

Корнеев В.С., Корнеев С.А. Феноменологическая модель гипервязкоупругости эластомеров при неизменной ориентации главных осей напряжений в сопутствующей системе отсчета // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 3. С. 149-165. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.15

Korneyev V.S., Korneyev S.A. The phenomenological model of hyper viscoelasticity of elastomers with a constant orientation of the main stress axes in the accompanying frame of reference. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 3, pp. 149-165. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.15



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.15

УДК 539.374

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИПЕРВЯЗКОУПРУГОСТИ ЭЛАСТОМЕРОВ ПРИ НЕИЗМЕННОЙ ОРИЕНТАЦИИ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В.С. Корнеев, С.А. Корнеев

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 18 апреля 2019 г.
Принята: 28 августа 2019 г.
Опубликована: 17 октября 2019 г.

Ключевые слова:

гипервязкоупругость, эластомеры, модель Бергстрёма–Бойс, градиент деформации, мультипликативное разложение, единственность, независимость от выбора системы отсчета, феноменологическая модель.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается и критически анализируется модель гипервязкоупругости Бергстрёма–Бойс, основанная на соображениях микроструктуры резиноподобных материалов и использующая мультипликативное разложение градиента полной деформации. Особое внимание уделяется вопросу выбора условия однозначности, определяющего поворот промежуточной (разгрузочной) конфигурации и обеспечивающего единственность мультипликативного разложения градиента полной деформации на градиент упругих деформаций и градиент вязких деформаций. Чтобы убедиться в правомочности утверждения, что указанный выбор не является существенным, получено решение тестовой задачи простого сдвига по модели Бергстрёма–Бойс для трех наиболее часто используемых условий однозначности. Результаты численных расчетов показали значительное расхождение для динамических напряжений и менее значительное расхождение для полных напряжений. Для отделения допустимых условий однозначности от физически неприемлемых условий однозначности предложено использовать принцип объективности поведения материалов. С этой целью подробно исследован вопрос о преобразовании градиента упругих деформаций и градиента вязких деформаций при замене системы отсчета, по которому в научной литературе отсутствует единая точка зрения. Для наиболее часто предлагаемых и используемых условий однозначности показано, какие из них не зависят от выбора системы отсчета. Поскольку список подобного рода допустимых соотношений можно многократно расширить, вопрос, какое именно условие однозначности следует использовать, должен решаться так же, как это делается, например, для упругих потенциалов: надлежащей постановкой и проведением экспериментальных исследований либо теоретическим исследованием микроструктуры материала.

Предложена феноменологическая модель гипервязкоупругости, основанная на одномерной реологической модели Кельвина–Пойнтинга и ограниченная случаем, когда главные оси напряжений и деформаций (полных, упругих и вязких) совпадают и не изменяют своей ориентации относительно материальных линий (волокон). Благодаря этому обеспечивается единственность соответствующего мультипликативного разложения. Чтобы расширить диапазон скоростей деформации при описании экспериментальных данных, учтена зависимость коэффициента вязкости от второго инварианта правой меры вязких деформаций Коши–Грина в степенном законе кажущейся вязкости модели Рейнера–Ривлина, что обобщает соответствующую зависимость модели Бергстрёма–Бойс. Разработанная математическая модель гипервязкоупругости резиноподобных материалов предназначена для расчета напряженно-деформированного состояния высокоэластичных оболочек вращения при симметричном нагружении.

© ПНИПУ

© Корнеев Владимир Сергеевич – к.т.н., доц., e-mail: 79045840307@ya.ru, [iD: 0000-0003-1694-1190](https://orcid.org/0000-0003-1694-1190).
Корнеев Сергей Александрович – д.т.н., проф., e-mail: korneyev@omgtu.ru, [iD: 0000-0002-0554-5451](https://orcid.org/0000-0002-0554-5451).

Vladimir S. Korneyev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: 79045840307@ya.ru, [iD: 0000-0003-1694-1190](https://orcid.org/0000-0003-1694-1190).

Sergey A. Korneyev – Doctor of Technical Science, Professor, e-mail: korneyev@omgtu.ru, [iD: 0000-0002-0554-5451](https://orcid.org/0000-0002-0554-5451).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE PHENOMENOLOGICAL MODEL OF HYPER VISCOELASTICITY OF ELASTOMERS WITH A CONSTANT ORIENTATION OF THE MAIN STRESS AXES IN THE ACCOMPANYING FRAME OF REFERENCE

V.S. Korneyev, S.A. Korneyev

Omsk State Technical University, Omsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019
Accepted: 28 August 2019
Published: 17 October 2019

Keywords:

hyper-viscoelasticity, elastomers, Bergström-Boyce model, deformation gradient, multiplicative decomposition, uniqueness, principle of material frame-indifference, phenomenological model.

ABSTRACT

The Bergström-Boyce hyper-viscoelasticity model, which is based on considerations of the microstructure of rubber-like materials and uses the multiplicative decomposition of the total strain gradient, is considered and analyzed. Special attention is paid to the choice of the single-valuedness condition, which determines the rotation of the intermediate (relaxed) configuration and ensures the uniqueness of the multiplicative decomposition of the gradient total strain to the gradient of elastic deformations and the gradient of viscous deformations. To verify the validity of the statement that this choice is not essential, we found a solution of the test problem of simple shear according to the Bergström-Boyce model is obtained for the three most frequently used single-valuedness conditions. The results of numerical calculations showed a significant discrepancy for dynamic stresses and a less significant discrepancy for total stresses. To separate the permissible single-valuedness conditions from the physically unacceptable single-valuedness conditions, it is proposed to use the principle of the material frame-indifference. For this purpose, of we studied the transformation of the elastic deformations and viscous deformations gradients when replacing the reference system, to which there is no single point of view in the scientific literature. For the most frequently proposed and used single-valuedness conditions, it is shown which of them do not depend on the reference system choice. Since the list of such kind of allowable ratios can be expanded many times, the choice a single-valuedness condition should be solved in the same way as it is done, e.g. for elastic potentials: a proper formulation and conducting experimental studies, or a theoretical study of the material microstructure.

A phenomenological model of hyper-viscoelasticity is proposed, based on a one-dimensional Kelvin-Poynting model and limited to the case when the main axes of stresses and strains (full, elastic and viscous ones) coincide and do not change their orientation relative to the material lines (fibers). This ensures the uniqueness of the corresponding multiplicative decomposition. In order to expand the range of strain rates when describing experimental data, the dependence of the viscosity coefficient on the second invariant of the right Cauchy-Green viscous strain measure in the power law of the apparent viscosity of the Reiner-Rivlin model is taken into account, which generalizes the corresponding dependence of the Bergström-Boyce model. The developed mathematical model of hyper-viscoelasticity of rubber-like materials is intended for the stress-strain state calculation of highly elastic shells of rotation under symmetric loading.

© PNRPU

Введение

В системах защиты от вибраций и ударов широкое распространение нашли пневматические элементы с резинордными оболочками [1–3], а также резино-гидравлические вибропоры [4]. При проведении расчетов, как правило, материал оболочек полагается упругодеформируемым [5, 6]. В ряде случаев влиянием резины полностью пренебрегают по сравнению с несущей способностью армирующих нитей корда [7–9]. В то же время предварительные испытания показывают, что релаксация избыточного давления и усилия пневмоэлемента может достигать 25 % и более при выдержке постоянной высоты пневмоэлемента, в котором в качестве рабочей среды используется практически несжимаемая жидкость (например, вода). Причиной этого является вязкоупругость резинордного композита, и прежде всего резины. Вследствие этого для повышения точности расчетов пневмоэлементов с резинордными обо-

лочками возникает необходимость в моделировании вязкоупругих свойств резины при конечных деформациях. При этом для симметрично нагруженных оболочек вращения достаточно ограничиться частным случаем, когда главные оси напряжений и деформаций совпадают и не изменяют своей ориентации относительно материальных линий (волокон) оболочки.

Основополагающим математическим моделям, учитывающим влияние скорости деформации, посвящена обширная научная литература [10–17]. В обзоре [18] особо выделяется модель Бергстрёма–Бойса [19, 20] как одна из наиболее перспективных современных моделей гипервязкоупругости эластомеров. Среди многочисленных формулировок закона вязкоупругости для резиноподобных материалов модель Бергстрёма–Бойса наиболее популярна [21, 22], так как позволяет достаточно точно описывать экспериментальные данные, включая гистерезис при циклическом нагружении и зависимость диаграмм материала от скорости деформирования. Дан-

ная модель нашла широкое применение и признание, прошла экспериментальную проверку и получила дальнейшее развитие [23–28].

Настоящая статья посвящена обсуждению модели гипервязкоупругости Бергстрёма–Бойс, ее критическому анализу и феноменологическому обобщению с целью получения более достоверных результатов моделирования высокоэластичных оболочек вращения при симметричном нагружении.

1. Нелинейная гипервязкоупругая модель Бергстрёма–Бойс

Йорген Бергстрем и Мэри Бойс разработали модель гипервязкоупругих материалов на основе соображений микроструктуры [19, 20]. Исходя из анализа экспериментальных данных было выработано положение, по которому механический отклик резиноподобных материалов может быть разложен на две части: реакцию равновесия и отклонение от равновесия, зависящее от времени. Это предполагает, что материал может быть смоделирован в виде двух полимерных сетей, действующих параллельно. Первая сеть *A* фиксирует равновесный отклик материала и может моделироваться любой существующей моделью гиперэластичности. Вторая сеть *B* моделируется идеальной сетью, подобной сети *A*, и включенным последовательно элементом, который действует так, чтобы ослабить нагрузку на идеальную сеть со временем, позволяя описать характеристики, наблюдаемые в экспериментальном исследовании [19, 20].

Наглядно сформулированное положение иллюстрирует реологическая (механическая) модель Кельвина–Пойнтинга¹ применительно к случаю одноосного растяжения / сжатия (рис. 1). В модели Кельвина–Пойнтинга упругий элемент *A* параллельно соединен со звеном *B*, называемым элементом Максвелла и состоящим из последовательно соединенных упругого и вязкого элементов. При медленном (квазистатическом) нагружении вязкий элемент не сопротивляется деформации и не воспринимает приложенные напряжения. Поэтому поведение материала определяется деформацией одного упругого элемента *A*. В случае конечной скорости деформации работают все элементы модели, причем сопротивление вязкого элемента (демпфера) зависит от скорости деформации. При очень быстром динамическом (практически мгновенном) нагружении демпфер как бы «запирается», в нем не происходит деформации, и напряжение распределяется между упругими элементами *A* и *B*. В этом случае реакция системы является упругой, однако жесткость повышается по сравнению с медленным упругим деформированием. В начальный

момент времени, при деформировании из ненагруженного состояния с произвольной по величине скоростью, напряжение принимает нулевое значение, что является характерной особенностью модели Кельвина–Пойнтинга. Как отмечалось Кельвином [15], упругость такой системы является «совершенной» в том смысле, что вся деформация полностью исчезает при разгрузке и является поэтому «упругой» (обратимой).

