{F}_\gamma, \quad \mathbf{E}_\gamma^\& = 2 \mathbf{F}_\gamma^T \cdot \mathbf{D}_\gamma \cdot \mathbf{F}_\gamma, \\ \mathbf{E}_\gamma^\& = \mathbf{F}_\gamma^T \cdot \mathbf{D}_\gamma \cdot \mathbf{F}_\gamma, \quad \gamma = A, M. \end{aligned}$$

Предполагая аддитивность скоростей изменения упругих (аустенитных и мартенситных), температурных и фазовых деформаций, представим кинематическое уравнение (аналогично [26]) в следующем виде:

$$\mathbf{E}^\& = (\varphi_A \mathbf{E}_A)^\cdot + (\varphi_M \mathbf{E}_M)^\cdot + \mathbf{E}_{ph}^\& + \mathbf{E}_\Theta^\&. \quad (5)$$

Здесь φ_M и φ_A – параметры, определяющие долю мартенситной и аустенитной фаз в объеме материала ($\varphi_M + \varphi_A = 1$); $\mathbf{E}_{ph}^\&$ и $\mathbf{E}_\Theta^\&$ – скорости изменения фазовых и температурных деформаций.

В работах [27–33] предложены различные соотношения, описывающие возникновение и развитие фазовых деформаций. Ниже будет использоваться модель, описанная в [30–33].

Зависимость φ_M от Θ может быть аппроксимирована различными соотношениями. Согласно работе А.А. Мовчана [30],

$$\varphi_M(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ 0,5(1 - \cos(\pi\xi)), & 0 < \xi < 1, \\ 1, & \xi \geq 1. \end{cases}$$

$$\xi = \frac{M_s^\sigma - \Theta}{M_s - M_f}, \quad M_f^\sigma \leq \Theta \leq M_s^\sigma \quad (d\varphi_M > 0),$$

$$\xi = 1 + \frac{A_s^\sigma - \Theta}{A_f - A_s}, \quad A_s^\sigma \leq \Theta \leq A_f^\sigma \quad (d\varphi_M < 0).$$

Здесь M_s, M_f, A_s, A_f – температуры начала и завершения прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений и от магнитного поля материале; $M_s^\sigma, M_f^\sigma, A_s^\sigma, A_f^\sigma$ – эти же температуры в нагруженном материале и/или в приложенном магнитном поле, которые определяются, согласно соотношению Клаузиуса–Клапейрона [26], следующим образом:

$$\Theta_c = \Theta_{c0} + \frac{\Theta_{c0}}{[q]} \left(\mathbf{P}_{II} \cdot [\mathbf{E}_{ph}] + \mu_0 \mathbf{H} \cdot [\mathbf{M}] \right).$$

Здесь Θ_c и Θ_{c0} – критические температуры прямого и обратного фазовых переходов в нагруженном и ненагруженном материале; \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля; $[q]$, $[\mathbf{E}_{ph}]$ и $[\mathbf{M}]$ – выделившееся (поглощенное) тепло, изменение фазовых деформаций и намагниченности в процессе фазового перехода.

Предложенные в [31] соотношения, описывающие изменения фазовых деформаций, обобщаются в работе [26] на конечные деформации следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{ph}^\& = \left(a \mathbf{g} + b \hat{\mathbf{P}}_{II} + c \mathbf{E}_{ph} \right) \mathcal{E}_M, & \mathcal{E}_M > 0, \\ \mathbf{E}_{ph}^\& = \left(\frac{c \mathbf{E}_{ph}^{(0)}}{\exp(c \varphi_M^{(0)}) - 1} + c \mathbf{E}_{ph} \right) \mathcal{E}_M, & \mathcal{E}_M < 0. \end{cases}$$

Здесь a, b, c – параметры материала; $\hat{\mathbf{P}}_{II}$ – девиатор тензора \mathbf{P}_{II} ; $\varphi_M^{(0)}$ и $\mathbf{E}_{ph}^{(0)}$ – значения параметра мартенситной фазы и фазовой деформации в начальной точке процесса обратного превращения.

Скорость изменения температурных деформаций зададим, обобщая закон линейного температурного расширения на конечные деформации:

$$\mathbf{E}_\Theta^\& = \mathbf{F}^T \cdot \mathcal{E}_\Theta \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (\alpha \mathcal{E}_\Theta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{F} = \alpha \mathcal{E}_\Theta \mathbf{C} = \alpha \mathcal{E}_\Theta (2\mathbf{E} + \mathbf{g}),$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения.

В работах [26, 34] рассмотрены требования, которые накладывает термодинамика на процесс фазового перехода в ФСПФ. В результате термодинамического анализа получено следующее равенство: $\mathbf{P}_{IIA} = \mathbf{P}_{IIM} = \mathbf{P}_{II}$, в котором $\mathbf{P}_{IIA} = 2(\partial W_A / \partial C_A)$, $\mathbf{P}_{IIM} = 2(\partial W_M / \partial C_M)$, W_A и W_M – упругие потенциалы аустенитной и мартенситной фаз.

3. Постановка краевой задачи

Для ФСПФ необходимо решать связанную задачу: магнитное поле вызывает деформирование тела, кото-

рое, в свою очередь, искажает деформирующее это тело магнитное поле. Для решения такой краевой задачи используем вариационную постановку [26, 34].

