

Багмутов В.П., Денисевич Д.С., Захаров И.Н., Романенко М.Д., Фастов С.А. Математическое моделирование остаточных напряжений при импульсном термосиловом поверхностном упрочнении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 3. С. 112-124. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.12

Bagmutov V.P., Denisevich D.S., Zakharov I.N., Romanenko M.D., Fastov S.A. Simulation of residual stresses during pulsed thermo-force surface hardening. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 3, pp. 112-124. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.12



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.12

УДК 539.319 – 539.377

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ТЕРМОСИЛОВОМ ПОВЕРХНОСТНОМ УПРОЧНЕНИИ

В.П. Багмутов, Д.С. Денисевич, И.Н. Захаров, М.Д. Романенко, С.А. Фастов

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 3 декабря 2018 г.  
Принята: 28 августа 2019 г.  
Опубликована: 17 октября 2019 г.

#### Ключевые слова:

численное исследование, метод конечных элементов, фазовые превращения, остаточные напряжения, пластичность, микронапряжения, контактная задача, кинематическое упрочнение.

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается проблема решения связанных задач механики применительно к моделированию остаточных напряжений при нестационарных тепловых воздействиях. Объектом исследования является технология электромеханической обработки в приложении к титановым псевдо- $\alpha$ -сплавам, которые при локальном тепловом воздействии на поверхностный слой изменяют свой фазовый состав в связи с мартенситным фазовым переходом.

Приведена математическая постановка, рассмотрены особенности и методы решения связанной термосиловой контактной задачи с учетом фазовых превращений, протекающих при высокоскоростном охлаждении. Показаны основные этапы построения необходимых определяющих соотношений. Приведены соответствующие соотношения теории пластического течения в скоростной форме в рамках изотропно-трансляционной модели упрочнения, рассмотрены вопросы интегрирования данных соотношений. Показана методика определения нестационарной зоны контакта абсолютно жесткого штампа и деформируемого полупространства. Отдельно рассмотрены основные этапы линеаризации используемого вариационного уравнения.

В рамках разработанного алгоритма проведена серия вычислительных экспериментов, моделирующих температурно-силовое воздействие на титановый псевдо- $\alpha$ -сплав  $Ti_6Al_2V$  применительно к технологии импульсного термосилового поверхностного упрочнения. Установлено, что электромеханическая обработка поверхности титановых сплавов приводит к формированию в поверхностном слое дискретно структурированных областей остаточных напряжений, что связано, с одной стороны, с импульсным воздействием источника тепла (синусоида), а с другой стороны, с дискретностью формирующейся мартенситной структуры. Показана значительная роль деформационной составляющей воздействия на материал при формировании остаточных напряжений, в частности, установлено, что при увеличении усилия на инструменте с 10 до 250 Н величина растягивающих остаточных напряжений уменьшается в 3 раза.

© ПНИПУ

© Багмутов Вячеслав Петрович – д.т.н, проф., e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru), ID: [0000-0003-3648-8450](https://orcid.org/0000-0003-3648-8450)

Денисевич Денис Сергеевич – асс., e-mail: [adven148@ya.ru](mailto:adven148@ya.ru), ID: [0000-0003-2278-251X](https://orcid.org/0000-0003-2278-251X)

Захаров Игорь Николаевич – д.т.н, зав. каф., e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru), ID: [0000-0001-7177-7245](https://orcid.org/0000-0001-7177-7245)

Романенко Михаил Дмитриевич – асп., e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru), ID: [0000-0003-0212-1925](https://orcid.org/0000-0003-0212-1925)

Фастов Сергей Александрович – лаб., e-mail: [weld@vstu.ru](mailto:weld@vstu.ru), ID: [0000-0002-3371-0434](https://orcid.org/0000-0002-3371-0434)

Vyacheslav P. Bagmutov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru),

ID: [0000-0003-3648-8450](https://orcid.org/0000-0003-3648-8450)

Denis S. Denisevich – Assistant, e-mail: [adven148@ya.ru](mailto:adven148@ya.ru), ID: [0000-0003-2278-251X](https://orcid.org/0000-0003-2278-251X)

Igor N. Zakharov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department,

e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru), ID: [0000-0001-7177-7245](https://orcid.org/0000-0001-7177-7245)

Mikhail D. Romanenko – PhD Student, e-mail: [sopromat@vstu.ru](mailto:sopromat@vstu.ru), ID: [0000-0003-0212-1925](https://orcid.org/0000-0003-0212-1925)

Sergey A. Fastov – Assistant, e-mail: [weldt@vstu.ru](mailto:weldt@vstu.ru), ID: [0000-0002-3371-0434](https://orcid.org/0000-0002-3371-0434)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



## SIMULATION OF RESIDUAL STRESSES DURING PULSED THERMO-FORCE SURFACE HARDENING

V.P. Bagmutov, D.S. Denisevich, I.N. Zakharov, M.D. Romanenko, S.A. Fastov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 3 December 2018

Accepted: 28 August 2019

Published: 17 October 2019

#### Keywords:

numerical simulation, finite element method, phase transition, residual stresses, plasticity, back stress, contact mechanics, kinematic hardening.

### ABSTRACT

The paper deals with solving the mechanic connected problems applying to residual stresses under non-stationary thermal effects. The research is aimed at the electromechanical processing technology in the application to titanium pseudo- $\alpha$ -alloys which change their phase composition due to the martensitic phase transition under local thermal effects on the surface layer.

The paper provides a mathematical formulation, considered features and methods for solving a thermostable contact problem inclusive of the phase transformations occurring during high-speed cooling. The main stages of building the necessary defining relations are shown. Relevant correlations of the plastic flow theory in the velocity form in the limits of the isotropic-translational hardening model are given, issues of integrating these correlations are considered. The technique determining the non-stationary contact zone of an absolutely rigid stamp and a deformable half-space is shown. The main linearization stages of the variational equation used are considered separately.

Within the developed algorithm, a series of computational experiments were made simulating the temperature-force effect in  $Ti_6Al_2V$  titanium pseudo- $\alpha$ -alloy as applied to the technology of the pulsed thermal-force surface hardening. It is established that the electromechanical surface treatment of titanium alloys leads to the formation of discretely structured regions of residual stresses in the surface layer, which is connected to one of the following factors: the heat source (sinusoid), and on the other hand, the martensitic structure which is discrete. The significant role of the deformational effect on the material when residual stresses formation is shown. In particular, it has been established that in the case of an increasing loading on the tool from 10 N to 250 N, the value of the tensile residual stresses decreases by 3 times.

© PNRPU

### Введение

Оптимизация механических свойств конструкционных материалов с помощью современных высокоэнергетических технологий, таких как лазерная обработка, ионная имплантация, аддитивное наращивание и др., особенно применительно к перспективным материалам, представляет собой значимую проблему для современного машиностроения. Одним из важнейших параметров, подвергаемых оптимизации, является распределение остаточных напряжений, наведенных в процессе обработки. В частности, интенсивное тепловое воздействие приводит к формированию растягивающих остаточных напряжений в направлении обработки, которые провоцируют хрупкое разрушение, коррозионное растрескивание и в целом оказывают негативное влияние на усталостную долговечность готового изделия [1]. Особенно остро данная проблема проявляется применительно к поверхностной обработке титановых сплавов [2, 3].

Спрогнозировать остаточные напряжения можно с помощью методов вычислительной механики сплошных сред в рамках уже сложившегося класса технологических задач, успешно решаемых применительно к сварочным [4, 5], литейным процессам [6, 7], поверхностному упрочнению [8, 26, 30] и др. [31–33]. Недостоверность результатов применения аналитических

подходов объясняется нелинейным нестационарным характером, а также высокой скоростью тепловых процессов, которые часто сопровождаются фазовыми превращениями. Дополнительные трудности связаны с неоднородностью свойств деформируемого тела, геометрией, фактически формирующейся под действием внешних полей, и сложным механическим поведением материала при пластическом деформировании, особенно при конечных деформациях [34, 35]. Кроме того, особенностью таких задач является их связанность, которая приводит к необходимости учета значительного количества дополнительных эффектов и явлений [9, 18].

Несмотря на то, что теоретическую базу для решения связанных задач механики можно считать хорошо освещенной в зарубежных [10–12] и отечественных публикациях [13–15], особенно в рамках макрофеноменологического подхода к построению определяющих соотношений и описанию фазовых превращений [16, 17], работ, в которых показано использование данного задела в виде алгоритмов и доведенных до практического результата применительно к конкретному технологическому процессу, в отечественной литературе все еще немного.