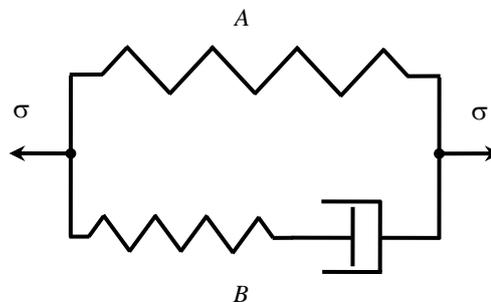


Рис. 1. Реологическая модель Кельвина–Пойнтинга

Fig. 1. Rheological model of Kelvin-Poynting

При построении определяющих соотношений в [19] материал полагается однородным, изотропным и сжимаемым. Градиент полных деформаций $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) / \partial \mathbf{X} \equiv \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ считается одинаковым для обеих ветвей: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B$ (здесь \mathbf{X} и \mathbf{x} – радиус-векторы материальной точки в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно). Градиент деформации \mathbf{F}_B представляется через градиент упругих деформаций \mathbf{F}_B^e и градиент вязких (неупругих) деформаций \mathbf{F}_B^v по формуле мультипликативного разложения (рис. 2):

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{F}_B^v. \quad (1)$$

Тензор \mathbf{F}_B^v переводит локальную (бесконечно малую²) отсчетную конфигурацию материала V_0 в локальную промежуточную конфигурацию V^v , получаемую из локальной актуальной конфигурации V в ре-

² Необходимость обращения к бесконечно малым объемам сплошной среды связано с тем, что в общем случае напряженно-деформированное состояние тела конечных размеров является неоднородным, и поэтому условие совместности деформаций $\text{rot } \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \equiv \nabla_{\mathbf{X}} \times \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = 0$ может быть выполнено только в актуальной конфигурации. Однако если данной окрестности точки среды поставить в соответствие тело (М-образец) определенной формы и конечных размеров, которое всегда находится в однородном напряженно-деформированном состоянии, изменяющемся со временем так же как в данной точке среды, то тогда условие совместности деформаций будет автоматически выполненным и в промежуточной конфигурации. При этом предполагается, что процессы в М-образце и в окрестности точки среды идентичны. Последнее явно фиксируется гипотезой макроскопической определенности [29]

¹ Согласно [14, 15], механические модели для описания реологических свойств материалов впервые ввели Пойнтинг и Томсон (лорд Кельвин) с целью объяснения поведения стеклянных волокон.

зультате полной виртуальной упругой разгрузки сети B (см. рис. 1) в состояние без напряжений (рис. 2). По этой причине в [19] конфигурация V^v называется разгруженной конфигурацией (relaxed configuration).

По теореме Коши о полярном разложении градиент \mathbf{F}_A можно представить в виде

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{U}_A = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{R}_A, \quad (2)$$

где \mathbf{R}_A – собственный ортогональный тензор поворота, сопутствующий деформации; \mathbf{U}_A и \mathbf{V}_A – правый и левый тензоры растяжения, которые являются симметричными положительно определенными тензорами. Аналогичные разложения имеют место для градиентов \mathbf{F}_B^e и \mathbf{F}_B^v (см. рис. 2):

$$\mathbf{F}_B^e = \mathbf{R}_B^e \cdot \mathbf{U}_B^e = \mathbf{V}_B^e \cdot \mathbf{R}_B^e, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_B^v = \mathbf{R}_B^v \cdot \mathbf{U}_B^v = \mathbf{V}_B^v \cdot \mathbf{R}_B^v. \quad (4)$$

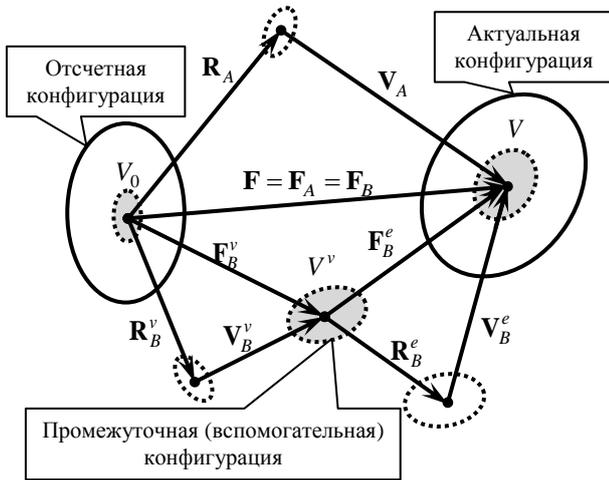


Рис. 2. Мультипликативное разложение деформации: V_0 , V , V^v – бесконечно малая окрестность материальной точки среды \mathbf{X} в отсчетной, актуальной и промежуточной конфигурациях

Fig. 2. Multiplicative strain decomposition: V_0 , V , V^v – is the infinitely small neighborhood of the material point of the medium \mathbf{X} in the current, current and intermediate configurations

В свою очередь, левые тензоры растяжения \mathbf{V}_A , \mathbf{V}_B^e можно представить через их спектральное разложение:

$$\mathbf{V}_A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(A)} \mathbf{e}_i^{(A)} \otimes \mathbf{e}_i^{(A)}, \quad \mathbf{V}_B^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(Be)} \mathbf{e}_i^{(Be)} \otimes \mathbf{e}_i^{(Be)}, \quad (5)$$

где $\lambda_i^{(A)}$, $\lambda_i^{(Be)}$ – собственные числа (кратности удлинения); $\mathbf{e}_i^{(A)}$, $\mathbf{e}_i^{(Be)}$ – собственные векторы тензоров \mathbf{V}_A , \mathbf{V}_B^e соответственно.

Тензор напряжений \mathbf{T} складывается из тензора напряжений \mathbf{T}_A сети A и тензора напряжений \mathbf{T}_B сети B (см. рис. 1):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B. \quad (6)$$

Тензоры \mathbf{T}_A , \mathbf{T}_B выражаются в [19] через главные напряжения:

$$\mathbf{T}_A = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(A)} \mathbf{e}_i^{(A)} \otimes \mathbf{e}_i^{(A)}, \quad \mathbf{T}_B = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(Be)} \mathbf{e}_i^{(Be)} \otimes \mathbf{e}_i^{(Be)}. \quad (7)$$

Главные напряжения схематизируются по модели Арруда–Бойса [30], согласно которой квазистатический отклик материала относится к отклику кубической ячейки, содержащей восемь цепей Ланжевена, связывающих центр ячейки с его вершинами [30]. При этом получаются выражения

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_i^{(A)} &= C_R^{(A)} \sqrt{N^{(A)}} \frac{(\lambda_i^{(A)})^2 - (\lambda_{chain}^{(A)})^2}{\lambda_{chain}^{(A)}} \times \\ &\times L^{-1} \left(\frac{\lambda_{chain}^{(A)}}{\sqrt{N^{(A)}}} \right) + B \ln \left(\sqrt{I_3^{(A)}} \right), \\ \sigma_i^{(Be)} &= C_R^{(B)} \sqrt{N^{(B)}} \frac{(\lambda_i^{(Be)})^2 - (\lambda_{chain}^{(Be)})^2}{\lambda_{chain}^{(Be)}} \times \\ &\times L^{-1} \left(\frac{\lambda_{chain}^{(Be)}}{\sqrt{N^{(B)}}} \right) + B \ln \left(\sqrt{I_3^{(Be)}} \right). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Здесь $C_R^{(A)}$, $C_R^{(B)}$ – начальные модули упругости; $\sqrt{N^{(A)}}$, $\sqrt{N^{(B)}}$ – предельные растяжения сети; B – объемный модуль упругости,

$$\lambda_{chain}^{(A)} = \sqrt{I_1^{(A)}/3}, \quad \lambda_{chain}^{(Be)} = \sqrt{I_1^{(Be)}/3} \quad (9)$$

– кратность усредненного удлинения макромолекулярной цепи эластомера (эффективное деформационное растяжение цепи),

$$I_1^{(A)} = \text{tr}(\mathbf{C}_A) = (\lambda_1^{(A)})^2 + (\lambda_2^{(A)})^2 + (\lambda_3^{(A)})^2,$$

$$I_1^{(Be)} = \text{tr}(\mathbf{C}_B^e) = (\lambda_1^{(Be)})^2 + (\lambda_2^{(Be)})^2 + (\lambda_3^{(Be)})^2, \quad (10)$$

$$I_3^{(A)} = \det(\mathbf{C}_A) = [\lambda_1^{(A)} \lambda_2^{(A)} \lambda_3^{(A)}]^2,$$

$$I_3^{(Be)} = \det(\mathbf{C}_B^e) = [\lambda_1^{(Be)} \lambda_2^{(Be)} \lambda_3^{(Be)}]^2 \quad (11)$$

– первый и третий главные инварианты правых мер полных и упругих деформаций Коши–Грина; $\mathbf{C}_A = \mathbf{F}_A^T \cdot \mathbf{F}_A$, $\mathbf{C}_B^e = (\mathbf{F}_B^e)^T \cdot \mathbf{F}_B^e$, $L^{-1}(x)$ – обратная функция Ланжевена $L(x) = \text{cth}(x) - 1/x$.

При использовании, например, модели гиперупругости Муни–Ривлина [18], имеющей упругий потенциал

$$\Phi(\mathbf{C}) = C_1^e (I_1 - 3) + C_2^e (I_2 - 3) + C_3^e (I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (12)$$

главные напряжения определяются выражением [5]

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} \quad (13)$$

с подстановками вида $\lambda_i = \{\lambda_i^{(A)}, \lambda_i^{(Be)}\}$, $\mathbf{C} = \{\mathbf{C}_A, \mathbf{C}_B^e\}$.

Здесь $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$, $I_2 = (1/2)[I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)]$, $I_3 = \det(\mathbf{C})$ – главные инварианты тензора \mathbf{C} (для несжимаемого материала $I_2 = \text{tr}(\mathbf{C}^{-1})$, $I_3 = 1$ [5]). Параметры C_1^e , C_2^e , C_3^e – материальные постоянные, которые могут быть определены путем подгонки кривой σ – ε материала в условиях одноосного квазистатического растяжения / сжатия. Модель Бергстрёма–Бойс допускает использование и других упругих потенциалов, прошедших экспериментальную проверку [5, 31, 32].

В более поздней работе Бергстрёма и Бойс [20] определяющие соотношения (7), (8) представляются в тензорной (инвариантной) форме записи с несущественными изменениями в обозначениях и в представлении членов, учитывающих объемную деформацию. Вариации определяющих соотношений (7), (8) содержатся в [21, 22, 27, 28].