Вариационное уравнение Лагранжа строится с применением стандартной процедуры Галеркина к уравнениям равновесия в текущей конфигурации $\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{K} = \mathbf{0}$ и силовым граничным условиям $\mathbf{Q} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$, действующим на части текущей поверхности тела S_p , с учетом кинематических граничных условий $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$, заданных на оставшейся части текущей поверхности тела S_u . Вариационное уравнение для магнитного поля строится совершенно аналогичным образом, с применением стандартной процедуры Галеркина к уравнениям для магнитного поля $\nabla \cdot (\mathbf{H}_0 - \nabla \Psi) = 0 \quad x \in V^{(e)}$ и $\nabla \cdot (1 + \chi)(\mathbf{H}_0 - \nabla \Psi) = 0 \quad x \in V^{(i)}$, выписанным в конце первого раздела. Поскольку до решения задачи поверхность и объем тела в текущем состоянии неизвестны, то, используя соотношения, связывающие объемы текущего и начального состояний, а также соотношения, связывающие поверхности, ограничивающие эти объемы, вариационную постановку для краевой задачи можно привести к начальной конфигурации:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} J \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 + \int_{V_0^{(i)}} J \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 = \\ = \frac{1}{2} \int_{V_0^{(i)}} \mathbf{P}_{II} \cdot \delta \mathbf{C} dV_0, \\ \int_{V_0^{(i)}} J \chi \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \delta \Psi dV_0 = \int_{V_0^{(i)}} J (1 + \chi) \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \delta \Psi dV_0 + \\ + \int_{V_0^{(e)}} J \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \Psi \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \delta \Psi dV_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к поверхности S_0 тела с объемом $V_0^{(i)}$ в начальной конфигурации; $V_0^{(e)}$ – объем окружающей тело внешней среды в начальной конфигурации; \mathbf{u} – вектор перемещений из начальной конфигурации в текущую; ∇ – оператор Гамильтона в начальной конфигурации; δ – символ вариации.

Для описания упругого поведения аустенитной и мартенситной фаз используется упрощенный закон Синьборини [18]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{II\gamma} = J(\mathbf{C}_\gamma) \left[(k_{1\gamma} + k_{2\gamma}) \mathbf{C}_\gamma^{-1} - 2k_{2\gamma} \mathbf{C}_\gamma^{-2} \right], \quad \gamma = A, M, \\ k_{1\gamma} = \frac{\Lambda_\gamma}{2} \left[3 - I_1(\mathbf{C}_\gamma^{-1}) \right] + \frac{\Lambda_\gamma + G_\gamma}{8} \left[3 - I_1(\mathbf{C}_\gamma^{-1}) \right]^2, \\ k_{2\gamma} = G_\gamma - \frac{\Lambda_\gamma + G_\gamma}{2} \left[3 - I_1(\mathbf{C}_\gamma^{-1}) \right], \end{aligned}$$

где Λ_γ и G_γ – параметры материала, имеющие смысл параметра Ламе и модуля сдвига линейной теории упругости; I_1 – первый главный инвариант соответствующего тензора.

Закон намагничивания зададим в виде $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, предполагая, что для магнитной восприимчивости справедливо соотношение $\chi = \phi_M \chi_M + (1 - \phi_M) \chi_A$, при этом χ_M и χ_A – магнитные восприимчивости мартенситной и аустенитной фаз, которые задаются согласно формуле Фрелиха–Кенелли [35] следующим образом:

$$\chi_\gamma = \frac{M_{st}^{(\gamma)}}{a_{st}^{(\gamma)} + H}, \quad H = |\mathbf{H}|, \quad \gamma = A, M.$$

Здесь $M_{st}^{(\gamma)}$ – намагниченность насыщения; $a_{st}^{(\gamma)}$ – постоянная материала.

4. Решение задачи о кручении полого цилиндра

Приведённые выше соотношения использовались для решения задачи о кручении длинного полого цилиндра (плоская деформация) из сплава Гейслера. В начальный момент времени образец из ФСПФ в виде длинного полого цилиндра находится в аустенитном состоянии. Внутренняя поверхность цилиндра закреплена, а на внешней поверхности неизменного радиуса задаются перемещения или усилия, приводящие к её сдвигу относительно внутренней в азимутальном направлении (азимутальное кручение). Деформированный таким образом цилиндр охлаждается (при фиксированном перемещении/усилии на внешней поверхности) в интервале температур прямого фазового перехода, что приводит к накоплению фазовых деформаций. В мартенситном состоянии внешняя поверхность цилиндра разгружается (снимаются приложенные к ней заданные усилия или усилия, соответствующие заданному угловому перемещению этой поверхности), при этом конфигурацию образца определяют накопленные в нем фазовые деформации. Последующее снятие фазовых деформаций в образце возможно двумя способами:

1. Производится нагрев в интервале температур обратного фазового перехода, и образец возвращается к своей начальной ненагруженной конфигурации.

2. В мартенситном состоянии осуществляются включение магнитного поля и нагрев образца до температуры, при которой материал перешел бы в аустенитное состояние, будучи ненамагниченным. Однако приложенное магнитное поле сдвигает в соответствии с законом Клаузиуса–Клапейрона температуры обратного фазового перехода, и образец остается в мартенситном состоянии. Обратный фазовый переход и восстановление начальной конфигурации будет происходить в условиях постоянной температуры при снятии магнитного поля.

Отметим, что когда внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 постоянно и направлено вдоль оси бесконечно длинного цилиндра, образец намагничивается однородно, при этом магнитное поле внутри цилиндра равно внешнему: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$. Действительно, в единичном базисе цилиндрической системы координат $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$, $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$,

функция Ψ зависит только от ρ , и уравнения, представленные в конце первого раздела и описывающие поведение магнитного поля как в цилиндре, так и вне его, принимают вид $d^2\Psi/d\rho^2=0$. Отсюда следует, что $\Psi^{(i)}=A^{(i)}\rho+B^{(i)}$, где $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$ – константы; $i=0$ – полость цилиндра, $i=1$ – цилиндр; $i=2$ – внешность цилиндра. Используя условия стыковки этих трех решений на внешней и внутренней поверхностях цилиндра, условия нормального разрыва $d\Psi^{(i)}/d\rho$ на этих поверхностях и условие затухания $\Psi^{(2)}$ до нуля при $\rho \rightarrow \infty$, приходим к тому, что $\Psi^{(i)}=0 \forall i$, т.е. $\mathbf{H}=\mathbf{H}_0$ и в теле, и в пространстве. Отсюда следует, что в теле $\mathbf{B}=\mu_0(1+\chi)H_0\mathbf{e}_z$, а в окружающем пространстве $\mathbf{B}=\mu_0H_0\mathbf{e}_z=\mathbf{B}_0$. Поэтому скачок вектора магнитной индукции $\mathbf{B}-\mathbf{B}_0=\mu_0\chi H_0\mathbf{e}_z$, происходящий на внутренней и внешней поверхностях цилиндра, направлен вдоль этих поверхностей.