Цель исследования заключается в решении связанных задач МДГТ по прогнозированию НДС титановых псевдо- $\alpha$ -сплавов, подвергнутых импульсному термодинамическому воздействию.

Объектом исследования является технология электромеханической обработки в приложении к титановым псевдо- $\alpha$ -сплавам, которые при локальном тепловом воздействии на поверхностный слой изменяют свой фазовый состав в связи с мартенситным фазовым переходом.

## 1. Основные уравнения и граничные условия

Электромеханическая обработка представляет собой поверхностную закалку за счет тепла, выделяющегося при прохождении переменного тока высокой плотности через зону контакта детали и движущегося со скоростью  $v$  и усилием  $P$  деформирующего электрода-инструмента (ролика или пластины).

Далее показана математическая (континуальная) постановка связанной термосилового контактной задачи с учетом фазовых превращений, а также используемое при численном решении вариационное уравнение.

### 1.1. Континуальная постановка

Решение задачи основано на системе дифференциальных уравнений теплопроводности и равновесия (квазистатическая постановка), содержащей в явном виде связанные члены:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\ -\nabla \cdot \mathbf{q} + Q_{\text{фаз}} + Q_{\text{мех}} &= \text{ср} \dot{T} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\nabla$  – оператор набла в актуальной конфигурации деформируемого тела;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши;  $\mathbf{f}$  – вектор объемных сил;  $\mathbf{q}$  – вектор потока тепла;  $T$  – температура;  $Q_{\text{фаз}}$  – скрытая теплота фазовых превращений;  $Q_{\text{мех}}$  – теплота, соответствующая диссипации механической энергии при пластическом деформировании<sup>1</sup>.

Основные уравнения дополнены начальными и граничными условиями применительно к импульсной (переменным током) ЭМО детали твердосплавным инструментом в форме ролика (рис. 1, 1–3).

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0}, & \Gamma \notin \Gamma_c, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_c, \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_c \, d\Gamma = \mathbf{f}_{\text{вн}}, & \Gamma \in \Gamma_c, \\ g_n &\geq 0, \sigma_n \geq 0, g_n \sigma_n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности деформируемого тела в текущей конфигурации;  $\mathbf{f}_{\text{вн}}$  – век-

тор внешней нагрузки, действующей на штамп;  $t_c$  – интенсивность нагрузки в контактной зоне;  $g_n$  – функция расстояния (между деформируемой поверхностью и инструментом);  $\sigma_n$  – контактное давление;  $u_i$  – компоненты вектора перемещений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформации;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений.

Контактный инструмент смоделирован эллипсоидным штампом, который принимался абсолютно жестким (материал ролика значительно тверже материала обрабатываемой детали). На свободной поверхности задано равенство нулю нормальных и касательных напряжений. Силовые граничные условия дополнены краевыми условиями Герца–Синьорини. На бесконечности и в начальный момент времени напряжения, деформации и перемещения отсутствуют.

Расчетная область вследствие малой кривизны поверхности и локальности воздействия задавалась в виде полупространства с подобластями (зонами), различающимися по физико-механическим свойствам. Границы данных зон соответствуют областям металла с разной структурой, формирующейся в ходе термосилового нагружения (например, фрагменты со структурой закалки, отпуска и исходного состояния; зоны 1, 2 на рис. 1). Их текущее положение необходимо устанавливать на каждом расчетном шаге из решения рассматриваемой связанной задачи.

В подвижной зоне контакта эллипсоидного штампа и детали задавался эквивалентный равномерно распределенный поверхностный источник тепла  $q$  переменный во времени  $t$ . Температура в начальный момент времени  $T^0$  и на бесконечности  $T^\infty$  равна температуре окружающей среды  $T_{\text{ср}}$ , краевые условия на поверхности для второго уравнения системы (1) заданы системой

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= h(T - T_{\text{ср}}) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_{\text{ср}}^4), & \Gamma \notin \Gamma_c, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= -q_{\text{дж}}, & \Gamma \in \Gamma_c, \\ T^0 &= T_{\text{ср}} \quad T^\infty = T_{\text{ср}}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $h$  – коэффициент конвективного теплообмена;  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана;  $\varepsilon$  – коэффициент теплового излучения. В случае ЭМО переменным током удельная мощность источника  $q_{\text{дж}}$  определяется согласно закону Джоуля–Ленца:

$$q_{\text{дж}} = 2kUI \sin^2(2\pi vt), \quad (4)$$

где  $I$  – действующее значение силы тока;  $U$  – падение напряжения в контактной области;  $k$  – коэффициент, учитывающий перераспределения тепла между инструментом и деталью;  $v$  – частота тока.

Специфика задачи также требует анализа структуры металлического сплава, подвергнутого ЭМО, для определения физико-механических свойств в данной точке в текущий момент времени. Особенности решения тепловой части задачи, а также моделирование фазовых превращений были опубликованы ранее [18].

<sup>1</sup> В работе в соответствии с принятыми обозначениями скалярные величины записываются строчными и прописными латинскими и греческими символами; **векторные** – строчными жирными латинскими символами; **тензоры второго ранга** – заглавными жирными латинскими и строчными жирными греческими символами; **тензоры высших рангов** – заглавными и строчными жирными латинскими символами с выделением ранга левым верхним индексом

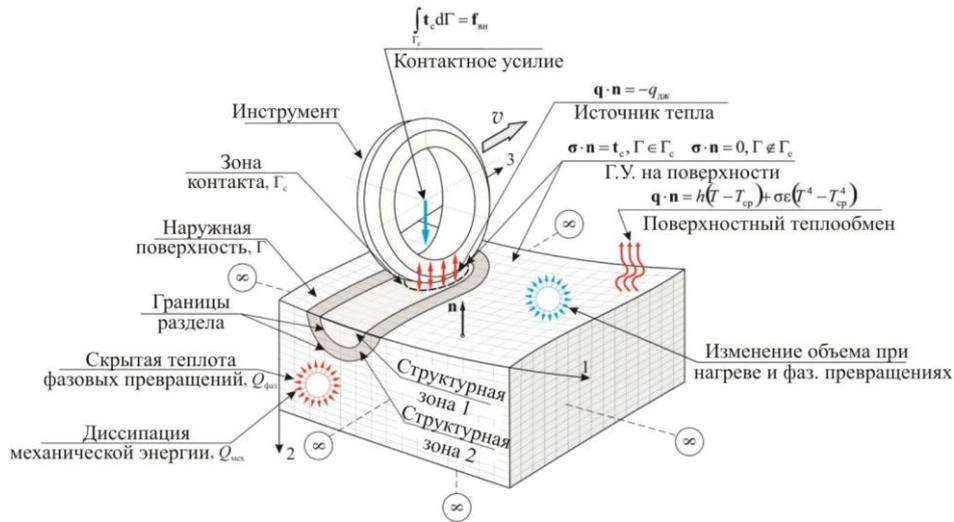


Рис. 1. Расчетная схема неоднородного тела и граничные условия при контактном температурно-силовом воздействии (в ходе ЭМО)

Fig. 1. Computational scheme of a non-uniform body and boundary conditions under the contact temperature-force effect (during the EMT)

### 1.2. Вариационное уравнение и геометрия контактного взаимодействия

В работе использовался вариант вариационного уравнения в актуальной конфигурации деформируемого тела с дополнительным контактным членом, введенным согласно методу штрафов [25]:

$$\int_{n+1\Omega} \nabla \otimes \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} d\Omega = \int_{n+1\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{n+1\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} \mathbf{g}_n \mathbf{n} \otimes \delta \mathbf{u} d\Gamma, \quad (5)$$

где  $\mathbf{t}$  – вектор напряжений;  $\omega_n$  – параметр штрафа;  $\mathbf{n}(\xi^1, \xi^2)$  – вектор нормали на поверхности штампа. Поверхность эллипсоидного штампа в каждый момент времени описывалась непрерывными взаимно-однозначными функциями  $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2)$ :

$$\begin{aligned} x^1 &= a \sin(\xi^1) \sin(\xi^2) + x_0, & 0 \leq \xi^1 \leq 2\pi, \\ x^2 &= b \sin(\xi^1) \cos(\xi^2) + w, & -\frac{\pi}{2} \leq \xi^2 \leq \frac{\pi}{2}, \\ x^3 &= c \cos(\xi^1) + z_0 + v \cdot t, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $a, b, c$  – полуоси эллипсоида;  $x_0, z_0$  – начальное положение центра эллипсоида;  $v$  – линейная скорость движения штампа;  $w$  – текущая глубина внедрения штампа.