При кинематическом описании полимерной сети B (см. рис. 1) полный градиент скорости $\mathbf{L}_B = \mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{F}_B^{-1}$ разлагается на упругую и вязкую (неупругую) составляющие:

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_B^e + \mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{L}_B^v \cdot (\mathbf{F}_B^e)^{-1} = \mathbf{L}_B^e + \mathbf{L}_B^v, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{L}_B^e = \mathbf{F}_B^e \cdot (\mathbf{F}_B^e)^{-1}, \quad \mathbf{L}_B^v = \mathbf{F}_B^e \cdot (\mathbf{F}_B^v)^{-1} = \mathbf{D}_B^v + \mathbf{W}_B^v, \quad (15)$$

$$\mathbf{D}_B^v = \mathbf{D}_B^v + \mathbf{W}_B^v.$$

Для замыкания кинематических соотношений (14), (15) и обеспечения единственности мультипликативного разложения (1) Бергстрём и Бойс [19, 20] со ссылкой на обоснование [33] принимают для кососимметричного тензора \mathbf{W}_B^v соотношение

$$\mathbf{W}_B^v = 0. \quad (16)$$

Тензор скоростей вязких деформаций \mathbf{D}_B^v выражается для сети B (см. рис. 1) через девиатор тензора напряжений \mathbf{T}_B по закону течения

$$\mathbf{D}_B^v = \mathfrak{K}_B \frac{\text{dev} \mathbf{T}_B}{\|\text{dev} \mathbf{T}_B\|}, \quad (17)$$

где $\text{dev}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - (\text{tr} \mathbf{A} / 3) \mathbf{I}$, $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)}$ – девиатор и норма тензора \mathbf{A} соответственно; \mathbf{I} – единичный

тензор. Фактически при постулировании (17) в [19, 20] неявно принимается, что материал является «вязко (неупруго) несжимаемым»³: $\text{tr} \mathbf{D}_B^v = 0$. Интенсивность скорости вязких деформаций $\mathfrak{K}_B = \|\mathbf{D}_B^v\|$ аппроксимируется в [19] степенным законом (в [20] без множителя $\sqrt{2}$ благодаря перенормировке):

$$\mathfrak{K}_B = C_1 (\lambda_{chain}^{Bv} - 1)^{C_2} \left(\frac{\|\text{dev} \mathbf{T}_B\|}{\sqrt{2} \hat{\tau}_B} \right)^m, \quad (18)$$

где C_1 , C_2 , $\hat{\tau}_B$, m – материальные постоянные (в приложениях используются только три материальные постоянные $\hat{C}_1 = C_1 / \hat{\tau}_B^m$, C_2 , m),

$$\lambda_{chain}^{(Bv)} = \sqrt{I_1^{(Bv)} / 3},$$

$$I_1^{(Bv)} = \text{tr}(\mathbf{C}_B^v) = (\lambda_1^{(Bv)})^2 + (\lambda_2^{(Bv)})^2 + (\lambda_3^{(Bv)})^2, \quad (19)$$

$\lambda_i^{(Bv)}$ – собственные числа правой меры вязких деформаций Коши–Грина $\mathbf{C}_B^v = (\mathbf{F}_B^v)^T \cdot \mathbf{F}_B^v$. В формуле (18) множитель $(\lambda_{chain}^{Bv} - 1)^{C_2}$ получен из соображений микроструктуры эластомера рассмотрением динамики репационного движения полностью или частично неактивных полимерных цепей [19] при эвристическом предположении, что $\mathfrak{K}_{chain}^{Bv} = f(\lambda_{chain}^{Bv})$.

Модель Бергстрёма–Бойс (1)–(19) содержит восемь материальных параметров $C_R^{(A)}$, $\sqrt{N^{(A)}}$, $C_R^{(B)}$, $\sqrt{N^{(B)}}$, B , \hat{C}_1 , C_2 , m , заданием которых полностью определяется поведение вязкоупругого эластомера. По рекомендациям, приведенным в приложении к статье [19], первые пять параметров $C_R^{(A)}$, $\sqrt{N^{(A)}}$, $C_R^{(B)}$, $\sqrt{N^{(B)}}$, B могут быть экспериментально оценены путем анализа квазистатических диаграмм одноосного растяжения / сжатия и диаграмм поведения материала во время нагрузки / разгрузки при циклическом одноосном растяжении / сжатии с заданной скоростью деформации. Оценка остальных трех параметров \hat{C}_1 , C_2 , m (особенно константы \hat{C}_1), напротив, может быть выполнена только методом проб и ошибок, основанным на сравнении экспериментальных данных на одноосное растяжение / сжатие в заданном диапазоне скоростей деформации с соответствующими численными решениями уравнений математической модели [18, 19]. Таким способом успешные результаты получены при малых скоростях деформирования [25] и больших скоростях де-

³ Здесь используется аналогия с термином «пластически несжимаемый» материал.

формации при ударных испытаниях на разрезном стержне Гопкинсона [26]. При умеренно высоких скоростях деформирования в [21, 22] параметры модели подбирались отдельно для каждого динамического режима испытаний. Поэтому процедура определения единого набора значений параметров модели, пригодных для описания экспериментальных данных при разных скоростях нагружения, требует дополнительного исследования [21, 22].

2. Критический анализ модели Бергстрёма–Бойс

Центральной проблемой моделей вязкоупругости и пластичности, использующих мультипликативное разложение (1), является его неединственность [33–39]. Здесь имеется в виду тот факт, что если тензоры \mathbf{F}_B^e , \mathbf{F}_B^v удовлетворяют разложению (1), то аналогичное будет верно для тензоров $\mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{F}_B^v$ с произвольным ортогональным тензором поворота \mathbf{Q} : $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$. Последнее означает, что тензоры поворота \mathbf{R}_B^e , \mathbf{R}_B^v в разложениях (3), (4) оказываются неопределенными. Иными словами, само по себе разложение (1) не позволяет разделить упомянутые два вращения.

В [37] рассматриваются следующие два варианта решения проблемы⁴: {1} $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{R}_B$ и $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$, {2} $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{R}_B$ и $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$, где \mathbf{R}_B – тензор поворота в полярном разложении градиента деформации \mathbf{F}_B (напомним, что в модели Бергстрёма–Бойс $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A = \mathbf{R}$, ибо $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A = \mathbf{F}$). Конечное предпочтение отдается первому условию однозначности из соображений математического удобства.

В последующей статье [33] помимо вышеуказанных двух условий однозначности вводится условие, ограничивающее значение спина вязких деформаций \mathbf{W}_B^v , входящего в (15). Из соображений удобства и простоты предлагается следующее условие однозначности: {3} $\mathbf{W}_B^v = 0$, которое, очевидно, отлично от условия (16). При использовании ранее построенной модели [37] для решения тестовой задачи простого сдвига получаются идентичные результаты при обоих условиях «{2}» и «{3}». На основании этого в [33] делается вывод, что выбор конкретного ограничения не существен при решении проблемы неоднозначности мультипликативного разложения.

Допустимость ограничения «{3}» на спин вязких деформаций детально исследуется в [38]. Формулируется следующее положение: если у задачи есть решение, то любое зависящее от времени и пространства враще-

ние промежуточной (разгрузочной) конфигурации (см. рис. 2) также дает (идентичное) решение и можно выбрать это вращение таким образом, чтобы преобразованное решение неупруго не вращалось: $\mathbf{W}_B^v = 0$. При этом отмечается: «Результат такого характера кажется частью фольклора теории пластичности для изотропных материалов, но мы не знаем фактического доказательства» [38]. Затем такое доказательство приводится (на основании принятых допущений), после чего делается вывод, что при обсуждении проблемы неоднозначности мультипликативного разложения, связанной с изотропными вязкопластическими и аморфными твердыми телами, можно без потери общности ограничить внимание решениями с $\mathbf{W}_B^v = 0$.

Для полноты общей картины следует отметить, что в историческом обзоре теории пластичности [36] как допустимые варианты отмечаются условия однозначности $\mathbf{F}_B^e = (\mathbf{F}_B^e)^T$, $\mathbf{F}_B^v = (\mathbf{F}_B^v)^T$, $\mathbf{W}_B^v = 0$, а в монографии [35] – еще два условия $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$.

Чтобы понять, насколько существенным (или не существенным) является выбор конкретного условия однозначности мультипликативного разложения градиента деформации, применим модель гипервязкоупругости Бергстрёма–Бойс к решению задачи простого сдвига, которому соответствует закон движения

$$x_1 = X_1 + sX_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3,$$

где $s = \text{tg} \gamma$ – абсолютный сдвиг; γ – угол сдвига. Возьмем три условия однозначности

$$\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}, \quad \mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}, \quad \mathbf{W}_B^v = 0. \quad (20)$$

Значения материальных параметров заимствуем из [19]: $C_R^{(A)} = 0,2$ МПа, $C_R^{(B)}/C_R^{(A)} = 1,6$, $N^{(A)} = N^{(B)} = 8$, $B = 100$ МПа, $m = 4$, $\hat{C}_1 = 7$ МПа^{-m}/с, $C_2 = -1$. Рассмотрим один цикл нагружения и разгрузки, при котором деформирование происходит с постоянной равной скоростью $\dot{\epsilon} = 2,5$ с⁻¹ до максимального значения $s = 2,5$, соответствующего максимальному углу сдвига $\gamma = 68,2^\circ$.

Поскольку квазистатические напряжения в полимерной сети A не зависят от выбора условия однозначности (20), наибольший интерес представляют динамические напряжения в полимерной сети B (рис. 3). Как видим, влияние того, какой вариант будет выбран, является существенным. Однако отличия в значениях полных напряжений (рис. 4) менее значительны, что позволяет признать модель гипервязкоупругости Бергстрёма–Бойс вполне удовлетворительной при описании напряженного состояния по сравнению с описанием деформированного состояния промежуточной конфигурации не только в отношении поворотов, но и изменения расстояний между материальными точками в каждый момент времени (рис. 5).

⁴ Здесь и ниже запись выражений и цитат дается в текущих обозначениях и терминах.

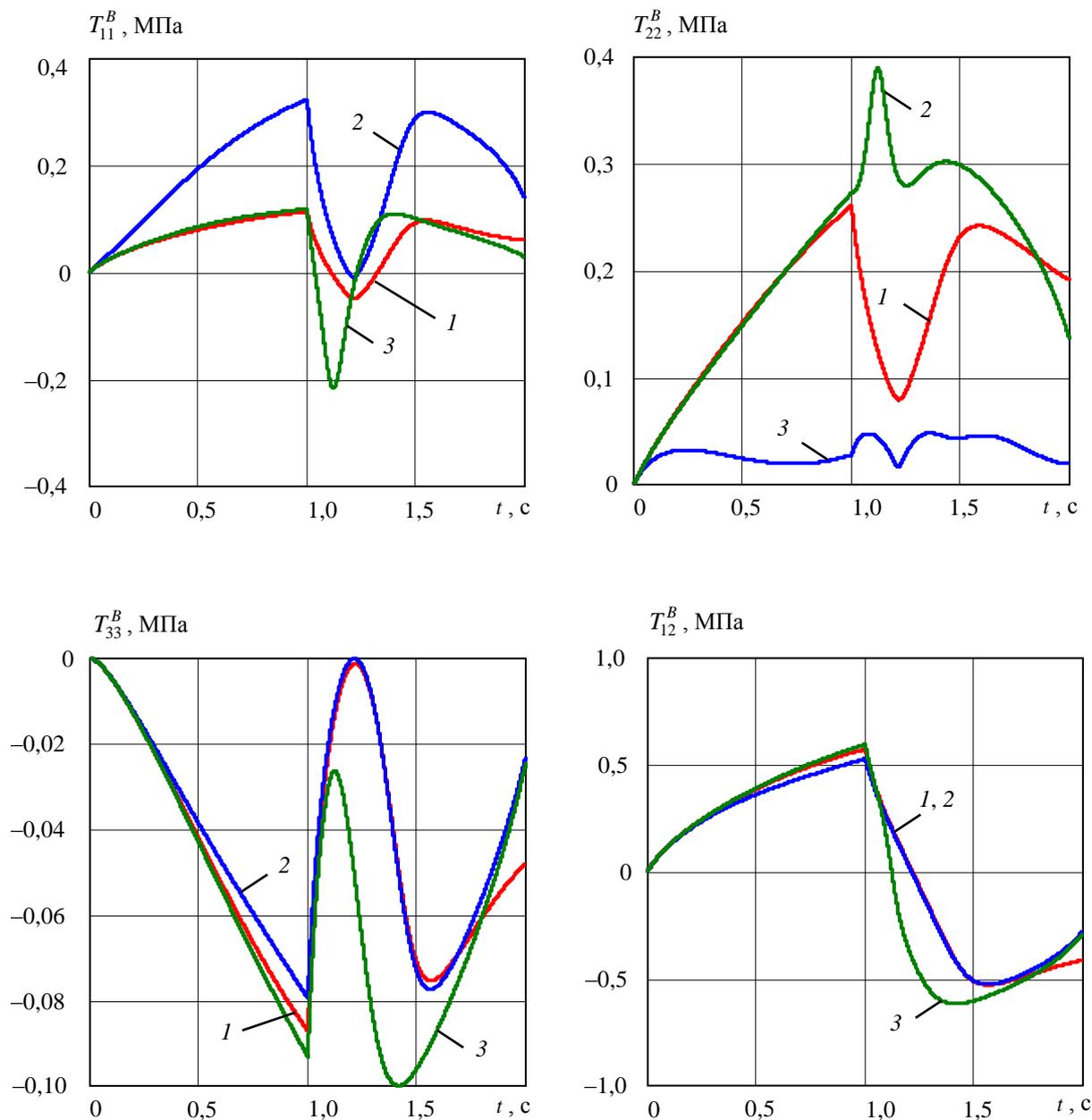


Рис. 3. Динамические напряжения (в полимерной сети B) при простом сдвиге по модели гипервязкоупругости Бергстрема–Бойса при разных условиях однозначности: 1 – $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$; 2 – $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$; 3 – $\mathbf{W}_B^v = 0$