Решение, приведенное выше, является точным аналитическим решением уравнений магнитостатики, а значит, и второго вариационного уравнения в (6). Поэтому в данном случае это уравнение уже не нужно решать, в отличие от задачи, рассмотренной в работе [26].

Поставленная в начале этого раздела задача решалась численно методом конечных элементов с помощью пакета FEnicCS (<http://fenicsproject.org>). Использовалась процедура пошагового нагружения для всех этапов решения, для чего осуществлена линеаризация вариационных уравнений. На каждом шаге задавались приращения перемещения/усилия на внешней поверхности, температуры или внешнего магнитного поля. Считалось, что распределение температуры однородно по образцу, т.е. он выдерживался необходимое для этого время при заданном на шаге приращении температуры окружающей среды.

Внутренний радиус цилиндра r , внешний радиус R . Задача решалась в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) , при этом ось z совпадала с осью цилиндра. Ненулевые компоненты вектора перемещений зависели только от координаты ρ : $u_\rho(\rho)$ и $u_\varphi(\rho)$.

Для численного расчета использовались следующие параметры реального материала, приведенные или определенные в [26]: модули упругости $E_A=90$ ГПа, $E_M=30$ ГПа; коэффициент Пуассона для аустенитной и мартенситной фазы $\nu=0,3$, характерные температуры фазового перехода при отсутствии напряжений и магнитного поля: $M_s=315$ К, $M_f=310$ К, $A_s=312$ К, $A_f=317$ К; параметры материала, описывающие эволюцию фазовых деформаций, $a=2,43 \cdot 10^{-5}$, $b=2,57 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-1}$, $c=6,3$; коэффициент линейного теплового расширения $\alpha=1,1 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$; магнитные кон-

станты $M_{st}^{(A)}=30 \cdot 10^3$ А/м, $a_{st}^{(A)}=95 \cdot 10^3$ А/м, $M_{st}^{(M)}=40 \cdot 10^3$ А/м, $a_{st}^{(M)}=80 \cdot 10^3$ А/м.

На рисунках показаны результаты численного расчета для цилиндра с внутренним радиусом $r=1$ см и внешним радиусом $R=2$ см. Охлаждение после кручения в аустенитном состоянии происходило либо при фиксированном перемещении на внешней поверхности $u_\varphi(\rho=R)=0,005$ см, либо при соответствующем ему усилии (в аустенитном состоянии) $p_\varphi(\rho=R)=58$ МПа. При этом $u_\rho(\rho=R)=0$.

Отметим, что результаты, полученные при решении на первом этапе (только упругие деформации в аустенитном состоянии) в рамках конечных деформаций, практически совпадают с аналитическим решением, которое можно получить при решении задачи в рамках малых деформаций. Для рассматриваемой задачи об азимутальном кручении полого цилиндра при плоской деформации единственной ненулевой компонентой вектора перемещений в цилиндрической системе координат будет $u_\varphi(\rho)$, при этом граничные условия запишутся в виде $u_\varphi(\rho=r)=0$, $u_\varphi(\rho=R)=u_\varphi^*$. Используя соотношения, представленные в работах [36, 37], получаем

$$e_{\rho\varphi}(\rho)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi(\rho)}{\partial \rho}-\frac{u_\varphi(\rho)}{\rho}\right), \quad T_{\rho\varphi}(\rho)=2Ge_{\rho\varphi}(\rho).$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{\rho\varphi}(\rho)}{\partial \rho}+2\frac{T_{\rho\varphi}(\rho)}{\rho}=0$$

следует, что

$$\frac{\partial^2 u_\varphi(\rho)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi(\rho)}{\partial \rho}-\frac{u_\varphi(\rho)}{\rho}=0.$$

Решением полученного дифференциального уравнения будет функция $u_\varphi(\rho)=C_1\rho+C_2/\rho$, в которой C_1 и C_2 находятся из граничных условий. В результате получаем, что $u_\varphi(\rho)=K_*(\rho-r^2/\rho)$, где $K_*=u_\varphi^*/R/(R^2-r^2)$. Тогда $e_{\rho\varphi}(\rho)=K_*r^2/\rho^2$ и $T_{\rho\varphi}(\rho)=2GK_*r^2/\rho^2$.

На рис. 1 представлено сечение цилиндра и полученные распределения перемещений u_φ по радиусу (умноженные на 20) для задачи с заданными перемещениями на внешней поверхности $u_\varphi(\rho=R)=0,005$ см (показаны красными линиями) и с заданными усилиями $p_\varphi(\rho=R)=58$ МПа (показаны синими линиями).

Упругое решение в аустенитном состоянии соответствует пути $O-A$ перемещения точки на внешней поверхности цилиндра.

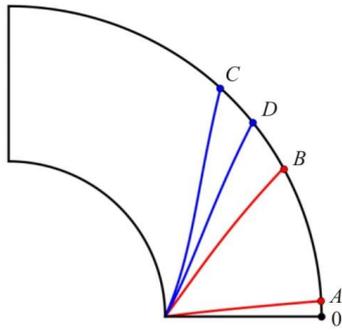


Рис. 1. История перемещения точек сечения цилиндра

Fig. 1. Displacement history of the points of the cylinder section

Путь $A-B$ получается после прямого фазового перехода при фиксированном перемещении внешней поверхности и последующем полном снятии усилия, соответствующего этому фиксированному перемещению в мартенситном состоянии (силовая разгрузка). Путь $B-O$ соответствует обратному фазовому переходу в выше-рассмотренном процессе. Путь $A-C$ получается после прямого фазового перехода при фиксированном усилии на внешней поверхности. Последующая полная силовая разгрузка этой поверхности в мартенситном состоянии соответствует пути $C-D$, а $D-O$ – путь при обратном фазовом переходе в таком процессе.