Важным этапом решения задачи является определение зоны контакта. Для этого на первом этапе необходимо для точек  $\mathbf{x}_s$ , находящихся на сопряженной поверхности деформируемого тела (рис. 2), найти соответствующую ближайшую точку на поверхности

штампа  $\mathcal{X}$  и в зависимости от расстояния между ними определить статус контакта. Математически данную задачу в общем виде можно сформулировать в виде системы нелинейных уравнений вида

$$\kappa^i(\xi^1, \xi^2) = (\mathbf{x}_s - \mathcal{X}(\xi^1, \xi^2)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} = 0, \quad (7)$$

где  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_k = \mathbf{g}_i$  – касательные векторы в точке контакта на поверхности жесткого штампа.

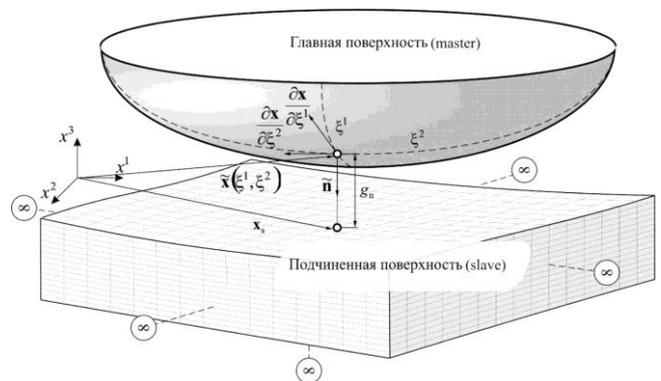


Рис. 2. Геометрия контактного взаимодействия

Fig. 2. Contact interaction geometry

Уравнение (7) не имеет аналитического решения, поэтому для определения точки контакта использовался метод Ньютона:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \kappa^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \kappa^1}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \kappa^2}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \xi^1 \\ \Delta \xi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa^1 \\ -\kappa^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $\Delta \xi^i$  – коррекция точки контакта на текущем шаге решения локальной системы нелинейных уравнений. После определения ближайшей точки на главной поверхности необходимо вычислить функцию расстояния, которая определяется согласно следующему выражению:

$$g_n = (\mathbf{x}_s - \mathfrak{R}(\xi^1, \xi^2)) \cdot \mathfrak{n}(\xi^1, \xi^2). \quad (9)$$

Для точек, находящихся в контакте, функция (9) принимает значения меньше нуля.

## 2. Построение определяющих соотношений

### 2.1. Скоростная форма

Построение определяющих соотношений в упруго-пластической области деформирования осуществлялось на основе аддитивного разложения тензора скоростей деформации на упругую, пластическую и дилатационную составляющие. Дилатационной части тензора скоростей деформации соответствует тепловая деформация и объемная деформация при фазовых превращениях, вычисляемая пропорционально доле образующейся мартенситной фазы:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^d, \quad (10)$$

где  $\mathbf{D}^d$  – дилатационная часть тензора скоростей деформации;  $\mathbf{D}^d = \left( \alpha_\tau \mathfrak{R} + \frac{1}{3} \delta_\phi \mathfrak{E} \right) \mathbf{1}$ ;  $\alpha_\tau$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_\phi$  – относительное изменение объема при фазовом переходе;  $\mathfrak{E}$  – скорость образования новой фазы ( $\zeta = \zeta(T)$ ). В данной работе для описания мартенситного фазового перехода использовалось уравнение Койстинена–Марбургера, более подробно особенности описания фазового превращения рассмотрены в работе [18].

В работе использовался термодинамический подход к построению определяющих соотношений [19, 27]. В результате связь между напряжениями и деформацией выражалась в следующей форме:

$$\boldsymbol{\sigma}^J = {}^4\mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^d), \quad (11)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}^J$  – производная Яуманна тензора напряжений Коши,  $\boldsymbol{\sigma}^J = \mathfrak{L} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}$ ;  $\mathfrak{L}$  – материальная производная тензора напряжений Коши;  $\mathbf{W}$  – тензор вихря,  $\mathbf{W} = 1/2(\nabla \otimes \mathbf{v}^T - \nabla \otimes \mathbf{v})$ ;  ${}^4\mathbf{C}$  – тензор упругости для изотропной среды,  ${}^4\mathbf{C} = (\lambda + (2/3)\mu)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu {}^4\mathbf{1}_{\text{dev}}$ ;  ${}^4\mathbf{1}_{\text{dev}}$  – единичный тензор-девиатор четвертого ранга,  ${}^4\mathbf{1}_{\text{dev}} = {}^4\mathbf{1} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ ;  $\lambda, \mu$  – константы Ламе;  ${}^4\mathbf{1}$  – симметричный единичный тензор четвертого ранга,  ${}^4\mathbf{1} = 1/2[\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}]\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ ;  $\mathbf{1}$  – единичный

тензор второго ранга,  $\mathbf{1} = \delta^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронемера,  $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Принималась обобщенная функция текучести Мизеса, зависящая от скорости пластической деформации, температуры и фазового состава:

$$f(\boldsymbol{\eta}, e^p, \mathfrak{E}, T, \zeta) = \|\boldsymbol{\eta}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} r(e^p, \mathfrak{E}, T, \zeta) \leq 0, \quad (12)$$

где  $\mathfrak{E}$  – скорость эффективной пластической деформации;  $\boldsymbol{\eta}$  – тензор относительных напряжений,  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$ ;  $\boldsymbol{\alpha}$  – тензор микронапряжений, определяющий центр смещенной поверхности нагружения;  $\mathbf{s}$  – девиаторная часть тензора напряжений Коши,  $\mathbf{s} = {}^4\mathbf{1}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}$ .

Согласно закону ассоциированного пластического течения использовались следующие эволюционные соотношения для принятых внутренних переменных:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}^p &= \mathfrak{R} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \mathfrak{R} \mathbf{N}, \\ \boldsymbol{\alpha}^J &= {}^4\mathbf{H}_\alpha : \mathbf{D}^p = H_\alpha \mathbf{D}^p, \\ \mathfrak{E} &= \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathfrak{R} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $\mathbf{N}$  – единичный тензор-девиатор ортогональный поверхности текучести;  $\mathfrak{R}$  – пластический множитель (множитель Лагранжа), связанный со скоростью пластической деформации;  $\boldsymbol{\alpha}^J$  – производная Яуманна тензора микронапряжений;  ${}^4\mathbf{H}_\alpha = H_\alpha {}^4\mathbf{1}$  – тензор кинематического упрочнения;  $H_\alpha$  – модуль кинематического упрочнения. Использованное правило кинематического упрочнения при этом соответствует обобщенной модели Ишлинского–Прагера [28].

Зависимости модуля кинематического упрочнения и радиуса поверхности текучести  $H_\alpha$  и  $r$  могут быть представлены в виде произвольных гладких функций, аппроксимирующих экспериментальные данные механического поведения материала при высокоскоростном высокотемпературном деформировании [29]. В данной работе использовался модифицированный авторами для комбинированного упрочнения вариант модели Джонсона–Кука [20]:

$$\left. \begin{aligned} r(e^p, \mathfrak{E}, T, \zeta) &= \left[ \sigma_\tau + k_1 (e^p)^{n_1} \right] \times \\ &\times \left[ 1 + k_3 \left( \ln \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_0} \right)^{n_2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_{\text{cp}}}{T_{\text{пл}} - T_{\text{cp}}} \right)^{n_3} \right], \\ H_\alpha(e^p, \mathfrak{E}, T) &= k_2 (e^p)^{n_1} \times \\ &\times \left[ 1 + k_3 \left( \ln \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_0} \right)^{n_2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_{\text{cp}}}{T_{\text{пл}} - T_{\text{cp}}} \right)^{n_3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $T_{пл}$  – температура плавления;  $\mathcal{E}$  – скорость пластической деформации при стандартном испытании на растяжение;  $\sigma_T$ ,  $k_i$ ,  $n_i$  – константы материала. При этом предел текучести материала  $\sigma_T = \sum \zeta_i (\sigma_T)_i$  определяется согласно правилу смеси, также предполагалось, что остальные константы не зависят от фазового состава.