Fig. 3. Dynamic stresses (in the polymer network B) under simple shear according to the Bergström-Boyce model of hyper-viscous elasticity under different conditions of uniqueness: 1 – $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$; 2 – $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$; 3 – $\mathbf{W}_B^v = 0$

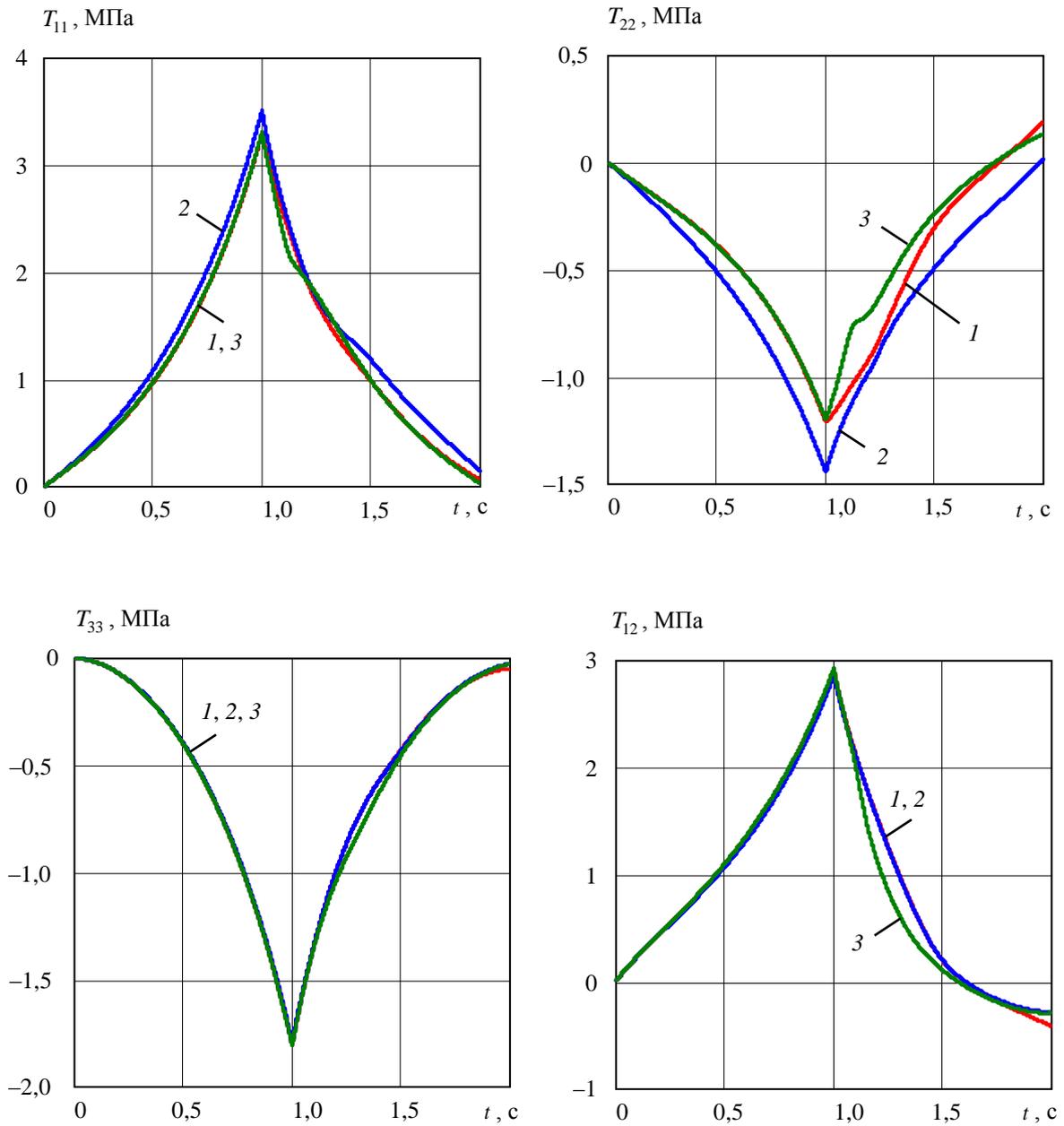


Рис. 4. Полные напряжения при простом сдвиге по модели гипервязкоупругости Бергстрёма–Бойса при разных условиях однозначности: 1 – $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$; 2 – $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$; 3 – $\mathbf{W}_B^v = 0$

Fig. 4. Total stresses under simple shear according to the Bergström-Boyce hyper-viscoelasticity model under different conditions of uniqueness: 1 – $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$; 2 – $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$; 3 – $\mathbf{W}_B^v = 0$

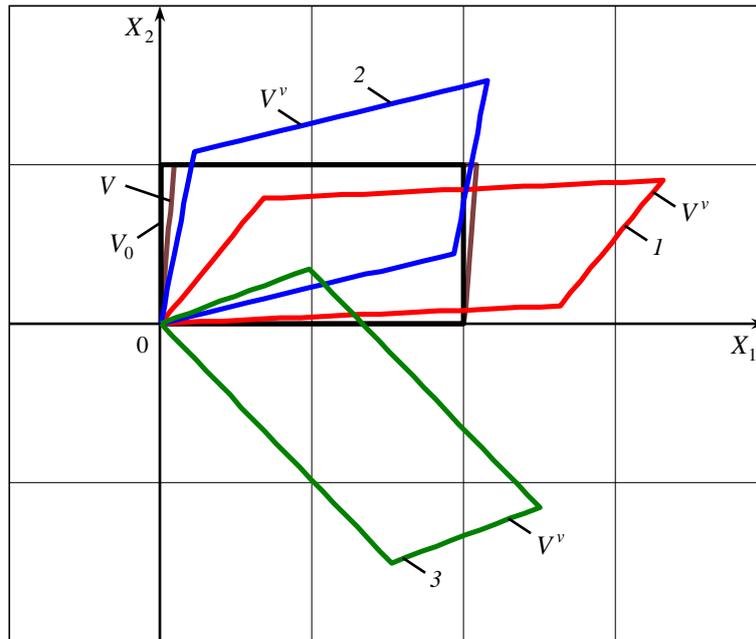


Рис. 5. Конфигурации М-образца (отсчетная V_0 , актуальная V , промежуточная V^v) при простом сдвиге по модели гипервязкоупругости Бергстрёма–Бойса на этапе разгрузки при угле сдвига $\gamma = 5^\circ$ в момент времени $t = 1,965$ с при разных условиях однозначности: 1 – $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$; 2 – $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$; 3 – $\mathbf{W}_B^v = 0$

Fig. 5. Configurations of the M-sample (reference V_0 , current V , intermediate V^v) under simple shear according to the Bergström-Boyce hyper-viscoelasticity model at the unloading stage at a shear angle $\gamma = 5^\circ$ at the time $t = 1,965$ s under different conditions of uniqueness: 1 – $\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$; 2 – $\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$; 3 – $\mathbf{W}_B^v = 0$

В заключение необходимо указать критерий, позволяющий отделить допустимые условия однозначности от физически неприемлемых условий. С этой целью обратимся к принципу объективности [35, 40–42]. Так, например, для упругих материалов, если в одной системе отсчета (без звездочки) для тензора напряжений имеет место определяющее соотношение в виде функции $\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{F})$, то в любой другой системе отсчета (со звездочкой) имеет место определяющее соотношение в виде аналогичной функции $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}(\mathbf{F}^*)$. Поскольку условие однозначности в моделях, использующих мультипликативное разложение градиента деформации, является неотъемлемой составной частью определяющего соотношения (а не уравнения движения) для тензора напряжений, представляемого в виде одного или системы нескольких уравнений, то принцип объективности должен распространяться и на условие однозначности (постулируемое положение). Если без ограничения общности в формуле Нолла $t^* = t + a$ для преобразования времени принять $a = 0$, то тогда при замене системы отсчета тензор напряжений преобразуется по формуле перехода [40–42]

$$\mathbf{T}^*(t, \mathbf{X}^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{T}(t, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Q}^T(t), \quad (21)$$

где $\mathbf{Q}(t)$ – ортогональный тензор, характеризующий относительный поворот систем отсчета. Если

$\mathbf{e}_i(t, \mathbf{X}) = \partial \mathbf{x}(t, X_1, X_2, X_3) / \partial X_i$ – векторы базиса сопутствующей лагранжевой системы координат (X_1, X_2, X_3 – координаты Лагранжа материальной точки) в данной системе отсчета, то по формуле Нолла $\mathbf{x}^*(t, \mathbf{X}^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{c}(t)$ в другой системе отсчета

$$\mathbf{e}_i^*(t, \mathbf{X}^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{e}_i(t, \mathbf{X}). \quad (22)$$

В начальный момент времени $t = 0$ (в отсчетной конфигурации) по формуле (22)

$$\mathbf{e}_i^*(t = 0, \mathbf{X}^*) = \mathbf{Q}(t = 0) \cdot \mathbf{e}_i(t = 0, \mathbf{X}). \quad (23)$$

Если ввести обычные упрощенные обозначения без указания аргументов:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}(t = 0) = \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{e}_i(t, \mathbf{X}) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i(t = 0, \mathbf{X}) = \mathbf{e}_{0i},$$

то тогда выражения (21)–(23) можно переписать в компактном виде:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{0i}^* = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{e}_{0i}. \quad (24)$$

Для градиента деформации справедливо диадное разложение [35]

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_{0i}, \quad (25)$$

где $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(t, \mathbf{X})$ – векторы взаимного (дуального) базиса сопутствующей лагранжевой системы координат: $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$, δ_j^i – символы Кронекера. На основании (24) формула преобразования градиента деформации (25) принимает вид

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T. \quad (26)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ у обеих систем отсчета оси базисных декартовых систем координат совпадают⁵, тогда $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$ и формула (26) принимает традиционный вид $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}$. Произвольность и постоянство тензора \mathbf{Q}_0 в (26) существенно упрощает технику применения принципа объективности для построения определяющих соотношений с использованием теорем об изотропных функциях при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой инерциальной системе отсчета [44].