Зависимость u_φ от ρ в виде обычного графика представлена на рис. 2. Здесь красной сплошной линией показано распределение углового перемещения по радиусу при кручении в аустенитном состоянии, заданном перемещением $u_\varphi(\rho=R)=0,005$ см или соответствующем ему усилием $p_\varphi(\rho=R)=58$ МПа (вначале возникают только упругие деформации), красной пунктирной – распределение углового перемещения после прямого фазового перехода при фиксированном перемещении внешней поверхности $u_\varphi(\rho=R)=0,005$ см, $u_\varphi(\rho=R)=0$ и последующей полной силовой разгрузке этой поверхности в мартенситном состоянии. Синей сплошной линией представлено распределение углового перемещения после прямого фазового перехода при фиксированном усилии на внешней поверхности $p_\varphi(\rho=R)=58$ МПа, $u_\varphi(\rho=R)=0$, синей пунктирной – распределение углового перемещения после прямого фазового перехода при фиксированном усилии на внешней поверхности и последующей полной силовой разгрузке этой поверхности в мартенситном состоянии.

В процессе прямого фазового перехода при фиксированном усилии фазовые деформации растут. В силу того что упругие деформации в этом процессе должны оставаться неизменными, полные деформации тоже растут, все время превышают фазовые на величину упругих деформаций, и в конце такого процесса прямого фазового перехода перемещение u_φ соответствует точ-

ке C на рис. 2. При силовой разгрузке снимаются упругие деформации, полные деформации уменьшаются до фиксированных фазовых, образец раскручивается, и перемещение u_φ соответствует точке D на рис. 2.

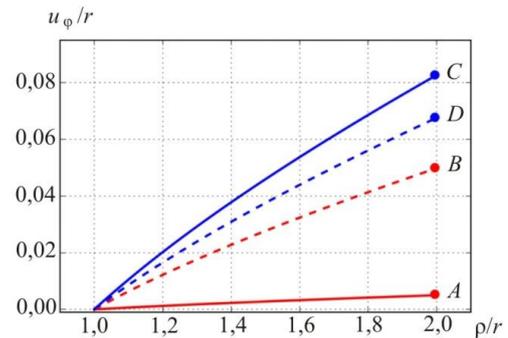


Рис. 2. Распределение перемещений по радиусу

Fig. 2. Distribution of displacements along the radius

Процесс прямого мартенситного превращения при фиксированном перемещении внешней поверхности цилиндра эквивалентен процессу сдвига этой поверхности усилием, но не постоянным, как в предыдущем случае, а изменяющимся по вполне определенному закону. Так как полные деформации фиксированы, а фазовые растут, упругие деформации уменьшаются, и это усилие затухает (релаксирует) до нуля при не полностью завершенном процессе прямого мартенситного превращения, $\varphi_M < 1$. Приращение фазовых деформаций при этом сохраняет свой знак (продолжается ориентированное превращение), хотя и становится меньше, чем в предыдущий момент времени. Последующий процесс охлаждения осуществляется уже при отрицательном сдвиговом усилии, так как накапливающиеся фазовые деформации превышают полные фиксированные деформации. Это отрицательное сдвиговое усилие будет только нарастать, пока его влияние на приращение фазовых деформаций не сравнится с влиянием накопленных фазовых деформаций (см. соотношение для \mathcal{E}_{ph} в конце разд. 2). Поэтому при силовой разгрузке, когда полные деформации становятся равными фазовым, перемещение u_φ испытывает скачок из точки A в точку B и образец докручивается, реализуя эти накопленные фазовые деформации.

В результате этого процесса угловое перемещение внешней поверхности цилиндра u_φ в разгруженном мартенситном состоянии (точки B и D) возрастает по сравнению с заданным $u_\varphi(\rho=R)=0,005$ см в 10 раз для перехода с фиксированным угловым перемещением и в 13 раз для перехода с фиксированным касательным усилием за счет возникновения фазовых деформаций, которые сохраняются и в разгруженном мартенситном состоянии.

На рис. 3 представлена зависимость углового перемещения на внешней поверхности от температуры

(прямой фазовый переход при охлаждении при фиксированном усилии). Начальное и конечное значения перемещения отмечены точками А и С, которые соответствуют тем же точкам на рис. 1 и 2. При уменьшении температуры происходит дополнительное к упругому закручивание цилиндра за счет возникающих фазовых деформации.

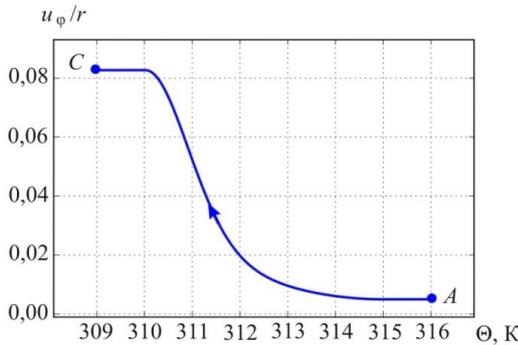


Рис. 3. Зависимость перемещения на внешней поверхности от температуры (охлаждение при фиксированном усилии)

Fig. 3. Dependence of outer surface displacement on temperature (cooling under fixed force)