## 2.2. Интегрирование определяющих соотношений

Интегрирование соотношения (13) осуществлялось с использованием локальной промежуточной конфигурации, свободной от жестких поворотов:

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{Q}_\Delta \cdot \sigma_n \cdot \mathbf{Q}_\Delta^T + \Delta t {}^4C : \left( \mathbf{D}_{n+1/2} - \mathbf{D}_{n+1/2}^p - \mathbf{D}_{n+1/2}^d \right), \quad (15)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{Q}_\Delta \cdot \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{Q}_\Delta^T + \Delta t H_\alpha \mathbf{D}_{n+1/2}^p.$$

Ортогональный тензор  $\mathbf{Q}_\Delta = \mathbf{Q}_{n+1} \cdot \mathbf{Q}_n^T = {}^{n+1}\mathbf{q}_i \otimes {}^n\mathbf{q}^i$  ( $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}^i$  – собственный базис тензора скоростей деформации) вычислялся согласно решению однородного дифференциального уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}, \\ \mathbf{Q}|_{t=0} &= \mathbf{1}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Система уравнений (16) решалась численно, согласно следующему выражению [21]:

$$\mathbf{Q}_\Delta = \mathbf{1} + \left( \mathbf{1} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{W}_{n+1/2} \right)^{-1} \Delta t \mathbf{W}_{n+1/2}. \quad (17)$$

Вычисление напряжений на текущем шаге, а также интегрирование соотношений (13), (15) было выполнено с помощью обобщенного авторами алгоритма проецирования напряжений на поверхность нагружения [22], которое в рамках критерия Мизеса происходит в радиальном направлении (рис. 3).

Основной алгоритм при этом состоит из двух этапов. На первом этапе, называемом «упругое приближение», приращения полной деформации, вычисленные согласно (17), считаются полностью упругими. Следовательно, накопленная эффективная пластическая деформация, а также тензор микронапряжений остаются неизменными с предыдущего шага (без учета поворота):

$$\begin{aligned} {}^{\text{tr}}\sigma &= \mathbf{Q}_\Delta \cdot \sigma_n \cdot \mathbf{Q}_\Delta^T + {}^4C : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d), \quad {}^{\text{tr}}\mathbf{a} = \mathbf{Q}_\Delta \cdot \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{Q}_\Delta^T, \\ {}^{\text{tr}}e^p &= e_n^p, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\text{tr}$  – индекс упругого приближения;  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d = \alpha \Delta T_{n+1} \mathbf{1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\Phi$  – суммарное приращение температурной деформации и деформации, соответствующей фазовому переходу.

Далее необходимо вычислить тензор относительных напряжений  ${}^{\text{tr}}\boldsymbol{\eta} = {}^{\text{tr}}\sigma - {}^{\text{tr}}\mathbf{a} - \frac{1}{3} \text{tr}({}^{\text{tr}}\sigma) \mathbf{1}$  и проверить условие текучести.

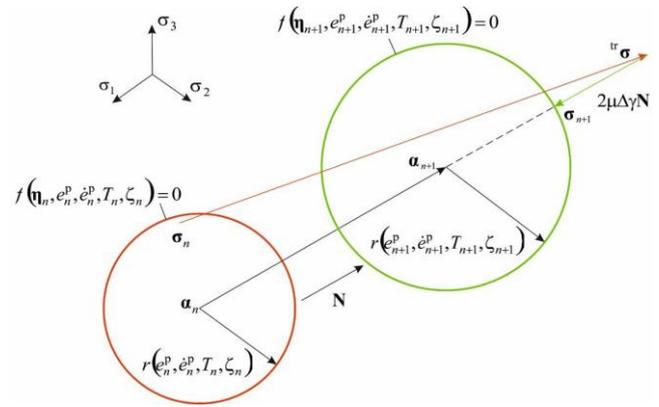


Рис. 3. Проецирование на поверхность нагружения (след поверхности нагружения на девиаторной плоскости)

Fig. 3. Return mapping algorithm (trace of the loading surface on the deviator plane)

Если  $f({}^{\text{tr}}\boldsymbol{\eta}, {}^{\text{tr}}e^p, T_{n+1}, \zeta_{n+1}) \leq 0$ , значит, материал находится в упругом состоянии и первый шаг становится окончательным:

$$\sigma_{n+1} = {}^{\text{tr}}\sigma, \quad \mathbf{a}_{n+1} = {}^{\text{tr}}\mathbf{a}, \quad e_{n+1}^p = e_n^p. \quad (19)$$

В противном случае для  $f({}^{\text{tr}}\boldsymbol{\eta}, {}^{\text{tr}}e^p, T_{n+1}, \zeta_{n+1}) > 0$  точка, соответствующая текущему НС в пространстве напряжений (см. рис. 2), выходит за пределы поверхности нагружения, т.е. имеют место пластические деформации. Следовательно, необходим второй этап – коррекция НС, называемый проецированием напряжений на поверхность нагружения, который выполняется с учетом накопленной пластической деформации и ее скорости:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= {}^{\text{tr}}\sigma - 2\mu\gamma\mathbf{N}, \\ \mathbf{a}_{n+1} &= {}^{\text{tr}}\mathbf{a} - H_\alpha\gamma\mathbf{N}, \\ e_{n+1}^p &= e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma, \\ \mathcal{E}_{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\gamma$  – пластический множитель, определяющий интенсивность пластической деформации,  $\gamma = \mathcal{E}\Delta t$ .

Значение пластического множителя при этом находится итерационно из решения в общем случае нелинейного уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\eta}_{n+1}, e_{n+1}^p, \mathcal{E}_{n+1}, T_{n+1}, \zeta_{n+1}) &= \\ = \|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\| - \left( 2\mu + H_\alpha(e_{n+1}^p, \mathcal{E}_{n+1}, T_{n+1}) \right) \gamma - \\ - \sqrt{\frac{2}{3}} r(e_{n+1}^p, \mathcal{E}_{n+1}, T_{n+1}, \zeta_{n+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

### 3. Инкрементальное уравнение

Нелинейное уравнение (5) решалось методом Ньютона, в рамках которого необходимо линеаризовать входящие в (5) нелинейные члены для получения так называемой касательной «жесткости», точное выражение которой обеспечивает квадратичную скорость сходимости итерационного процесса. Процедура линеаризации достаточно громоздка и показана отдельно в приложении. Отметим, что матрица, соответствующая касательной «жесткости», несимметрична и не полностью согласована с процедурой интегрирования, так как не учитывает промежуточную локальную конфигурацию, использованную при интегрировании определяющих соотношений. Тем не менее скорость сходимости итерационного процесса при использовании уравнения близка к квадратичной [23]:

$$\begin{aligned}
 & \int_{n+1\Omega} (\nabla \otimes \delta \mathbf{u} : ({}^4\mathbf{C}^{\text{cons}} + {}^4\mathbf{C}^*) : \nabla \otimes \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \text{sym} \times \\
 & \times (\nabla \otimes \delta \mathbf{u}^T \cdot \nabla \otimes \Delta \mathbf{u})) d\Omega + \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} d\Gamma - \\
 & - \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} \mathbf{g}_n \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} g^{ij} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{g}_i) \cdot \Delta \mathbf{u} d\Gamma - \\
 & - \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} \mathbf{g}_n \delta \mathbf{u} \cdot g^{ij} (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{n}) \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi^i} d\Gamma - \\
 & - \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} \mathbf{g}_n \delta \mathbf{u} \cdot b^{ij} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \Delta \mathbf{u} d\Gamma = \\
 & = \int_{n+1\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{n+1\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \\
 & + \int_{n+1\Omega} \nabla \otimes \delta \mathbf{u} : {}^4\mathbf{C}^{\text{cons}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d d\Omega - \\
 & - \int_{n+1\Omega} \nabla \otimes \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} d\Omega - \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma, \\
 & \Downarrow \\
 & e^*(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + c_n^*(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \\
 & = l(\delta \mathbf{u}) - e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - c_n(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}), \quad (22)
 \end{aligned}$$

где  $g^i$  – определитель метрической матрицы поверхности,  $g^i = \det(g_{ij}^s)$ ;  $g^{ij}$  – обратная метрическая матрица поверхности;  $B^{ij}$  – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Инкрементальное уравнение (22) решается на каждом шаге нагружения относительно приращения перемещений до тех пор, пока норма невязки (правая часть уравнения) не станет меньше заданного значения. При этом на каждой итерации происходит уточнение текущего вектора приращения перемещений и актуальной конфигурации:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} &= \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k + \text{cor } \mathbf{u}^k, \\
 \mathbf{x}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{x}_n^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k+1}.
 \end{aligned} \quad (23)$$

### 4. Результаты моделирования

На основе приведенных соотношений был разработан алгоритм решения поставленной задачи, и проведена серия вычислительных экспериментов, моделирующих температурно-силовое воздействие на титановый псевдо- $\alpha$ -сплав  $\text{Ti}_6\text{Al}_2\text{V}$  применительно к технологии импульсного термосилового поверхностного упрочнения.