Не так однозначно обстоит дело с формулами преобразования градиентов упругих и вязких деформаций, входящих в формулу мультипликативного разложения (1). Так, например, в [36] приводятся формулы

$$\left(\mathbf{F}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \left(\mathbf{F}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_B^v, \quad (27)$$

а в [38, 39] утверждается иное:

$$\left(\mathbf{F}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_B^e, \quad \left(\mathbf{F}_B^v\right)^* = \mathbf{F}_B^v. \quad (28)$$

В зависимости от этого одно и то же условие однозначности будет либо допустимым, либо физически неприемлемым. Чтобы разобраться в данном вопросе, обратимся к диадным разложениям градиентов деформации \mathbf{F}_B^e , \mathbf{F}_B^v (см. рис. 2), аналогичным (25):

$$\mathbf{F}_B^e = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i^v, \quad \mathbf{F}_B^v = \mathbf{e}^{vi} \otimes \mathbf{e}_{0i}.$$

Здесь $\mathbf{e}_i^v = \mathbf{e}_i^v(\tau, \mathbf{X})$, $\mathbf{e}^{vi} = \mathbf{e}^{vi}(\tau, \mathbf{X})$ – векторы основного и взаимного базисов сопутствующей лагранжевой системы координат в промежуточной конфигурации ($\mathbf{e}_i^v \cdot \mathbf{e}^{vj} = \delta_i^j$), которые при замене системы отсчета преобразуются согласно (22):

$$\mathbf{e}_i^{v*}(\tau, \mathbf{X}^*) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{e}_i^v(\tau, \mathbf{X}), \quad \mathbf{e}^{vi*}(\tau, \mathbf{X}^*) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{e}^{vi}(\tau, \mathbf{X}).$$

Следовательно (при $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$), если промежуточная конфигурация отнесена к начальному моменту времени $\tau = 0$, тогда будут справедливы формулы преобразования (28), если же промежуточная конфигурация отнесена к текущему моменту времени $\tau = t$, тогда следует использовать формулы преобразования (27). Если гово-

речь о реально осуществляемой разгрузке из локальной актуальной конфигурации (см. рис. 2), тогда $\tau > t$, и поэтому оба набора формул (27), (28) будут неверными. Если исходить из развернутой записи разложения (1) в виде $\mathbf{F}_B(t, X) = \mathbf{F}_B^e(t, X) \cdot \mathbf{F}_B^v(t, X)$, передающей суть математической модели, тогда становится понятным, что тензоры \mathbf{F}_B , \mathbf{F}_B^e , \mathbf{F}_B^v характеризуют деформированное состояние в одной и той же материальной точке среды X (с радиусами-векторами \mathbf{X} , \mathbf{X}^v , \mathbf{x} в отсчетной, промежуточной и актуальной конфигурациях соответственно) в один и тот же текущий момент времени t . Об этом свидетельствует, в частности, рис. 5. Поэтому более уместно называть конфигурацию V^v (см. рис. 2) промежуточной (или вспомогательной) конфигурацией, как в [36], а не (изохронно) разгруженной конфигурацией, чтобы не возникало излишних ассоциаций с термином «разгрузка».

Таким образом, в качестве τ следует брать текущий момент времени t , поэтому формулы преобразования градиентов упругих и вязких деформаций будут иметь вид

$$\left(\mathbf{F}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \left(\mathbf{F}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_B^v \cdot \mathbf{Q}_0^T. \quad (29)$$

При $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$ формулы (29) переходят в (27). В частности, исходя из формулы (29), формул полярного разложения Коши и формул (14), (15) можно показать, что

$$\left(\mathbf{R}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \left(\mathbf{V}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathbf{U}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathbf{R}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_B^v \cdot \mathbf{Q}_0^T, \quad \left(\mathbf{V}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}_B^v \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathbf{U}_B^v\right)^* = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U}_B^v \cdot \mathbf{Q}_0^T,$$

$$\left(\mathbf{R}_B\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_B \cdot \mathbf{Q}_0^T, \quad \left(\mathbf{V}_B\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}_B \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathbf{U}_B\right)^* = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U}_B \cdot \mathbf{Q}_0^T,$$

$$\left(\mathbf{L}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}_B^v \cdot \mathbf{Q}^T + \mathfrak{Q} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathfrak{P}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \left[\mathfrak{P}_B^e + \mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathfrak{Q} \cdot \left(\mathbf{F}_B^e\right)^{-1} \right] \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathbf{D}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_B^v \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathfrak{D}_B^e\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \left\{ \mathfrak{D}_B^e + \text{sym} \left[\mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathfrak{Q} \cdot \left(\mathbf{F}_B^e\right)^{-1} \right] \right\} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (30)$$

$$\left(\mathbf{W}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W}_B^v \cdot \mathbf{Q}^T + \mathfrak{Q} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

$$\left(\mathfrak{W}_B^v\right)^* = \mathbf{Q} \cdot \left\{ \mathfrak{W}_B^v + \text{skw} \left[\mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathfrak{Q} \cdot \left(\mathbf{F}_B^e\right)^{-1} \right] \right\} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

где $\text{sym}(\mathbf{A})$, $\text{skw}(\mathbf{A})$ – симметричная и кососимметричная части тензора \mathbf{A} .

⁵ Система отсчета представляет собой совокупность тела отсчета (абсолютно твердого тела), связанной с этим телом системы координат и некоторых часов [43].

В таблице приведены соотношения, принятия которых достаточно для обеспечения однозначности мультипликативного разложения градиента деформации. Только часть из них удовлетворяет требованиям независимости от выбора системы отсчета. При желании список такого рода соотношений можно многократно расширить. Вопрос, какое именно условие однозначности следует использовать, должен решаться так же, как это делается, например, для упругих потенциалов: надлежащей постановкой и проведением экспериментальных исследований либо теоретическим исследованием микроструктуры материала⁶. К сказанному следует добавить, что согласно формуле (30) тензор \mathbf{D}_B^v является необъективным, вследствие чего определяющее соотношение (17) не удовлетворяет принципу объективности поведения материалов. Последнее можно исправить, если по примеру [25] заменить в (17) тензор \mathbf{D}_B^v , тензором \mathbf{D}_B^v . Исчерпывающее решение затронутого вопроса требует отдельного исследования. Поэтому дальнейшее изложение (в рамках феноменологического подхода) ограничено важным для приложений случаем, когда можно обойтись без конкретизации условия однозначности.

Соответствие условий однозначности принципу объективности материалов

Compliance of the conditions of uniqueness to the objectivity principle of materials

Система отсчета		Допустимость (+) Неприемлемость (-)
Старая (без звездочки)	Новая (со звездочкой)	
$\mathbf{R}_B^e = \mathbf{I}$	$\mathbf{R}_B^{e*} = \mathbf{I}$	+
$\mathbf{R}_B^v = \mathbf{I}$	$\mathbf{R}_B^{v*} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_0^T$	-
$\mathbf{R}_B^e = \mathbf{R}_B$	$\mathbf{R}_B^{e*} = \mathbf{R}_B^* \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}^T$	-
$\mathbf{R}_B^v = \mathbf{R}_B$	$\mathbf{R}_B^{v*} = \mathbf{R}_B^*$	+
$\mathbf{F}_B^e = (\mathbf{F}_B^e)^T$	$\mathbf{F}_B^{e*} = (\mathbf{F}_B^{e*})^T$	+
$\mathbf{F}_B^v = (\mathbf{F}_B^v)^T$	$\mathbf{F}_B^{v*} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot (\mathbf{F}_B^{v*})^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_0^T$	-
$\mathbf{W}_B^v = 0$	$\mathbf{W}_B^{v*} = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{Q}^T \neq 0$	-
$\mathbf{W}_B^v = 0$	$\mathbf{W}_B^{v*} = \mathbf{Q} \cdot \text{skw} \times \times \left[\mathbf{F}_B^e \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathcal{Q} \cdot (\mathbf{F}_B^e)^{-1} \right] \cdot \mathbf{Q}^T \neq 0$	-
$\mathbf{W}_B^v = \mathcal{R}_B^v \cdot (\mathbf{R}_B^v)^T$	$\mathbf{W}_B^{v*} = \mathcal{R}_B^{v*} \cdot (\mathbf{R}_B^{v*})^T$	+

3. Феноменологическая модель вязкоупругости эластомеров

Перейдем к рассмотрению прикладной задачи, касающейся высокоэластичных оболочек, и воспользуемся тем упрощающим обстоятельством, что при симметричном нагружении оболочек вращения орты меридиана

⁶ В этом отношении для теории упругопластичности большой интерес представляет дальнейшее развитие теории двумерных монокристаллов [45].

на и параллели во все моменты времени совпадают по направлению с главными осями напряжений и деформаций (полных, упругих и вязких) и не изменяют своей ориентации относительно материальных линий (волокон) оболочки. Благодаря соосности градиентов полных, упругих и вязких деформаций соответствующее мультипликативное разложение является однозначным. При этом ограничение на неизменность ориентации главных осей напряжений относительно материальных линий (волокон) является существенным (пока надлежащим образом проведенные испытания эластомеров не покажут обратное) в свете исследований поликристаллических материалов (конструкционных сталей и сплавов) при непропорциональных циклических нагружениях [46].

Перейдем в сопутствующую систему отсчета, относительно которой бесконечно малая окрестность материала не вращается⁷, и рассмотрим представительный элемент однородного изотропного несжимаемого⁸ эластомера (например, резины) в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 6). После нагружения нормальными (главными) напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ он деформируется без поворота и с сохранением прямоугольной формы. Вследствие этого градиент деформации будет иметь диагональный вид:

$$\mathbf{F} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (31)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – кратности удлинения соответствующих ребер параллелепипеда.

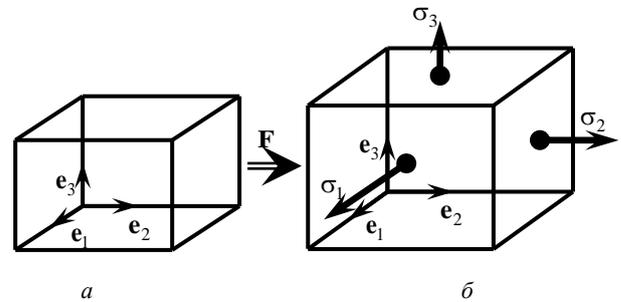


Рис. 6. Однородная деформация представительного элемента эластомера: а – до нагружения; б – после нагружения

Fig. 6. Homogeneous deformation of the representative element of the elastomer: a – before loading; b – after loading

По выражению (31) определяется тензор скоростей полной деформации:

$$\mathbf{D} = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (32)$$

⁷ Здесь имеется в виду, что в формуле полярного разложения градиента полной деформации $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ ортогональный тензор $\mathbf{R} = \mathbf{I}$.

⁸ Сжимаемость высокоэластичного материала необходимо учитывать только в бортах оболочки, где она стеснена деталями металлической арматуры.

где $\text{sym}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$ – симметричная часть тензора \mathbf{A} . Схожий вид имеет также тензор напряжений (рис. 6, б):

$$\mathbf{T} = \sigma_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (33)$$

Далее будем опираться на реологическую модель Кельвина–Пойнтинга (см. рис. 1), которая при феноменологическом подходе не только наглядно отображает поведение материала, но и играет активную роль при выводе определяющих соотношений, задавая их структуру [13].