На рис. 4 представлены зависимости углового перемещения на внешней поверхности цилиндра от приложенного магнитного поля. Начальные значения u_ϕ/r , помеченные точками В и D, соответствуют приложенному магнитному полю в $8 \cdot 10^6$ А/м (при этом магнитная индукция равна 10,08 Тл – размерность величины в тесла) и нагреванию цилиндра до температуры выше A_f , соответствующей концу обратного фазового перехода мартенсит–аустенит при отсутствии силового и магнитного полей. Значения перемещений в точках В и D почти не отличаются от перемещений разгруженного состояния, помеченных на рис. 1 и 2 теми же буквами, так как температурные деформации и деформации, возникающие от приложенного магнитного поля, малы по сравнению с уже существующими в теле. При уменьшении магнитного поля до нуля образец полностью раскручивается (путь показан стрелками; красная линия соответствует задаче, в которой прямой фазовый переход аустенит–мартенсит осуществлялся при фиксированном перемещении, синяя – задаче, в которой прямой фазовый переход аустенит–мартенсит осуществлялся при фиксированном усилии). Этот рисунок демонстрирует возможность осуществления обратного фазового перехода при постоянной температуре, превышающей A_f , при снятии магнитного поля, приложенного в мартенситном состоянии.

На рис. 5 красной линией показано распределение сдвиговой компоненты тензора истинных напряжений по радиусу при кручении в аустенитном состоянии (упругое решение), а синей – распределение напряжений после прямого фазового перехода (в мартенситном состоянии) при фиксированном перемещении на внешней поверхности.

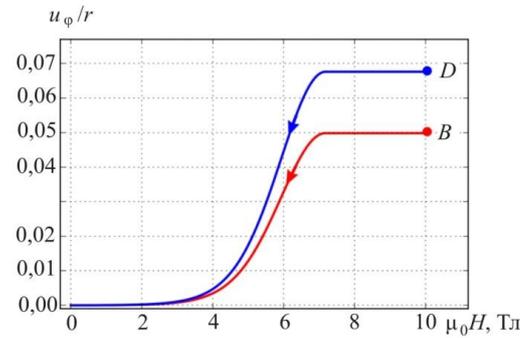


Рис. 4. Раскручивание образца при снятии магнитного поля

Fig. 4. Untwisting of the sample when removing the magnetic field

Видно, что после прямого фазового перехода напряжение становится отрицательным по всему радиусу цилиндра, так как возникающие фазовые деформации при фиксированном перемещении на внешней поверхности приводят к отрицательным упругим деформациям (об этом говорилось при обсуждении рис. 2). Точки a, b, c, d соответствуют сдвиговым усилиям на внешней и внутренней поверхностях.

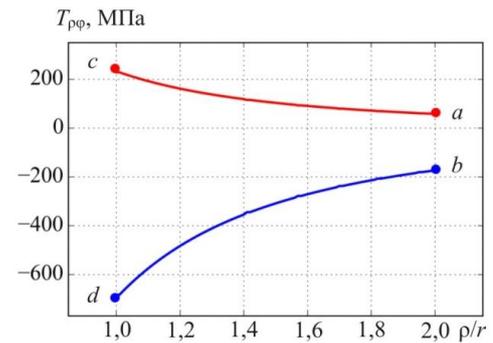


Рис. 5. Распределение сдвигового усилия по радиусу

Fig. 5. Distribution of shear force along the radius

На рис. 6 показаны зависимости сдвигового усилия на внешней (синей линией) и внутренней (красной линией) поверхностях от температуры (прямой фазовый переход при охлаждении при фиксированном на внешней поверхности перемещении и последующей разгрузке). Напряжения, отмеченные точками a, b, c, d, соответствуют тем же точкам на рис. 5. При уменьшении температуры сдвиговые усилия уменьшаются и становятся отрицательными. При последующем снятии нагрузки на внешней поверхности ($T_{\rho\phi}$, соответствующее точке b, стремится к нулю) при фиксированной внутренней поверхности, $T_{\rho\phi}$ на внутренней поверхности, соответствующее точке d, тоже стремится к нулю.

На рис. 7 представлено распределение сдвиговой компоненты тензора фазовых деформаций по радиусу. Красная линия – результат решения, полученный при фазовом переходе при фиксированном перемещении на внешней поверхности, синяя – при фиксированном усилии.

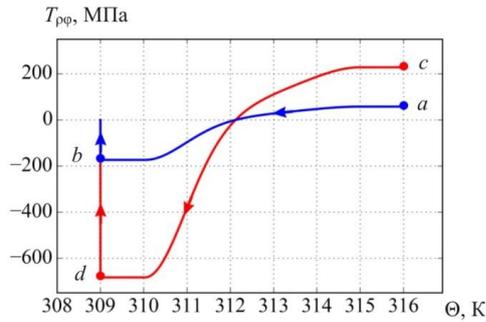


Рис. 6. Зависимость сдвигового усилия от температуры

Fig. 6. Dependence of shear force on temperature

Из рисунка видно, что охлаждение при фиксированном усилии дает большие фазовые деформации, чем охлаждение при фиксированном перемещении, поскольку во втором случае, как уже говорилось при обсуждении рис. 2, происходит уменьшение напряжений в процессе охлаждения по всему образцу (см. рис. 5), что замедляет развитие фазовых деформаций.