Установлено, что электромеханическая обработка поверхности титановых сплавов приводит к формированию в поверхностном слое дискретно структурированных областей остаточных напряжений, что связано, с одной стороны, с импульсным воздействием источника тепла (синусоида), а с другой – с дискретностью формирующейся мартенситной структуры (рис. 4). В зоне упрочнения по всей глубине можно выделить два основных участка регулярной картины остаточных напряжений: участок упрочненной структуры и зона в окрестности разупрочненных фрагментов микро-структуры. Напряженное состояние при этом делится на чередующиеся в пространстве зоны с наибольшими по модулю сжимающими и растягивающими окружными напряжениями. На большей глубине напряженное состояние становится более однородным без регулярных зон, интенсивность остаточных напряжений при этом значительно снижается. Значительную роль в распределении остаточных напряжений играет деформационная составляющая воздействия, установлено, что при увеличении усилия на инструменте с минимального до 250 Н величина растягивающих остаточных напряжений уменьшается в три раза. Удобная для анализа эпюра максимальных остаточных напряжений показана на рис. 5.

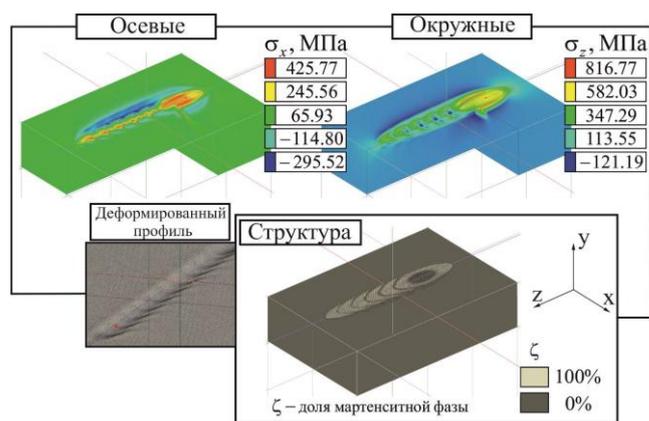


Рис. 4. Картина структуры и остаточных напряжений в объеме поверхностного слоя титанового сплава  $\text{Ti}_6\text{Al}_2\text{V}$  после электромеханической обработки ( $I = 400\text{A}$ ,  $P = 250\text{H}$  (усилие на ролике) со скоростью  $v = 1,64\text{м/мин}$ )

Fig. 4. Picture of the structure and residual stresses in the surface layer of  $\text{Ti}_6\text{Al}_2\text{V}$  titanium alloy after electromechanical treatment ( $I = 400\text{A}$ ,  $P = 250\text{H}$  (force on the roller) with speed  $v = 1,64\text{m/min}$ )

Отметим, что весь диапазон вариантов распределения остаточных напряжений при термосиловом упрочнении титанового сплава  $Ti_6Al_2V$ , сопровождающемся образованием износостойких слоев, укладывается в интервале между второй и третьей эпюрой ( $P = 0H$  и  $P = 250H$  соответственно) (см. рис. 5).

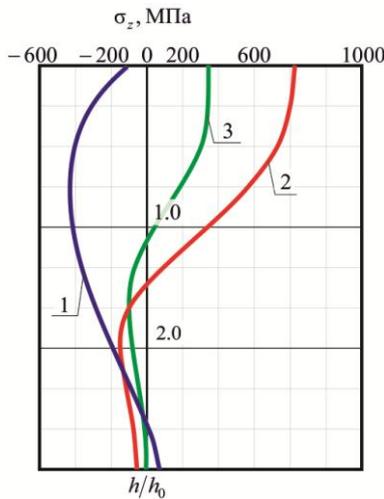


Рис. 5. Максимальные остаточные напряжения в поверхностном слое титанового сплава  $Ti_6Al_2V$  при различных вариантах высокоэнергетического воздействия:  $h$  – текущее расстояние до поверхностного слоя;  $h_0$  – толщина поверхностного слоя, в котором произошел фазовый переход (1 – с усилием  $P = 250H$ ,  $I = 0A$ ; 2 – с минимальным усилием  $P = 10H$ ,  $I = 400A$ ; 3 – с усилием  $P = 250H$ ,  $I = 400A$ )

Fig. 5. The maximum residual stresses in the surface layer of  $Ti_6Al_2V$  titanium alloy with different variants of high-energy impact:  $h$  – is a distance to the surface;  $h_0$  – is a hardened layer thickness (1 –  $P = 250H$ ,  $I = 0A$ ; 2 – with minimal force  $P = 10H$ ,  $I = 400A$ ; 3 –  $P = 250H$ ,  $I = 400A$ )

На основании результатов расчета можно сделать следующий вывод: неблагоприятное влияние высоких температур на поверхностный слой материала, характерное для многих технологий поверхностного упрочнения, можно несколько нивелировать с помощью интенсивного силового воздействия. При этом наиболее благоприятное распределение получается при исключительно силовом воздействии на поверхностный слой материала (см. рис. 5), однако в таком случае структура материала остается неизменной.

Несколько улучшить данную картину можно, если применить комбинацию термосиловых воздействий на материал, после термосилового упрочнения использовать поверхностно-пластическое деформирование (ППД). На рис. 6 приведены эпюры остаточных напряжений после комбинированного варианта упрочнения ЭМО + ППД. Такая комбинация позволяет создать под поверхностью упрочненной структуры область сжимающих напряжений (напряженное состояние, близкое к трехосному сжатию) с интенсивностью даже несколько больше, чем при обычном силовом воздействии

(ППД) (см. рис. 5). Общий характер напряженного состояния в упрочненной зоне не меняется, а лишь смещается в область растягивающих напряжений меньшей интенсивности. Аналогичная ситуация наблюдается и при использовании обработки поверхностным пластическим деформированием после термосилового воздействия с минимальным усилием, экстремум сжимающих напряжений при этом находится на большей глубине.

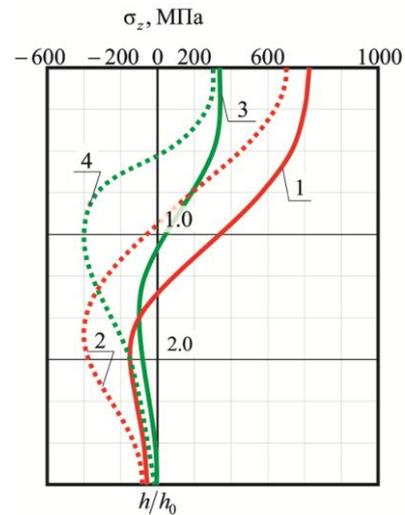


Рис. 6. Максимальные остаточные напряжения в поверхностном слое титанового сплава  $Ti_6Al_2V$  при различных вариантах комбинированного термосилового воздействия (1 – с минимальным усилием  $P = 10H$ ,  $I = 400A$ ; 2 – с минимальным усилием  $P = 10H$ ,  $I = 400A$  +  $P = 250H$ ; 3 – с усилием  $P = 250H$ ,  $I = 400A$ ; 4 – с усилием  $P = 250H$ ,  $I = 400A$  +  $P = 250H$ )

Fig. 6. The maximum residual stresses in the surface layer of  $Ti_6Al_2V$  titanium alloy with different variants of high-energy impact (1 – with a minimal force  $P = 10H$ ,  $I = 400A$ ; 2 – with a minimal force  $P = 10H$ ,  $I = 400A$  +  $P = 250H$ ; 3 –  $P = 250H$ ,  $I = 400A$ ; 4 –  $P = 250H$ ,  $I = 400A$  +  $P = 250H$ )

## Выводы

1. Приведен алгоритм решения связанной контактной задачи термовязкопластического деформирования полупространства с учетом протекающих при этом процессов фазовых превращений.
2. На основе разработанного алгоритма получено пространственное распределение остаточных напряжений для различных вариантов комбинированного термосилового воздействия.
3. Показано, что электромеханическая обработка поверхности титанового сплава  $Ti_6Al_2V$  приводит к формированию в поверхностном слое дискретно структурированных областей остаточных напряжений с периодичностью, аналогичной распределению зон упрочнения.
4. Установлено, что термосиловое воздействие способствует формированию в поверхностном слое титанового сплава  $Ti_6Al_2V$  растягивающих остаточных на-

пряжений. При этом увеличение усилия на инструменте с 10 до 250 Н при ЭМО приводит к снижению растягивающих остаточных напряжений в три раза

5. Показано, что наиболее оптимальное распределение остаточных напряжений получается в результате комбинации термосиловых воздействий ЭМО+ППД.

## Приложение

Касательная жесткость применительно к уравнению (5) имеет достаточно сложный вид, поэтому проведем линейризацию в несколько шагов.