Следуя [21, 22] и методическим рекомендациям [13], на основании реологической модели Кельвина–Пойнтинга (см. рис. 1) можно констатировать следующее. При параллельном соединении звеньев A и B они деформируются одинаково:

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B = \mathbf{F}, \quad (34)$$

а напряжения складываются из откликов упругих элементов звеньев A и B :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_A^e(\mathbf{F}) + \mathbf{T}_B^e(\mathbf{F}^e). \quad (35)$$

Здесь \mathbf{F} – градиент полной деформации материала (упругого элемента A); \mathbf{F}^e – градиент упругой деформации материала (упругого элемента B). Поскольку в звене B упругий элемент последовательно соединен с вязким элементом, должно выполняться равенство

$$\mathbf{T}_B^e(\mathbf{F}^e) = \mathbf{T}_B^v(\mathbf{F}^v, \mathbf{F}^{\dot{\mathbf{e}}}), \quad (36)$$

где \mathbf{F}^v , $\mathbf{F}^{\dot{\mathbf{e}}}$ – градиент вязкой деформации материала (вязкого элемента B) и скорость его изменения соответственно. Градиенты деформации \mathbf{F}^e , \mathbf{F}^v , \mathbf{F} связаны между собой формулой мультипликативного разложения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{\dot{\mathbf{e}}}, \quad (37)$$

предложенной и впервые использованной Е.Х. Ли для описания больших неупругих деформаций [34, 35]. Зависимости (34)–(36), со всей очевидностью, порождены исключительно структурой реологической модели Кельвина–Пойнтинга (см. рис. 1); они предопределяют дальнейший вид получаемых определяющих соотношений гипервязкоупругого материала.

Для детализации математической модели требуется задать свойства структурных элементов реологической модели. Для описания свойств упругих элементов A и B воспользуемся определяющими соотношениями гиперупругого несжимаемого материала:

$$\mathbf{T}_A^e = q_A \mathbf{I} + 2\mathbf{F} \cdot \frac{d\Phi_A(\mathbf{C})}{d\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (38)$$

$$\mathbf{T}_B^e = q_B^e \mathbf{I} + 2\mathbf{F}^e \cdot \frac{d\Phi_B(\mathbf{C}^e)}{d\mathbf{C}^e} \cdot (\mathbf{F}^e)^T. \quad (39)$$

Для вязкого элемента B возьмем определяющее соотношение

$$\mathbf{T}_B^v = q_B^v \mathbf{I} + 2\mu_v(\mathbf{C}^v) \left\| \mathbf{D}^v \right\|^{\kappa} \frac{\mathbf{D}^v}{\left\| \mathbf{D}^v \right\|}. \quad (40)$$

Здесь q_A , q_B^e , q_B^v – неопределенные множители Лагранжа, наличие которых обусловлено несжимаемостью материала [40–42]; Φ_A , Φ_B – упругие потенциалы,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \mathbf{C}^e = (\mathbf{F}^e)^T \cdot \mathbf{F}^e, \mathbf{C}^v = (\mathbf{F}^v)^T \cdot \mathbf{F}^v \quad (41)$$

– правые меры *полной, упругой и вязкой* деформации Коши–Грина соответственно;

$$\mathbf{D}^v = \text{sym} \left[\mathbf{F}^{\dot{\mathbf{e}}} \cdot (\mathbf{F}^v)^{-1} \right] \quad (42)$$

– тензор скоростей вязкой деформации, вводимый наряду с выражениями

$$\mathbf{D}^e = \text{sym} \left[\mathbf{F}^{\dot{\mathbf{e}}} \cdot (\mathbf{F}^e)^{-1} \right], \mathbf{D} = \text{sym} \left(\mathbf{F}^{\dot{\mathbf{e}}} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (43)$$

для тензора скоростей упругой деформации и тензора скоростей полной деформации. Поскольку третий главный инвариант $III_{C^v} = \det \mathbf{C}^v = 1$, коэффициент вязкости

$\mu_v(\mathbf{C}^v)$ как изотропная скалярная функция тензора \mathbf{C}^v будет определяться через первые два главных инварианта $I_{C^v} = \text{tr} \mathbf{C}^v$, $II_{C^v} = (1/2) \left[(\text{tr} \mathbf{C}^v)^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^v)^2 \right] = \text{tr}(\mathbf{C}^v)^{-1}$:

$$\mu_v = \mu_v(I_{C^v}, II_{C^v}). \quad (44)$$

Замечание. Определяющее соотношение (40) при постоянном коэффициенте вязкости μ_v соответствует несжимаемой жидкости Рейнера–Ривлина [47–49], у которой $\mathbf{T}_B^v = \mathbf{T}_B^v(\mathbf{D}^v)$ или в наиболее общем виде

$$\mathbf{T}_B^v = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{D}^v + \varphi_2 (\mathbf{D}^v)^2. \quad (45)$$

Поперечная вязкость φ_2 полагается равной нулю, а кажущаяся вязкость φ_1 – степенной функцией от второго главного инварианта II_{D^v} или, что то же самое, нормы

$\left\| \mathbf{D}^v \right\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}^v)^2}$ тензора скоростей деформации \mathbf{D}^v , являющегося девиатором: $I_{D^v} = \text{tr} \mathbf{D}^v = 0$. При этом

$\varphi_0 = q_B^v$, где q_B^v – неопределенный множитель Лагранжа (гидростатическое давление, взятое со знаком минус). С учетом этого после подстановки в (45) выражения

$$\varphi_1 \left(\left\| \mathbf{D}^v \right\| \right) = 2\mu_v \left\| \mathbf{D}^v \right\|^{\kappa-1}$$

получается определяющее соотношение

$$\mathbf{T}_B^v = q_B^v \mathbf{I} + \text{dev} \mathbf{T}_B^v, \text{dev} \mathbf{T}_B^v = 2\mu_v \left\| \mathbf{D}^v \right\|^{\kappa} \frac{\mathbf{D}^v}{\left\| \mathbf{D}^v \right\|}, \quad (46)$$

в котором коэффициент вязкости μ_v и показатель степени κ являются положительными материальными параметрами и могут зависеть от температуры. Когда $\kappa = 1$, соотношение (46) переходит в реологический закон Ньютона для линейно вязких (ньютоновских) несжимаемых жидкостей классической гидродинамики. Если же $\kappa = 0$, то соотношение (46) становится подобным закону сухого трения Кулона–Амонтона; на нем основывается классическая теория пластичности и ее современные обобщения [50–52]. Следует также отметить, что зависимость (46) в записи

$$\|\text{dev} \mathbf{T}_B^v\| = 2\mu_v \|\mathbf{D}^v\|^\kappa \quad (47)$$

является наиболее распространенной аналитической зависимостью в теории течения – одним из вариантов прикладной теории ползучести [53, 54]. В другом, более общем варианте прикладной теории ползучести, называемом теорией упрочнения [53, 54], скалярный параметр μ_v полагается зависящим от линейного тензора деформации ползучести $\boldsymbol{\varepsilon}^v$. Как правило, используется степенная зависимость вида

$$\mu_v = \mu_v^0 \|\boldsymbol{\varepsilon}^v\|^\alpha, \quad (48)$$

где μ_v^0 , α – материальные константы. Зависимость (48) относится главным образом к таким конструктивным материалам, как металлы и их сплавы при высоких температурах. Применительно к эластомерам исходя из основополагающих зависимостей (17), (18) модели Бергстрёма–Бойса и равенства $\mathbf{D}_B^v = \mathbf{D}_B^v$, выполняющегося в рассматриваемом случае, для коэффициента вязкости получается степенная зависимость

$$\mu_v = \mu_v^0 (\lambda_{chain}^v - 1)^\alpha, \quad \lambda_{chain}^v = \sqrt{I_{C^v}/3}, \quad I_{C^v} = \text{tr} \mathbf{C}^v. \quad (49)$$

Зависимость (49), имеющая вид $\mu_v = \mu_v(I_{C^v})$, является частным случаем зависимости (44). Указанные зависимости соотносятся между собой так же, как, например, неогукковский упругий потенциал Трелоара [31, 41] соотносится с упругим потенциалом Муни–Ривлина (12). Последнее может быть важным для правильной настройки модели при описании зависимости от скорости вязких деформаций.

Вернемся к описанию процесса деформирования представительного элемента вязкоупругого материала (см. рис. 6). В условиях рассматриваемого нагружения упругая \mathbf{F}^e и вязкая \mathbf{F}^v составляющие градиента полной деформации \mathbf{F} имеют вид, аналогичный (31):

$$\mathbf{F}^e = \lambda_1^e \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2^e \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3^e \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (50)$$

$$\mathbf{F}^v = \lambda_1^v \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2^v \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3^v \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (51)$$

Подставляя (31), (50), (51) в формулу (37), будем иметь

$$\sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^e \lambda_\alpha^v \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \lambda_1^e \lambda_1^v, \quad \lambda_2 = \lambda_2^e \lambda_2^v, \quad \lambda_3 = \lambda_3^e \lambda_3^v. \quad (52)$$

Дифференцируя выражения (52) по времени и подставляя результат в (32), приходим к формуле аддитивного разложения тензора скоростей деформации

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^v, \quad (53)$$

где

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_\alpha^e}{\lambda_\alpha^e} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{D}^e = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_\alpha^e}{\lambda_\alpha^e} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{D}^v = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_\alpha^v}{\lambda_\alpha^v} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (54)$$

формулы диадного разложения тензоров скоростей полной, упругой и вязкой деформации (42), (43) соответственно.

С помощью (13) определяющие соотношения (38)–(40) можно переписать в более удобном для расчетов виде:

$$\mathbf{T}_A^e = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha^{Ae} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \sigma_\alpha^{Ae} = q_A + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_A}{\partial \lambda_\alpha}, \quad (55)$$

$$\mathbf{T}_B^e = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha^{Be} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \sigma_\alpha^{Be} = q_B^e + \lambda_\alpha^e \frac{\partial \Phi_B}{\partial \lambda_\alpha^e}, \quad (56)$$

$$\mathbf{T}_B^v = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha^{Bv} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \sigma_\alpha^{Bv} = q_B^v + 2\mu_v \|\mathbf{D}^v\|^{\kappa-1} D_\alpha^v. \quad (57)$$

Здесь используются обозначения

$$D_\alpha^v = \frac{\dot{\lambda}_\alpha^v}{\lambda_\alpha^v}, \quad \|\mathbf{D}^v\| = \sqrt{\left(\frac{\dot{\lambda}_1^v}{\lambda_1^v}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\lambda}_2^v}{\lambda_2^v}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\lambda}_3^v}{\lambda_3^v}\right)^2}. \quad (58)$$

Подставляя (55), (56) в (35), с учетом (33) находим

$$\sigma_\alpha = q + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_A}{\partial \lambda_\alpha} + \lambda_\alpha^e \frac{\partial \Phi_B}{\partial \lambda_\alpha^e} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (59)$$

где $q = q_A + q_B^e$ – суммарный множитель Лагранжа. Аналогичным образом, подставляя (56), (57) в (36), получаем

$$2\mu_v \|\mathbf{D}^v\|^{\kappa-1} D_\alpha^v = q_B + \lambda_\alpha^e \frac{\partial \Phi_B}{\partial \lambda_\alpha^e} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (60)$$

где обозначено $q_B = q_B^e - q_B^v$.