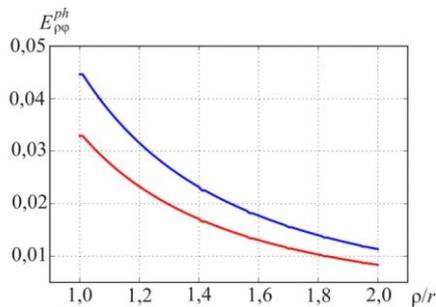


Рис. 7. Распределение фазовых деформаций по радиусу

Fig. 7. Distribution of phase strains along the radius

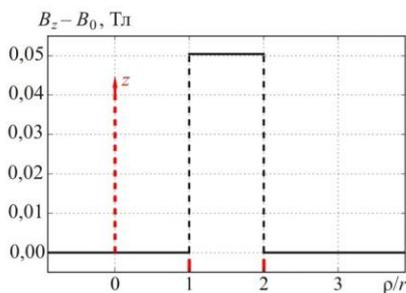


Рис. 8. Распределение осевой составляющей B_z вектора магнитной индукции

Fig. 8. Distribution of the axial component of the magnetic inductance vector

На рис. 8 показан разрыв в осевой (касательной к поверхности цилиндра) составляющей B_z вектора

магнитной индукции \mathbf{B} для рассматриваемой задачи, о чем говорилось в начале этого раздела. Здесь $B_0 = \mu_0 H_0$. Все остальные составляющие вектора \mathbf{B} равны нулю. Разрыва в нормальной к поверхности цилиндра составляющей вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} в данной задаче не происходит, что уже отмечалось ранее.

Заключение

В рамках модели, описывающей поведение сплавов с памятью формы при конечных деформациях, решена краевая задача о накоплении и снятии фазовых деформаций в длинном полем цилиндре из ферромагнитного сплава с памятью формы (сплаве Гейслера). Показано, что величина накопленных фазовых деформаций в процессе прямого перехода зависит от граничных условий. Полное снятие накопленных деформаций может происходить как при нагревании образца в интервале температур обратного фазового перехода, так и при постоянной температуре, превышающей температуру конца обратного фазового перехода мартенсит–аустенит при отсутствии силового и магнитного полей, в случае снятия магнитного поля, предварительно приложенного в мартенситном состоянии. Последнее продемонстрировано на примере раскручивания внешней поверхности цилиндра из ферромагнитного материала, предварительно закрученной в аустенитном состоянии и значительно увеличившей угол закрутки в результате фазового перехода в мартенситное состояние.

Отметим, что с помощью описанной модели в работе [38] представлено решение задачи о натягивания предварительно сдвинутой в осевом направлении внешней поверхности цилиндра из ферромагнитного сплава с памятью формы как при нагревании образца в интервале температур обратного фазового перехода, так и при постоянной температуре при снятии магнитного поля, предварительно приложенного в мартенситном состоянии.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания (номер гос. регистрации АААА-А16-116121410009-8).

Acknowledgment

The work was made within the State Assignment (No. АААА-А16-116121410009-8).

Список литературы

1. Ферромагнетики с памятью формы / А.Н. Васильев [и др.] // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 6. – С. 577–608. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200306a.0577
2. Магнитные сплавы с памятью формы: фазовые переходы и функциональные свойства / В.Д. Бучельников [и др.] // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176, № 8. – С. 900–906. DOI: 10.3367/UFNr.0176.200608j.0900
3. Roubicek T., Stefanell U. Magnetic shape-memory alloys: thermomechanical modelling and analysis // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2014. – Vol. 26. – No. 6. – P. 783–810. DOI: 10.1007/s00161-014-0339-8
4. Lagoudas D.C. Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications. – New York: Springer Science+Business Media, 2008. – 455 p. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8
5. Haldar K., Lagoudas D.C., Karaman I. Magnetic field-induced martensitic phase transformation in magnetic shape memory alloys: Modeling and experiments // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2014. – Vol. 69. – P. 33–66. DOI: 10.1016/j.jmps.2014.04.011
6. Kiefer B., Lagoudas D.C. Modeling the coupled strain and magnetization response of magnetic shape memory alloys under magnetomechanical loading // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2009. – Vol. 20. – P. 143–170. DOI: 10.1177/1045389X07086688
7. A three-dimensional model of magneto-mechanical behaviors of martensite reorientation in ferromagnetic shape memory alloys / X. Chen, Z. Moumni, Y. He, W. Zhang // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2014. – Vol. 64. – P. 249–286. DOI: 10.1016/j.jmps.2013.11.005
8. Thermal effects on high-frequency magnetic-field-induced martensite reorientation in ferromagnetic shape memory alloys: An experimental and theoretical investigation / S. Zhang, X. Chen, Z. Moumni, Y. He // International Journal of Plasticity. – 2018. – Vol. 108. – P. 1–20. DOI: 10.1016/j.ijplas.2018.04.008
9. Peng Q., He Y.J., Moumni Z. A phase-field model on the hysteretic magneto-mechanical behaviors of ferromagnetic shape memory alloy // Acta Materialia. – 2015. – Vol. 88. – P. 13–24. DOI: 10.1016/j.actamat.2015.01.044
10. Shape memory effect due to magnetic field induced thermoelastic martensitic transformation in polycrystalline Ni-Mn-Fe-Ga alloy / A.A. Cherechukin [et al.] // Physics Letters A. – 2001. – Vol. 291. – No. 2–3. – P. 175–183. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00688-0
11. Training of the Ni-Mn-Fe-Ga ferromagnetic shape-memory alloys due cycling in high magnetic field / A.A. Cherechukin [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2003. – Vol. 258–259. – P. 523–525. DOI: 10.1016/S0304-8853(02)010
12. Наблюдение одностороннего эффекта памяти формы, обусловленного магнитоиндуцированным мартенситным фазовым переходом в сплаве Ni-Mn-Fe-Ga [Электронный ресурс] / В.Г. Шавров [и др.] // Журнал радиоэлектроники. – 2001. – № 4. – URL: http://jre.cplire.ru/jre/may01/1/text_r.html (дата обращения: 25.03.2019).
13. Малыгин Г.А. Теория эффектов магнитной памяти формы и псевдоупругой деформации в сплавах Ni–Mn–Ga // Физика твердого тела. – 2009. – Т. 51, № 8. – С. 1599–1603.
14. Малыгин Г.А. Моделирование эффекта магнитной памяти формы в пленках сплава Ni₂MnGa // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, № 2. – С. 136–139.
15. Bustamante R., Dorfman A., Ogden R.W. Universal relations in isotropic nonlinear magnetoelasticity // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 59. – No. 3. – P. 435–450. DOI: 10.1093/qjmam/hbl010
16. Bustamante R., Dorfman A., Ogden R.W. A nonlinear magnetoelastic tube under extension and inflation in an axial magnetic field: numerical solution // Journal of Engineering Mathematics. – 2007. – Vol. 59. – No. 1. – P. 139–153. DOI: 10.1007/s10665-006-9088-4
17. Bustamante R., Dorfman A., Ogden R.W. Numerical solution of finite geometry boundary-value problems in nonlinear magnetoelasticity // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol. 48. – No. 6. – P. 874–883. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.11.021
18. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
19. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 585 с.
20. Rogovoy A.A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2012. – Vol. 24. – No. 2. – P. 81–114. DOI: 10.1007/s00161-011-0220-y
21. Роговой А.А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестн. Перм. техн. ун-та. Динамика и прочность машин. – 2001. – № 2. – С. 83–90.
22. Rogovoy A.A. Differentiation of scalar and tensor functions of tensor argument // IOSR Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 15. – No. 2. – P. 1–20. DOI: 10.9790/5728-1502010120
23. A thermodynamically-consistent 3D constitutive model for shape memory polymers / M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani, S. Sohrabpour // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol. 35. – P. 13–30. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.01.007
24. Baghani M., Naghdabadi R., Arghavani J. A large deformation framework for shape memory polymers: Constitutive modeling and finite element implementation // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2013. – Vol. 24. – No. 1. – P. 21–32. DOI: 10.1177/1045389X12455728
25. Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling / Y. Liu [et al.] // International Journal of Plasticity. – 2006. – Vol. 22. – P. 279–313. DOI: 10.1016/j.ijplas.2005.03.004
26. Rogovoy A., Stolbova O. Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol. 85. – P. 130–155. DOI: 10.1016/j.ijplas.2016.07.006
27. Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation / F. Auricchio [et al.] // International Journal of Plasticity. – 2014. – Vol. 59. – P. 30–54. DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.03.008
28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol. 76. – P. 244–284. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.08.006
29. Analytical model for the torsional response of superelastic shape memory alloy circular sections subjected to a loading-unloading cycle / N.V. Viet [et al.] // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 156–157. – P. 49–60. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.08.001
30. Мовчан А.А., Чжо Ту Я. Решение начально-краевых задач о прямом и обратном превращении в рамках нелинейной теории деформирования сплавов с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 4. – С. 452–468.