1) Продифференцируем приращение напряжений, определяемое согласно вышеприведенному алгоритму проецирования  $\Delta\sigma = {}^4C : (\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^d) - 2\mu\gamma\mathbf{N}$  по отношению к приращению деформации:

$${}^4C^{\text{cons}} = \frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\epsilon} = {}^4C - 2\mu \left( \gamma \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\Delta\epsilon} + \mathbf{N} \otimes \frac{\partial\gamma}{\partial\Delta\epsilon} \right). \quad (24)$$

Для определения производной  $\frac{\partial\gamma}{\partial\Delta\epsilon}$  найдем производную  $\frac{\partial f}{\partial\Delta\epsilon}$ , которая согласно условию стационарности поверхности текучести (12) при пластическом деформировании равна нулю на всем временном интервале от  $t_n$  до  $t_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\Delta\epsilon} &= \frac{\partial \|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\|}{\partial\Delta\epsilon} - \frac{\partial \left( (2\mu + H_\alpha)\gamma + \sqrt{2/3}r \right)}{\partial\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial\Delta\epsilon} = \\ &= 2\mu\mathbf{N} - \left( 2\mu + H_\alpha + \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial H_\alpha}{\partial\mathcal{E}} \gamma + \frac{1}{\Delta t} \frac{2}{3} \frac{\partial r}{\partial\mathcal{E}} \right) \frac{\partial\gamma}{\partial\Delta\epsilon} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

данное выражение получено с учетом равенства

$$\frac{\partial \|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\|}{\partial\Delta\epsilon} = \frac{\partial \|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\|}{\text{tr}\boldsymbol{\eta}} : \frac{\text{tr}\boldsymbol{\eta}}{\partial\Delta\epsilon} = \mathbf{N} : 2\mu {}^4\mathbf{1}_{\text{dev}} = 2\mu\mathbf{N}. \quad (26)$$

Таким образом, получим производную  $\frac{\partial\gamma}{\partial\Delta\epsilon}$ ,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\Delta\epsilon} = \frac{2\mu\mathbf{N}}{2\mu + H_\alpha + \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial H_\alpha}{\partial\mathcal{E}} \gamma + \frac{1}{\Delta t} \frac{2}{3} \frac{\partial r}{\partial\mathcal{E}}}. \quad (27)$$

Далее вычислим производную  $\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\Delta\epsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\Delta\epsilon} &= \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\text{tr}\boldsymbol{\eta}} : \frac{\partial\text{tr}\boldsymbol{\eta}}{\partial\Delta\epsilon} = \\ &= \left( \frac{\mathbf{1}}{\|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\|} - \frac{\text{tr}\boldsymbol{\eta} \otimes \text{tr}\boldsymbol{\eta}}{\|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\|^3} \right) : 2\mu {}^4\mathbf{1}_{\text{dev}} = \frac{2\mu}{\|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\|} \left( {}^4\mathbf{1}_{\text{dev}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставив (26) и (27) в (24), получим согласованную касательную жесткость для выбранного класса моделей поверхности пластичности:

$$\begin{aligned} {}^4C^{\text{cons}} &= {}^4C - \frac{4\mu^2\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}}{2\mu + H_\alpha + \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial H_\alpha}{\partial\mathcal{E}} \gamma + \frac{1}{\Delta t} \frac{2}{3} \frac{\partial r}{\partial\mathcal{E}}} - \\ &- \frac{4\mu^2\gamma}{\|\text{tr}\boldsymbol{\eta}\|} \left( {}^4\mathbf{1}_{\text{dev}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

2) На следующем этапе линейризуем непосредственно вариационную формулировку, далее запишем только интеграл, соответствующий работе внутренних сил, для удобства опустив обозначение  $n+1$  шага нагружения:

$$e(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla \otimes \delta\mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega. \quad (30)$$

Данную процедуру осуществим в начальной конфигурации, а затем трансформируем полученную касательную жесткость обратно в актуальную конфигурацию:

$$e(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} J d\Omega. \quad (31)$$

Запишем линейризованную форму уравнения (31):

$$\begin{aligned} e^*(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \\ &= \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \left( \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \Delta(\mathbf{F}^{-1}) : \boldsymbol{\sigma} J + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{F}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma} J + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \Delta J \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (32)$$

Пользуясь определением производной по направлению, найдем приращение градиента деформации:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F} = D\mathbf{F}(\mathbf{x})[\Delta\mathbf{u}] &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial(\mathbf{x} + a\Delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} \right]_{a=0} = \\ &= \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} = \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta\mathbf{u}^T. \end{aligned} \quad (33)$$

Вычислим приращение  $\Delta(\mathbf{F}^{-1})$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) &= \Delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \cdot \Delta(\mathbf{F}^{-1}) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta(\mathbf{F}^{-1}) = \\ &= -\mathbf{F}^{-1} \cdot \Delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Найдем приращение определителя градиента деформации, пользуясь правилом цепного дифференцирования применительно к производной по направлению:

$$\begin{aligned} \Delta J = DJ(\mathbf{x})[\Delta\mathbf{u}] &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : D\mathbf{F}(\mathbf{x})[\Delta\mathbf{u}] = \\ &= J\mathbf{F}^{-T} : \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta\mathbf{u}^T = \\ &= J\text{tr} \left( \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) = J\text{tr} \left( \nabla \otimes \Delta\mathbf{u}^T \right) = J\nabla \cdot (\Delta\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (35)$$

Подставим полученные выражения для соответствующих приращений в предварительно линеаризованное уравнение (31):

$$e^*(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left( \begin{aligned} & -\overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} J + \\ & + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma} J + \\ & + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \cdot (\Delta\mathbf{u}) J \end{aligned} \right) d\Omega. \quad (36)$$

Далее последовательно преобразуем каждое слагаемое соотношения (34):

$$\begin{aligned} & -\overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} J = \\ & = -\nabla \otimes \delta\mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \Delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} J = \\ & = -\nabla \otimes \delta\mathbf{u} \cdot \nabla \otimes \Delta\mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} J. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставим во второе слагаемое выражение для производной Яуманна:

$$\begin{aligned} & \overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma} J = \\ & = \nabla \otimes \delta\mathbf{u} : (\Delta\boldsymbol{\sigma}^J + \Delta t \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta t \mathbf{W}) J. \end{aligned} \quad (38)$$

Трансформируем последний член в текущую конфигурацию:

$$\overset{\circ}{\nabla} \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \cdot (\Delta\mathbf{u}) J = \nabla \otimes \delta\mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot (\Delta\mathbf{u}) J. \quad (39)$$

Запишем уравнение (39) с учетом сделанных преобразований и, воспользовавшись свойством определителя градиента деформации, трансформируем линеаризованную форму обратно в метрику текущей конфигурации:

$$\begin{aligned} e^*(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla \otimes \delta\mathbf{u} : (\Delta\boldsymbol{\sigma}^J + \Delta t \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta t \mathbf{W} - \\ - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \otimes \Delta\mathbf{u}^T + \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot (\Delta\mathbf{u})) d\Omega. \end{aligned} \quad (40)$$

С целью упрощения выражения (40) последовательно преобразуем входящие в него слагаемые. Приращение тензора напряжений Коши связано с приращением деформаций соотношением

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^J = {}^4\mathbf{C}^{\text{cons}} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^d). \quad (41)$$

Выразим второе слагаемое в производной Яуманна через приращение градиента деформации, воспользовавшись известными свойствами единичных тензоров:

$$\begin{aligned} \Delta t \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} (\nabla \otimes \Delta\mathbf{u}^T - \nabla \otimes \Delta\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \\ &= \frac{1}{2} ({}^4\mathbf{1}_{\text{II}} - {}^4\mathbf{1}_{\text{III}}) : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} ({}^4\mathbf{1}_{\text{II}} - {}^4\mathbf{1}_{\text{III}}) : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^{jl} \delta^{ik} - \sigma^{jk} \delta^{il}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (42)$$

где  ${}^4\mathbf{1}_{\text{II}}$  – второй единичный тензор четвертого ранга,  ${}^4\mathbf{1}_{\text{II}} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = \delta^{ik} \delta^{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ ;  ${}^4\mathbf{1}_{\text{III}}$  – третий единичный тензор четвертого ранга,  ${}^4\mathbf{1}_{\text{III}} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i = \delta^{il} \delta^{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ . Аналогичным образом получаем и третье слагаемое:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta t \mathbf{W} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} (\nabla \otimes \Delta\mathbf{u} - \nabla \otimes \Delta\mathbf{u}^T) = \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} ({}^4\mathbf{1}_{\text{III}} - {}^4\mathbf{1}_{\text{II}}) : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^{il} \delta^{jk} - \sigma^{jk} \delta^{il}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (43)$$

Также преобразуем последнее слагаемое в (40), воспользовавшись свойством первого единичного тензора четвертого ранга:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot (\Delta\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}(\nabla \otimes \Delta\mathbf{u}) \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^4\mathbf{1}_I : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u} = \\ &= (\sigma^{ij} \delta^{kl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{1} : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (44)$$

где  ${}^4\mathbf{1}_I$  – первый единичный тензор четвертого ранга,  ${}^4\mathbf{1}_I = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^j = \delta^{ij} \delta^{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ .

Далее подставим выражения (41)–(44) в (40) и получим окончательное выражение касательной жесткости для вариационной формулировки в актуальной конфигурации с использованием производной Яуманна:

$$\begin{aligned} e^*(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\nabla \otimes \delta\mathbf{u} : ({}^4\mathbf{C}^{\text{cons}} + {}^4\mathbf{C}^*) : \nabla \otimes \Delta\mathbf{u} + \\ + \boldsymbol{\sigma} : \text{sym}(\nabla \otimes \delta\mathbf{u}^T \cdot \nabla \otimes \Delta\mathbf{u})) d\Omega, \end{aligned} \quad (45)$$

где  ${}^4\mathbf{C}^*$  – тензор 4-го ранга, воспроизводящий эффект «поворота» тензора напряжений Коши,  ${}^4\mathbf{C}^* = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{1} + {}^4\mathbf{C}^{\text{rot}} = \left[ \sigma^{ij} \delta^{kl} + 1/2 (\sigma^{il} \delta^{jk} + \sigma^{jl} \delta^{ik} - \sigma^{ik} \delta^{jl} - \sigma^{jk} \delta^{il}) \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ .

3) Необходимо также линеаризовать нелинейный контактный член в уравнении (5):

$$\omega_n \int_{n+1\Gamma_c} (\Delta g_n \delta g_n + g_n \Delta \delta g_n) d\Gamma. \quad (46)$$

Для линеаризации соотношения (46) необходимо найти также приращение и вторую вариации функции расстояния  $\Delta g_n$ ,  $\Delta \delta g_n$ . Линеаризация функции расстояния (9) осуществлялась на основе подхода, предложенного в работе [24], согласно которому выражения для вариации и приращения функции расстояния могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \delta g_n &= \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \mathbf{f} \\ \Delta g_n &= \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \mathbf{f} \end{aligned} \quad (47)$$

Вторая вариация функции расстояния с учетом одностороннего характера контакта принимает следующий вид:

$$\Delta \delta g_n = -\delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot g^{ij} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \Delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{u} \cdot g^{ij} (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{n}) \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi^i} - \delta \mathbf{u} \cdot \beta^{ij} (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i) \Delta \mathbf{u}. \quad (48)$$

Далее поставим найденные выражения для первой и второй вариаций функции расстояния в (46) и получим линеаризованную форму интегрального слагаемого  $c_n(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ :

$$L[c_n(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})] \Delta \mathbf{u} = c_n^*(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \Delta \mathbf{u} d\Gamma - \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} g_n \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} g^{ij} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{g}_i) \cdot \Delta \mathbf{u} d\Gamma -$$

$$- \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} g_n \delta \mathbf{u} \cdot g^{ij} (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi^i} d\Gamma - \omega_n \int_{n+1\Gamma_c} g_n \delta \mathbf{u} \cdot b^{ij} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \Delta \mathbf{u} d\Gamma. \quad (49)$$

### Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 18-41-343007 p\_mol\_a, № 18-48-340010 p\_a, № 17-08-01648 a, № 17-08-01742 a.

### Acknowledgment

This work was financially supported by the Russian Federal Property Fund in the framework of projects No. 18-41-343007 r\_mol\_a, No. 18-48-340010 p\_a, No. 17-08-01648 a, No. 17-08-01742 a, as well as a presidential grant No. МК-943.2017.8

### Библиографический список

1. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. – М.: Наука, 1982.
2. Горынин И.В., Чечулин Б.Б. Титан в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 400 с.
3. Федирко В.Н., Лукьяненко А.Г., Труш В.С. Твердорастворное упрочнение поверхностного слоя титановых сплавов. Ч. 1. Влияние на механические свойства // *Металловедение и термическая обработка металлов*. – 2014. – № 7. – С. 27–33.
4. Куркин А.С., Макаров Э.Л. Программный комплекс «Сварка» – инструмент для решения практических задач сварочного производства // *Сварка и диагностика*. – 2010. – № 1. – С. 16–24.
5. De A., DebRoy T. A perspective on residual stresses in welding // *Science and Technology of Welding and Joining*. – 2011. – Vol. 6. – No 3. – P. 204–208.
6. Numerical simulation of multilayered multiple metal cast rolls in compound casting process / S. Lu, F. Xiao, Z. Guo, L. Wang, H. Li, B. Liao // *Applied Thermal Engineering*. – 2016. – Vol. 93. – P. 518–528.
7. Modelling residual stresses in sand-cast superduplex stainless steel / G. Palumbo, A. Piccinini, V. Pignionico, P. Guglielmi, D. Sorgente, L. Tricarico // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2015. – Vol. 217. – P. 253–261.
8. Simulation of multi-frequency-induction-hardening including phase transitions and mechanical effects / D. Hömberg, Q. Liu, J. Montalvo-Urquiza, D. Nadolski, T. Petzold, A. Schmidt, A. Schulz // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2016. – Vol. 121. – P. 86–100.
9. Багмутов В.П., Захаров И.Н., Денисевич Д.С. Особенности решения технологических задач механики неоднородных металлических тел со структурой, трансформирующейся в ходе термосилового нагружения // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. Механика. – 2016. – № 1. – С. 5–25.
10. Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains / V.A. Levin, V.I. Levitas, K.M. Zingerman, E.I. Freiman // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50 – P. 2914–2928.

11. Three-dimensional phase-field modeling of martensitic microstructure evolution in steels / H.K. Yeddu, A. Malik, J. Agren, G. Amberg, A. Borgenstam // *Acta Materialia*. – 2012. – Vol. 43. – P. 1538–1547.
12. Yeddu H.K., Lookman T., Saxena A. Strain-induced martensitic transformation in stainless steels: A three-dimensional phase-field study // *Acta Materialia*. – 2013. – Vol. 61. – P. 6972–6982.
13. Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы / А.А. Мовчан, С.А. Казарина, А.Е. Машихин, И.В. Мишустин, Е.Б. Саганов, П.А. Сафронов // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2015. – Т. 157, кн. 3. – С. 97–110.
14. Гринфельд М.А. Фазовые переходы первого рода в нелинейно-упругих материалах // *МТТ*. – 1982. – № 1. – С. 99–109.
15. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 312 с.
16. Исупова И.Л., Трусов П.В. Обзор математических моделей для описания фазовых превращений в сталях // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. Механика. – 2013. – № 3. – С. 157–191.
17. Покровский А.М. Расчет НДС в цельнокованых и биметаллических прокатных валках при термической обработке // *Изв. вузов. Машиностроение*. – 2012. – № 4. – С. 35–41.
18. Об учете нелинейных и связанных эффектов тепловой задачи и фазовых переходов при моделировании технологии контактного термосилового поверхностного упрочнения металлических сплавов / В.П. Багмутов, Д.С. Денисевич, И.Н. Захаров, А.Ю. Иванников // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. Механика. – 2017. – № 1. – С. 233–250.
19. Трусов П.В., Келлер И.Э. Теория определяющих соотношений: курс лекций. Ч. I. Общая теория / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1997. – 98 с.
20. Johnson G.R., Cook W.H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures // *Proceedings of the 7th. International Symposium on Ballistic*. – Hague, Nether-lands, 1983. – P. 541–547.

21. De Souza Neto E.A., Peric D., Owen D.R.J. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. – John Wiley & Sons Ltd, 2008. – 816 p.
22. Султанов Л.У. Исследование конечных упругопластических деформаций: алгоритм решения, численные примеры // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 154, № 4. – С. 509–517.
23. Kim N-H. Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. – New York: Springer, 2015. – 430 p.
24. Konyukhov A., Schweizerhof K. Contact formulation via a velocity description allowing efficiency improvements in frictionless contact analysis // Computational Mechanics. – 2004. – No. 33. – P. 165–173.
25. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. – Berlin: Springer, 2006. – 519 p.
26. Numerical and experimental analysis of 3D spot induction hardening of AISI 1045 steel / K. Gao, X. Qin, Z. Wang, H. Chen, Sh. Zhu, Y. Liu, Y. Song // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – Vol. 214. – P. 2425–2433.
27. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Термодинамический подход к построению математических моделей термомеханики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2008. – № 3. – С. 70–74.
28. Han W., Reddy B.D. Plasticity. Mathematical theory and numerical analysis. – New York: Springer-Verlag, 2013. – 2nd Ed. – 424 p.