Уравнения (59), (60) совместно с выражениями (52)–(54), (58) и (49) приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = q + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_A}{\partial \lambda_\alpha} + \lambda_\alpha^e \frac{\partial \Phi_B}{\partial \lambda_\alpha^e}, \\ 2\mu_v \|\mathbf{D}^v\|^{\kappa-1} D_\alpha^v = q_B + \lambda_\alpha^e \frac{\partial \Phi_B}{\partial \lambda_\alpha^e}, \\ \lambda_\alpha = \lambda_\alpha^e \lambda_\alpha^v, \\ D_\alpha = D_\alpha^e + D_\alpha^v, \\ D_\alpha = \frac{\dot{\lambda}_\alpha^e}{\lambda_\alpha^e}, D_\alpha^e = \frac{\dot{\lambda}_\alpha^e}{\lambda_\alpha^e}, D_\alpha^v = \frac{\dot{\lambda}_\alpha^v}{\lambda_\alpha^v}, \\ \|\mathbf{D}^v\| = \sqrt{\left(\frac{\dot{\lambda}_1^v}{\lambda_1^v}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\lambda}_2^v}{\lambda_2^v}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\lambda}_3^v}{\lambda_3^v}\right)^2}. \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (61)$$

Система уравнений (61) представляет собой иско- мую систему определяющих соотношений гипервязко- упругого материала, соответствующую реологической модели Кельвина–Пойнтинга (см. рис. 1). К ним надо добавить условия несжимаемости:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e = 1, \lambda_1^v \lambda_2^v \lambda_3^v = 1. \quad (62)$$

С помощью (52) нетрудно убедиться, что из любых двух условий несжимаемости (62) вытекает третье усло- вие, поэтому независимыми в (62) являются только два условия несжимаемости. Из (62) также вытекает, что

$$\left\{ \begin{aligned} \text{tr} \mathbf{D} &= D_1 + D_2 + D_3 = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} = 0, \\ \text{tr} \mathbf{D}^e &= D_1^e + D_2^e + D_3^e = \frac{\dot{\lambda}_1^e}{\lambda_1^e} + \frac{\dot{\lambda}_2^e}{\lambda_2^e} + \frac{\dot{\lambda}_3^e}{\lambda_3^e} = 0, \\ \text{tr} \mathbf{D}^v &= D_1^v + D_2^v + D_3^v = \frac{\dot{\lambda}_1^v}{\lambda_1^v} + \frac{\dot{\lambda}_2^v}{\lambda_2^v} + \frac{\dot{\lambda}_3^v}{\lambda_3^v} = 0. \end{aligned} \right. \quad (63)$$

Построение феноменологической модели гипервязко- упругости заканчивается заданием явной зависимости (44) для коэффициента вязкости μ_v . По-видимому, во многих практически важных случаях достаточно точной является зависимость Бергстрёма–Бойс (49). Если, как в исследованиях полиуретана [21, 22], при использовании (49) возникнут затруднения в определении единого на- бора значений параметров модели, пригодных для опи- сания экспериментальных данных при разных скоро- стях нагружения, то тогда может потребоваться поиск более общего выражения для коэффициента вязкости μ_v , зависящего не только от первого, но и второго инварианта правой меры вязких деформаций Коши– Грина⁹.

Определяющие соотношения (61) пригодны для экспериментального определения материальных пара- метров модели по стандартным испытаниям на одноос- ное растяжение-сжатие, двусное растяжение-сжатие и чистый сдвиг [5, 31]. Для этих целей, а также для опи- сания напряженно-деформированного состояния оболоч- ек вращения при симметричном нагружении опреде-

ляющие соотношения (61) с учетом условий несжимае- мости (62), (63) должны быть преобразованы к удобно- му для численных расчетов виду, что выходит за рамки текущей статьи и является предметом отдельного ис- следования.

Заключение

Для удовлетворения практической потребности в повышении точности расчетов высокоэластичных оболочек должна привлекаться теория конечных вязкоупругих деформаций эластомеров. Среди совре- менных моделей гипервязкоупругости резиноподоб- ных материалов одной из наиболее перспективных и популярных является модель Бергстрёма–Бойс, осно- ванная на сведениях о микроструктуре эластомеров и использующая мультипликативное разложение гра- диента полной деформации. Прямое решение тестов- ой задачи простого сдвига по модели Бергстрёма– Бойс показывает, что получаемые расчетные резуль- таты существенно зависят от выбора условия одно- значности, обеспечивающего единственность мульт- ипликативного разложения градиента деформации. Из множества предлагаемых в научной литературе условий однозначности только определенная часть удовлетворяет требованию независимости от выбора системы отсчета. При желании список подобных ус- ловий однозначности можно многократно расширить. Поэтому вопрос, какое именно условие однозначности следует использовать, должен решаться так же, как это делается, например, для упругих потенциа- лов: надлежащей постановкой и проведением экспе- риментальных исследований либо теоретическим ис- следованием микроструктуры материала.

Предложенная феноменологическая модель гипер- вязкоупругости, основанная на одномерной реологиче- ской модели Кельвина–Пойнтинга, ограничивается слу- чаем, когда главные оси напряжений и деформаций (полных, упругих и вязких) совпадают и не изменяют своей ориентации относительно материальных линий (волокон). Благодаря этому отпадает необходимость в формулировке условия однозначности, обеспечивающе- го единственность соответствующего мультипликатив- ного разложения. Учет зависимости коэффициента вяз- кости от второго инварианта правой меры вязких де- формаций Коши–Грина в степенном законе кажущейся вязкости модели Рейнера–Ривлина обобщает соответ- ствующую зависимость модели Бергстрёма–Бойс и позво- ляет, при необходимости, расширить диапазон скоро- стей деформации при согласовании расчетных и экспе- риментальных данных.

Разработанная математическая модель гипервязко- упругости резиноподобных материалов предназначена для расчета напряженно-деформированного состояния высокоэластичных оболочек вращения при симметрич- ном нагружении.

⁹ Действительно, если сравнить соотношения (18) и (47), то между материальными постоянными модели Бергстрёма–Бойс и материальными постоянными рассматриваемой фено- менологической модели, использующей зависимость (49), можно установить следующую связь:

$$\kappa = 1/m, \alpha = -C_2/m, \mu_v^0 = (\sqrt{2} \hat{C}_1^{1/m})^{-1}.$$

Как отмечается в приложении [19], модель Бергстрёма– Бойс чувствительна к значению постоянной \hat{C}_1 , и поэтому ее подбор крайне важен, чтобы получить правильную зависи- мость от скорости деформации при сравнении предсказаний модели с экспериментальными данными для разных скоростей деформации.

Библиографический список

1. Акопян Р.А. Пневматическое поддресоривание авто-транспортных средств (вопросы теории и практики). – Львов: Выща школа, 1979. – Ч. 1. – 218 с.
2. Певзнер Я.М., Горелик А.М. Пневматические и гидро-пневматические подвески. – М.: ГНТИМЛ, 1963. – 319 с.
3. Равкин Г.О. Пневматическая подвеска автомобиля. – М.: ГНТИМЛ, 1962. – 288 с.
4. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред / Б.А. Гордеев [и др.]. – М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
5. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машино-строительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
6. Общая нелинейная теория упругих оболочек / С.А. Кабриц [и др.] / под ред. К.Ф. Черных, С.А. Кабрица. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. – 388 с.
7. Бидерман В.Л. Расчеты резиновых и резинокордных деталей // Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев [и др.] / под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1958. – Т. 2. – С. 487–591.
8. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
9. Расчетно-экспериментальные методы проектирования сложных резинокордных конструкций / И.А. Трибельский [и др.]. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. – 240 с.
10. Ильюшин А.А. Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости. – М.: Физматлит, 2007. – 288 с.
11. Ильюшин А.А., Победра Б.Б. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 281 с.
12. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
13. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
14. Рейнер М. Феноменологическая макрореология // Реология: теория и приложения / под ред. Ф. Эйриха. – М.: ИЛ, 1962. – С. 22–85.
15. Рейнер М. Реология. – М.: Наука, 1965. – 224 с.
16. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 536 с.
17. Banks H.T., Hu Sh., Kenz Z.R. A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids // Adv. Appl. Math. Mech. – 2011. – Vol. 3. – No. 1. – P. 1–51. DOI: 10.4208/aamm.10-m1030
18. Dynamic Response Analysis of Thermoplastic Polyurethane / V. Fontanari, M. Avalle, C. Migliaresi, L. Peroni, B.D. Monelli // Advanced Structured Materials. – 2012. – Vol. 16. – P. 337–354. DOI: 10.1007/978-3-642-22700-4
19. Bergström J., Boyce M. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers // J. Mech. Phys. Solids. – 1998. – Vol. 46. – P. 931–954. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00075-6
20. Bergström J., Boyce M. Large strain time-dependent behaviour of filled elastomers // Mech. Mater. – 2000. – Vol. 32. – P. 627–644. DOI: 10.1016/S0167-6636(00)00028-4
21. Белкин А.Е., Даштиев И.З., Лонкин Б.В. Моделирование вязкоупругости полиуретана при умеренно высоких скоростях деформирования // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 3. – С. 39–54.
22. Белкин А.Е., Даштиев И.З., Семенов В.К. Математическая модель вязкоупругого поведения полиуретана при сжатии с умеренно высокими скоростями деформирования // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2014. – № 6. – С. 44–58.
23. Bergström J.S., Hilbert L.B. A constitutive model for predicting the large deformation thermomechanical behavior of fluoropolymers // Mechanics of Materials. – 2005. – Vol. 37. – P. 899–913.
24. Bergström J., Bischoff M. An Advanced Thermomechanical Constitutive Model for UHMWPE // Int. J. of Structural Changes in Solids. Mechanics and Applications. – 2010. – Vol. 2. – No. 1. – P. 31–39.
25. Qi H.J., Boyce M.C. Stress-strain behavior of thermo-plastic polyurethane // Mechanics of Materials. – 2005. – Vol. 37. – P. 817–839.
26. Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates // Rubber Chem. Technol. – 2004. – Vol. 77. – P. 972–981.
27. Guo Q., Zairi F., Guo X. A thermo-viscoelastic-damage constitutive model for cyclically loaded rubbers. Part I: Model formulation and numerical examples // International Journal of Plasticity. – 2018. – Vol. 101. – P. 106–124. DOI: doi:10.1016/j.ijplas.2017.10.01
28. Guo Q., Zairi F., Guo X. A thermo-viscoelastic-damage constitutive model for cyclically loaded rubbers. Part II: Experimental studies and parameter identification // International Journal of Plasticity. – 2018. – Vol. 101. – P. 58–73. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.009
29. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
30. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // Journal of Mechanic Physics Solids. – 1993. – Vol. 41. – No. 2. – pp. 389–412.
31. Трелоар Л. Физика упругости каучука. – М.: ИЛ, 1953. – 241 с.
32. Hariharaputhiran H., Saravanan U. A new set of biaxial and uniaxial experiments on vulcanized rubber and attempts at modeling it using classical hyperelastic models // Mechanics of Materials. – 2016. – Vol. 92. – P. 211–222. DOI: 10.1016/j.mechmat.2015.09.003
33. Boyce M.C., Weber G.G., Parks D.M. On the kinematics of finite strain plasticity // J. Mech. Phys. Solids. – 1989. – Vol. 37. – No. 5. – P. 647–665.
34. Lee E.H. Elastic plastic deformation at finite strain // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1969. – Vol. 36. – P. 1–6.
35. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
36. Bruhns O.T. The Multiplicative Decomposition of the Deformation Gradient in Plasticity – Origin and Limitations // Advanced Structured Materials. – 2015. – Vol. 64. – P. 37–66. DOI: 10.1007/978-3-319-19440-0
37. Boyce M.C., Parks D.M., Argon A.S. Large inelastic deformation of glassy polymers. part I: rate dependent constitutive model // Mechanics of Materials. – 1988. – Vol. 7. – P. 15–33.
38. Gurtin M.E., Anand L. The decomposition $\mathbf{F}=\mathbf{F}^c\mathbf{F}^p$, material symmetry, and plastic irrotationality for solids that are isotropic-viscoplastic or amorphous // International Journal of Plasticity. – 2005. – Vol. 21. – P. 1686–1719.
39. Dashne P.A. Invariance Considerations in Large Strain Elasto-Plasticity // Journal of Applied Mechanics. – 1986. – Vol. 53. – P. 55–60.
40. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.

41. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
42. Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – 602 p.
43. Медведев Б.В. Начала теоретической физики. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
44. Корнеев С.А. Принцип объективности и техника его применения при построении определяющих соотношений с точностью до скалярных коэффициентов // *Мат. моделирование систем и процессов: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 2007. – № 15. – С. 97–122.*
45. Reina C., Schlömerkemper A., Conti S. Derivation of $\mathbf{F}=\mathbf{F}^c\mathbf{F}^p$ as the continuum limit of crystalline slip // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2016. – Vol. 89. – P. 231–254.*
46. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Пластичность материалов при пропорциональных и непропорциональных циклических нагружениях // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического универ-*

- ситета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 53–74. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.04*
47. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
48. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. – М.: Наука, 1982. – 376 с.
49. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. – М.: ИЛ, 1963. – 256 с.
50. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
51. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
52. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 223 с.
53. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 455 с.
54. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

References

1. Akopian R.A. Pnevmaticheskoe podressorivanie avtotransportnykh sredstv (voprosy teorii i praktiki) [Pneumatic suspension of vehicles (theory and practice)]. *L'vov, Vyshcha shkola, 1979, part 1, 218 p.*
2. Pevzner Ia.M., Gorelik A.M. Pnevmaticheskie i gidropnevmaticheskie podveski [Pneumatic and hydropneumatic suspension]. *Moscow, GNTIML, 1963, 319 p.*
3. Ravkin G.O. Pnevmaticheskaya podveska avtomobilia [Air suspension car]. *Moscow, GNTIML, 1962, 288 p.*
4. Gordeev B.A. Sistemy vibrozashchity s ispol'zovaniem inertsiionnosti i dissipatsii reologicheskikh sred [Vibration protection systems using inertia and dissipation of rheological media]. *Moscow, FIZMATLIT, 2004, 176 p.*
5. Chernykh K.F. Nelineinaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh [Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations]. *Leningrad, Mashinostroenie, 1986, 336 p.*
6. Kabrits S.A. Obshchaya nelineinaya teoriya uprugikh obolochek [General nonlinear theory of elastic shells]. *Saint Petersburg, Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2002, 388 p.*
7. Biderman V.L. Raschety rezinovykh i rezinokordnykh detalei [Calculations of rubber and rubber-cord parts]. *Moscow, Mashgiz, Raschety na prochnost' v mashinostroenii, 1952, vol. 2, pp. 487-591.*
8. Biderman V.L. Mekhanika tonkostennykh konstruksii [Mechanics of thin-walled structures]. *Moscow, Mashinostroenie, 1977, 488 p.*
9. Tribel'skii I.A. Raschetno-eksperimental'nye metody proektirovaniya slozhnykh rezinokordnykh konstruksii [Calculated and experimental methods for designing complex rubber-cord constructions]. *Omsk, Izd-vo OmGTU, 2011, 240 p.*
10. Il'iushin A.A. Trudy. T. 3. Teoriya termoviazkoupругosti [Proceedings. V. 3. Theory of thermoviscoelasticity]. *Moscow, Fizmatlit, 2007, 288 p.*
11. Il'iushin A.A., Pobedria B.B. Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkoupругosti [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscoelasticity]. *Moscow, Izd-vo «Nauka», 1970, 281 p.*
12. Kristensen R. Vvedenie v teoriyu viazkoupругosti [Introduction to the theory of viscoelasticity]. *Moscow, Mir, 1974, 340 p.*
13. Pal'mov V.A. Kolebaniya upругo-plasticheskikh tel [Oscillations of elastic-plastic bodies]. *Moscow, Nauka, 1976, 328 p.*
14. Reiner M. Fenomenologicheskaya makroreologiya [Phenomenological Macrorheology]. *Reologiya: teoriya i prilozheniya, 1962, pp. 22-85.*
15. Reiner M. Reologiya [Rheology]. *Moscow, Nauka, 1965, 224 p.*
16. Ferri Dzh. Viazkoupругie svoystva polimerov [Viscoelastic properties of polymers]. *Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1963, 536 p.*
17. Banks H.T., Hu Sh. and Kenz Z.R. A Brief Review of Elasticity and Viscoelasticity for Solids. *Adv. Appl. Math. Mech, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 1-51. DOI: 10.4208/aamm.10-m1030*
18. Fontanari V., Avalle M., Migliaresi C., Peroni L. and Monelli B. D. Dynamic Response Analysis of Thermoplastic Polyurethane. *Advanced Structured Materials, 2012, vol. 16, pp. 337-354. DOI: 10.1007/978-3-642-22700-4*
19. Bergström J., Boyce M. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids, 1998, vol. 46, pp. 931-954. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00075-6*
20. Bergström J., Boyce M. Large strain time-dependent behaviour of filled elastomers. *Mech. Mater., 2000, vol. 32, pp. 627-644. DOI: 10.1016/S0167-6636(00)00028-4*
21. Belkin A.E., Dashtiev I.Z., Lonkin B.V. Modelirovanie viazkoupругosti poliuretana pri umerenno vysokikh skorostiakh deformirovaniya [Modeling the viscoelasticity of polyurethane at moderately high deformation rates]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody, 2014, no. 3, pp. 39-54.*
22. Belkin A.E., Dashtiev I.Z., Semenov V.K. Matematicheskaya model' viazkoupругogo povedeniya poliuretana pri szhatii s umerenno vysokimi skorostiami deformirovaniya [Mathematical model of viscoelastic behavior of polyurethane under compression with moderately high strain rates]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. «Mashinostroenie», 2014, no. 6, pp. 44-58.*
23. Bergström J.S., Hilbert L.B. A constitutive model for predicting the large deformation thermomechanical behavior of fluoropolymers. *Mechanics of Materials, 2005, vol. 37, pp. 899-913.*
24. Bergström J., Bischoff M. An Advanced Thermomechanical Constitutive Model for UHMWPE. *Int. J. of Structural Changes in Solids. Mechanics and Applications, 2010, vol. 2, no.1, pp. 31-39.*

25. Qi H.J., Boyce M.C. Stress-strain behavior of thermo-plastic polyurethane. *Mechanics of Materials*, 2005, vol. 37, pp. 817-839.
26. Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates. *Rubber Chem. Technol.*, 2004, vol. 77, pp. 972-981.
27. Guo Q., Zairi F., Guo X. A thermo-viscoelastic-damage constitutive model for cyclically loaded rubbers. Part I: Model formulation and numerical examples. *International Journal of Plasticity*, 2018, vol. 101, pp. 106-124. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.01
28. Guo Q., Zairi F., Guo X., A thermo-viscoelastic-damage constitutive model for cyclically loaded rubbers. Part II: Experimental studies and parameter identification. *International Journal of Plasticity*, 2018, vol. 101, pp. 58-73. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.009
29. И'юшин А.А. Пластичност'. Основы обшчей математической теории [Plastic. Basics of General Mathematical Theory]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1963, 271 p.
30. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of Mechanic Physics Solids*, 1993, vol. 41, no. 2, pp. 389-412.
31. Treloar, L. Fizika uprugosti kauchuka [Physics of elasticity of rubber]. Moscow, IL, 1953, 241 p.
32. Hariharaputhiran H., Saravanan U. A new set of biaxial and uniaxial experiments on vulcanized rubber and attempts at modeling it using classical hyperelastic models. *Mechanics of Materials*, 2016, vol. 92, pp. 211-222. DOI: 10.1016/j.mechmat.2015.09.003
33. Boyce M.C., Weber G.G. and Parks D.M. On the kinematics of finite strain plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1989, vol. 37, no. 5, pp. 647-665.
34. Lee E.H. Elastic plastic deformation at finite strain. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1969, vol. 36, pp. 1-6.
35. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Niashin Iu.I. Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriia, algoritmy, prilozheniia [Large elastic-plastic deformations: theory, algorithms, applications]. Moscow, Nauka, 1986, 232 p.
36. Bruhns O.T. The Multiplicative Decomposition of the Deformation Gradient in Plasticity – Origin and Limitations. *Advanced Structured Materials*. 2015, vol. 64, pp. 37-66. DOI 10.1007/978-3-319-19440-0
37. Boyce M.C., Parks D.M., Argon A.S. Large inelastic deformation of glassy polymers. part 1: rate dependent constitutive model. *Mechanics of Materials*, 1988, vol. 7, pp. 15-33.
38. Gurtin M.E., Anand L. The decomposition $\mathbf{F}=\mathbf{F}^e\mathbf{F}^p$, material symmetry, and plastic irrotationality for solids that are isotropic-viscoplastic or amorphous. *International Journal of Plasticity*, 2005, vol. 21, pp. 1686-1719.
39. Dashne P.A. Invariance Considerations in Large Strain Elasto-Plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, vol. 53, pp. 55-60.
40. Trusdell K. Pervonachal'nyi kurs ratsional'noi mekhaniki sploshnykh sred [The initial course of rational continuum mechanics]. Moscow, Mir, 1975, 592 p.
41. Lur'e A.I. Nelineinaia teoriia uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 512 p.
42. Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 602 p.
43. Medvedev B.V. Nachala teoreticheskoi fiziki [The beginnings of theoretical physics]. Moscow, Nauka, 1977, 496 p.
44. Korneev S.A. Printsip ob"ektivnosti i tekhnika ego primeneniia pri postroenii opredel'aiushchikh sootnoshenii s tochnost'iu do skaliarnykh koeffitsientov [The principle of objectivity and the technique of its use in the construction of the defining relations with an accuracy of scalar coefficients]. Perm', Perm. gos. tekhn. un-t, Matemat. modelir. sistem i protsessov: Mezhd. sb. nauch. tr., 2007, no. 15, pp. 97-122.
45. Reina C., Schlömerkemper A., Conti S. Derivation of $\mathbf{F}=\mathbf{F}^e\mathbf{F}^p$ as the continuum limit of crystalline slip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, vol. 89, pp. 231-254.
46. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. Plasticity of materials with proportional and nonproportional cyclic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 3, pp. 53-74. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.04
47. Astarita Dzh., Marruchchi Dzh. Основы гидромеханики не'ютоновских жидкостей [Fundamentals of non-Newtonian fluid mechanics]. Moscow, Mir, 1978, 309 p.
48. Litvinov V.G. Dvizhenie nelineino-viazkoi zhidkosti [Nonlinear viscous fluid motion]. Moscow, Nauka, 1982, 376 p.
49. Serrin Dzh. Matematicheskie osnovy klassicheskoi mekhaniki zhidkosti [Mathematical foundations of classical fluid mechanics]. Moscow, IL, 1963, 256 p.
50. Kachanov L.M. Основы теории пластичности [Basics of plasticity theory], Moscow, Nauka, 1969, 420 p.
51. Ishlinskii A.Iu., Ivlev D.D. Matematicheskaiia teoriia plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]. Moscow Fizmatlit, 2001, 704 p.
52. Novozhilov V.V., Kadashevich Iu.I. Mikronapriazheniia v konstruktsionnykh materialakh [Microstresses in construction materials]. Leningrad, Mashinostroenie, 1990, 223 p.
53. Kachanov L.M. Teoriia polzuchesti [Creep theory]. Moscow, GIFML, 1960, 455 p.
54. Malinin N.N. Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. – 400 p.