31. Мовчан А.А., Шельмагин П.В., Казарина С.А. Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 152–160.

32. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 164–178.

33. Мовчан А.А., Чжо Ту Я. Решение связанной термоэлектромеханической задачи для стержня из сплава с памятью формы в рамках теории нелинейного деформирования этих материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 3. – С. 443–460.

34. Роговой А.А., Столбова О.С. Конечные деформации в сплавах и полимерах с памятью формы // Учен. зап. КнАГТУ. – 2018. – Т. 1, № 3 (35). – С. 6–17.

35. Бозорт Р. Ферромагнетизм. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 784 с.

36. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

37. Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of Elasticity Solutions. – Dordrecht, Springer Science+Business Media, 2003. – 324 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0169-3

38. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Numerical simulation of the phase transition control in a cylindrical sample made of ferromagnetic shape memory alloy // Computation. – 2019. – Vol. 7. – No. 3. – P. 38.1–38.15. DOI: 10.3390/computation7030038

References

1. Vasil'ev A.N. Shape memory ferromagnets // *Physics-Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 559-588. DOI: 10.1070/PU2003v046n06ABEH001339

2. Vasil'ev V.D. Magnetic shape-memory alloys: phase transitions and functional properties. *Physics-Uspekhi*, 2006, vol. 49, no. 8, pp. 871-877. DOI: 10.1070/PU2006v049n08ABEH006081

3. Roubicek T., Stefanell U. Magnetic shape-memory alloys: thermomechanical modelling and analysis. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2014, vol. 26, no. 6, pp. 783-810. DOI: 10.1007/s00161-014-0339-8

4. Lagoudas D.C. Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications. *New York, Springer Science+Business Media*, 2008, 455 p. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8

5. Haldar K., Lagoudas D.C., Karaman I. Magnetic field-induced martensitic phase transformation in magnetic shape memory alloys: Modeling and experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, vol. 69, pp. 33-66. DOI: 10.1016/j.jmps.2014.04.011

6. Kiefer B., Lagoudas D.C. Modeling the coupled strain and magnetization response of magnetic shape memory alloys under magnetomechanical loading. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, vol. 20, pp. 143-170. DOI: 10.1177/1045389X07086688

7. Chen X., Moumni Z., He Y., Zhang W. A three-dimensional model of magneto-mechanical behaviors of martensite reorientation in ferromagnetic shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, vol. 64, pp. 249-286. DOI: 10.1016/j.jmps.2013.11.005

8. Zhang S., Chen X., Moumni Z., He Y. Thermal effects on high-frequency magnetic-field-induced martensite reorientation in ferromagnetic shape memory alloys: An experimental and theoretical investigation. *International Journal of Plasticity*, 2018, vol. 108, pp. 1-20. DOI: 10.1016/j.ijplas.2018.04.008

9. Peng Q., He Y.J., Moumni Z. A phase-field model on the hysteretic magneto-mechanical behaviors of ferromagnetic shape memory alloy. *Acta Materialia*, 2015, vol. 88, pp. 13-24. DOI: 10.1016/j.actamat.2015.01.044

10. Cherechukin A.A. Shape memory effect due to magnetic field induced thermoelastic martensitic transformation in polycrystalline Ni-Mn-Fe-Ga alloy. *Physics Letters A*, 2001, vol. 291, no. 2-3, pp. 175-183. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00688-0

11. Cherechukin A.A. Training of the Ni-Mn-Fe-Ga ferromagnetic shape-memory alloys due cycling in high magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2003, vol. 258-259, pp. 523-525. DOI: 10.1016/S0304-8853(02)010

12. Shavrov V.G. Observation of the one-way shape memory effect in Ni-Mn-Fe-Ga heusler alloy due to the magnetic

field induced martensite – austenite transition. *Journal of radioelectronics*, 2001, no. 4.