## References

1. Pozdeev A.A., Nyashin Yu.I., Trusov P.V. Ostatochnye napryazheniya: teoriya i prilozheniya [Residual stresses: theory and applications]. *Moscow, Nauka*, 1982.
2. Gorynin I.V., Shechulin B.B. Titan v mashinostroenii [Titanium in mechanical engineering]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1990, 400 p.
3. Fedirko V.N., Luk'yanenko A.G., Trush V.S. Tverdoras-tvornoe uprochnenie poverhnostnogo sloya titanovykh splavov. Chast' 1. Vliyaniye na mekhanicheskiye svoystva [Solid solution hardening of the surface layer of titanium alloys. Part 1. Effect on mechanical properties]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov*, 2014, no. 7, pp. 27–33.
4. Kurkin A.S., Makarov E.H.L. Programmnyj kompleks «Svarka» – instrument dlya resheniya prakticheskikh zadach svarochnogo proizvodstva [The software package "Welding" is a tool for solving practical problems of welding production]. *Svarka i Diagnostika*, 2010, no. 1, pp. 16-24
5. A. De, T. DebRoy. A perspective on residual stresses in welding. *Science and Technology of Welding and Joining*, 2011, vol. 6, no 3, pp. 204-208
6. S. Lu, F. Xiao, Z. Guo, L. Wang, H. Li, B. Liao. Numerical simulation of multilayered multiple metal cast rolls in compound casting process. *Applied Thermal Engineering*, 2016, vol. 93, pp. 518-528.
7. G. Palumbo, A. Piccinini, V. Pigionico, P. Guglielmi, D. Sorgente, L. Tricarico. Modelling residual stresses in sand-cast superduplex stainless steel. *Journal of Materials Processing Technology*, 2015, vol. 217, pp. 253-261.
8. D. Hömberg, Q. Liu, J. Montalvo-Urquiza, D. Nadolski, T. Petzold, A. Schmidt, A. Schulz. Simulation of multi-frequency-induction-hardening including phase transitions and mechanical effects. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2016, vol. 121, pp. 86-100.
9. Bagmutov V.P., Zakharov I.N., Denisevich D.S. Features of solving technological problems in mechanics of bodies with non-uniform metal structure transformed in thermo-force loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016, no. 1, pp. 5-25. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.01
10. Levin V.A., Levitas V.I., Zingerman K.M., Freiman E.I.. Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, pp. 2914-2928.
11. Yeddu H.K., Malik A., Agren J., Amberg G., Borgentam A. Three-dimensional phase-field modeling of martensitic microstructure evolution in steels. *Acta Materialia*, 2012, vol. 43, pp. 1538-1547.
12. Yeddu H.K., Lookman T., Saxena A. Strain-induced martensitic transformation in stainless steels: A three-dimensional phase-field study. *Acta Materialia*. 2013, vol. 61, pp. 6972-6982.
13. Movchan A.A., Kazarina S.A., Mashihin A.E., Mishustin I.V., Saganov E.B., Safronov P.A. Kraevye zadachi mekhaniki dlya splavov s pamyat'yu formy [Boundary-value problems of mechanics for alloys with shape memory]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. Nauki*, 2015, vol. 157, part 3, pp. 97-110.
14. Grinfel'd M.A. Fazovye perekhody pervogo roda v nelinejno-uprugih materialah [First-order phase transitions in nonlinear elastic materials]. *Mekhanika tverdogo tela*, 1982, no. 1, pp. 99-109
15. Grinfel'd M.A. Metody mekhaniki sploshnykh sred v teorii fazovykh prevrashchenij [Continuum mechanics methods in the theory of phase transformations]. *Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.*, 1990, 312 p.
16. Isupova I.L., Trusov P.V. A review of mathematical models for describing phase transitions in steels. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 3, pp. 157-191.
17. Pokrovskij A.M. Raschet NDS v cel'nokovanyh i bimetallicheskih prokatnykh valkah pri termicheskoy obrabotke [Calculation of VAT in all-forged and bimetallic rolling rolls during heat treatment]. *Izv. vuzov. Mashinostroenie*, 2012, no. 4, pp. 35-41.
18. Bagmutov V.P., Denisevich D.S., Zakharov I.N., Ivannikov A.Yu. Nonlinear and coupled thermal effects during finite element simulation of contact thermo-force surface harden-

ing. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017, no.1, pp. 233-250. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.13

19. Trusov P.V., Keller I.E.H. Teoriya opredelyayushchih sootnoshenij. Kurs lekcij. CH.I. Obshchaya teoriya [The theory of defining relations. Lecture course. Part I. General theory]. *Perm. gos. tekhn. un-t. Perm'*, 1997. 98 p.

20. Johnson G.R., Cook W.H. A constitutive model. and data for metals subjected to large strains, high strain. rates and high temperatures. *Proceedings of the 7th. International Symposium on Ballistic. Hague, Nether-lands*, 1983, pp. 541-547.

21. De Souza Neto E.A., Peric D., Owen D.R.J. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. *John Wiley & Sons Ltd*, 2008, 816 p.

22. Sultanov L.U. Issledovanie konechnyh uprugoplasticheskikh deformacij: algoritm resheniya, chislennyye primery [The study of finite elastoplastic deformations: a solution algorithm, numerical examples]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. Nauki*, 2017, vol. 154, no. 4, pp. 509-517.

23. Kim N-H. Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. *New York: Springer*, 2015, 430 p.

24. A. Konyukhov, K. Schweizerhof. Contact formulation via a velocity description allowing efficiency improvements in frictionless contact analysis. *Computational Mechanics*, 2004, no 336 pp. 165-173.

25. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. *Springer. Berlin*, 2006, 519 pp.

26. K. Gao, X. Qin, Z. Wang, H. Chen, Sh. Zhu, Y. Liu, Y. Song. Numerical and experimental analysis of 3D spot induction hardening of AISI 1045 steel. *Journal of Materials Processing Technology*, 2014, vol. 214. pp. 2425-2433.

27. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Termodinamicheskij podhod k postroeniyu matematicheskikh modelej termomekhaniki [Thermodynamic approach to the construction of mathematical models

of thermomechanics]. *Vestnik MGTU im. N.E.H. Baumana. Seriya «Estestvennyye nauki»*, 2008, no. 3, pp. 70-74

28. Han W., Reddy B.D. Plasticity. Mathematical Theory and Numerical Analysis. *Springer-Verlag New York*, 2013, ed. 2, 424 p.

29. Zerilli F.J., Armstrong R.W. Dislocationmechanics-based constitutive relation for material dynamics calculations. *Journal of Applied Physics*, 1987, pp. 1816-1825

30. C. Şimşir, C.H. Gür. Mathematical Framework for Simulation of Thermal Processing of Materials: Application to Steel Quenching. *Turkish J. Eng. Env. Sci*, 2008, no. 32, pp. 85-100.

31. R. Mahnken, M. Wolff, C. Cheng. A multi-mechanism model for cutting simulations combining visco-plastic asymmetry and phase transformation. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 166. pp. 193-201.

32. Kukudzhyanov V.N., Levitin A.L. CHislennoe modelirovanie processov rezaniya uprgovyazkoplasticheskikh materialov v trekhmernoj postanovke [Numerical modeling of cutting processes of visco-viscoplastic materials in three-dimensional setting]. *Izvestia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2008, no. 3, pp. 208-216.

33. J. Teixeira, B. Denand, E. Aeby-Gautier, S. Denis. Simulation of coupled temperature, microstructure and internal stresses evolutions during quenching of a  $\beta$ -metastable titanium alloy. *Materials Science & Engineering A*, 2016, vol. 651, pp. 615-625.

34. Trusov P.V., Volegov P.S., Kondrat'ev N.S. Fizicheskie teorii plastichnosti: ucheb. posobie [Physical theories of plasticity: textbook. allowance], *Perm', Izd-vo Perm. nac. issled. politekhn. un-ta*, 2013, 244 p.

35. Y. Zhu, L.H. Poh. A finite deformation elasto-plastic cyclic constitutive model for ratcheting of metallic materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, vol. 117, pp. 265-274.