13. Malygin G.A. Theory of magnetic shape memory effect and pseudoelastic deformation in Ni-Mn-Ga alloys. *Physics of the solid state*, 2009, vol. 51, no. 8, pp. 1694-1699. DOI: 10.1134/S1063783409080290

14. Malygin G.A. Modeling of the magnetic shape memory effect in Ni₂MnGa films. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2007, vol. 52, no. 2, pp. 281-284. DOI: 10.1134/S1063784207020223

15. Bustamante R., Dorfman A., Ogden R.W. Universal relations in isotropic nonlinear magnetoelasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2006, vol. 59, no. 3, pp. 435-450. DOI: 10.1093/qjmath/hbl010

16. Bustamante R., Dorfman A., Ogden R.W. A nonlinear magnetoelastic tube under extension and inflation in an axial magnetic field: numerical solution. *Journal of Engineering Mathematics*, 2007, vol. 59, no. 1, pp. 139-153. DOI: 10.1007/s10665-006-9088-4

17. Bustamante R., Dorfman A., Ogden R.W. Numerical solution of finite geometry boundary-value problems in nonlinear magnetoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, no. 6, pp. 874-883. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.11.021

18. Lur'e A.I. Nelineinaia teoriia uprugosti [Nonlinear elasticity theory]. *Moscow, Nauka*, 1980, 512 p.

19. Trusdell C. A. A First course in rational continuum mechanics. *Baltimore, J. Hopkins Univ.*, 1972.

20. Rogovoy A.A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2012, vol. 24, no. 2, pp. 81-114. DOI: 10.1007/s00161-011-0220-y

21. Rogovoy A.A. Differentirovanie skaliarnykh i tenzornykh funktsii tenzornogo argumenta [Differentiation of the scalar and tensor function of the tensor argument]. *Vestnik PermGTU. Dinamika i prochnost' mashin*, 2001, no. 2, pp. 83-90.

22. Rogovoy A.A. Differentiation of scalar and tensor functions of tensor argument. *IOSR Journal of Mathematics*, 2019, vol. 15, no. 2, pp. 1-20. DOI: 10.9790/5728-1502010120

23. Baghani M., Naghdabadi R., Arghavani J., Sohrabpour S. A thermodynamically-consistent 3D constitutive model for shape memory polymers. *International Journal of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 13-30. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.01.007

24. Baghani M., Naghdabadi R., Arghavani J. A large deformation framework for shape memory polymers: Constitutive modeling and finite element implementation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2013, vol. 24, no. 1, pp. 21-32. DOI: 10.1177/1045389X12455728

25. Liu Y. Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling. *International Journal of Plasticity*, 2006, vol. 22, pp. 279-313. DOI: 10.1016/j.ijplas.2005.03.004
26. Rogovoy A., Stolbova O. Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys. *International Journal of Plasticity*, 2016, vol. 85, pp. 130-155. DOI: 10.1016/j.ijplas.2016.07.006
27. Auricchio F. Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation. *International Journal of Plasticity*, 2014, vol. 59, pp. 30-54. DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.03.008
28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys. *International Journal of Plasticity*, 2016, vol. 76, pp. 244-284. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.08.006
29. Viet N.V. Analytical model for the torsional response of superelastic shape memory alloy circular sections subjected to a loading-unloading cycle. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 156-157, pp. 49-60. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.08.001
30. Movchan A. A., Chzho Tu Ia. Reshenie nachal'no-kraevykh zadach o priamom i obratnom prevrashchenii v ramkakh nelineinoy teorii deformirovaniia splavov s pamiat'iu formy [Solution of boundary problems of forward and inverse transformations in the framework of nonlinear deformation theory of shape memory alloys]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2007, vol.13, no.4, pp.452-468.
31. Movchan A.A., Shelymagin P.V., Kazarina S.A. Constitutive equations for two-step thermoelastic phase transformations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, vol. 42, no 5, pp. 864-871.
32. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. Analytical solution of the coupled buckling problem for a plate from a shape memory alloy subjected to inverse martensite formation. *Mechanics of Solids*, 2004, vol. 39, no. 5, pp. 134-145.
33. Movchan A.A., Chzho Tu Ia. Reshenie svyazannoi termoelektromekhanicheskoi zadachi dlia sterzhnia iz splava s pamiat'iu formy v ramkakh teorii nelineinogo deformirovaniia etikh materialov [Solution of the coupled thermoelectromechanics problem for the beam from shape memory alloys in the framework of the non-linear theory of deformation of these materials]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2008, vol. 14, no 3, pp. 443-460.
34. Rogovoi A.A., Stolbova O.S. Konechnye deformatsii v splavakh i polimerakh s pamiat'iu formy [Final deformations in alloys and polymers with memory of the shape]. *Uchenye zapiski KnAGTU*, 2018, vol. 1, no 3 (35), pp. 6-17.
35. Bozorth R. M. Ferromagnetism. *New York, Wiley*, 1993, 992 p.
36. Lur'e A.I. Teoriia uprugosti [Elasticity theory]. *Moscow, Nauka*, 1970, 940 p.
37. Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of Elasticity Solutions. Dordrecht. *Springer Science+Business Media*, 2003, 324 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0169-3
38. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Numerical simulation of the phase transition control in a cylindrical sample made of ferromagnetic shape memory alloy. *Computation*, 2019, vol. 7, no. 3, pp. 38.1-38.15. DOI: 10.3390/computation7030038