



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16

УДК 539.37

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СДВИГЕ. УПРОЩЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

С.С. Куреннов, К.П. Барахов

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский Авиационный Институт», Харьков, Украина

О СТАТЬЕ

Получена: 11 марта 2019 г.

Принята: 28 августа 2019 г.

Опубликована: 17 октября 2019 г.

Ключевые слова:

клеевое соединение, двумерная модель, аналитическое решение, разделение переменных, прямоугольная пластина.

АННОТАЦИЯ

Исследованию напряженного состояния клеевых соединений уделяется значительное внимание, ибо несущая способность конструкции, как правило, определяется прочностью соединений, где напряженное состояние нерегулярно. Большинство существующих математических моделей соединений являются одномерными, т.е. подразумевают равномерное распределение напряжений по ширине соединения. Однако существуют конструкции, для которых классические модели неприменимы. Для расчета напряженного состояния таких соединений необходимо учитывать неравномерность напряжений не только по длине, но и по ширине соединения. Для решения таких задач предложена упрощенная двумерная модель нахлесточного клеевого соединения прямоугольных пластинок. Упрощение состоит в том, что рассматриваются перемещения слоев только вдоль одной из осей координат. Модель является двумерным обобщением классической модели соединения Фолькерсена. Напряжения полагаются распределенными равномерно по толщине слоев, а клеевой слой работает только на сдвиг. Данные упрощения позволили получить аналитическое решение задачи. Решена задача о напряженном состоянии клеевого соединения двух прямоугольных пластин, одна из которых жестко закреплена вдоль одной из сторон, а вторая пластина нагружена неравномерной сдвиговой нагрузкой на противоположной стороне. Задача сведена к системе дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных относительно продольных перемещений двух несущих (внешних) слоев. Решение строится при помощи метода разделения переменных и представляет собой функциональный ряд, состоящий из собственных функций. Краевые условия на ненагруженных торцах удовлетворяются точно. Удовлетворение краевых условий на боковых сторонах приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов функционального ряда. Доказана сходимости полученного решения. Решена модельная задача, и проведено сравнение численных результатов с результатами расчетов, выполненных при помощи метода конечных элементов. Показано, что предложенный подход обладает точностью, достаточной для задач проектирования.

© ПНИПУ

© Куреннов Сергей Сергеевич – д.т.н., доц., e-mail: kurennov.ss@gmail.com, [iD: 0000-0002-3835-3288](https://orcid.org/0000-0002-3835-3288).

Барахов Константин Петрович – ст. преп., e-mail: kpbarakhov@gmail.com, [iD: 0000-0003-1714-7917](https://orcid.org/0000-0003-1714-7917).

Sergei S. Kurennov – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: kurennov.ss@gmail.com,

[iD: 0000-0002-3835-3288](https://orcid.org/0000-0002-3835-3288).

Konstantin P. Barakhov – Senior Lecturer, e-mail: kpbarakhov@gmail.com, [iD: 0000-0003-1714-7917](https://orcid.org/0000-0003-1714-7917).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE STRESSED STATE OF THE DOUBLE-LAYER RECTANGULAR PLATE UNDER SHIFT. THE SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL

S.S. Kurennov, K.P. Barakhov

National Aerospace University – “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkov, Ukraine

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019
Accepted: 28 August 2019
Published: 17 October 2019

Keywords:

glued joint, bidirectional model, analytical solution, separation of variables, rectangular plate.

ABSTRACT

A considerable attention is given to studying the stressed state of adhesive joints due to the structure's bearing capacity, which is usually determined by the strength of the connections, where the stressed state is irregular. Most of the existing mathematical models of joints are one-dimensional, i.e. they imply an even distribution of stresses across the width of joints. However, there are constructions for which the classical models are not applicable. In order to calculate the stressed state of such joints it's necessary to take into consideration the irregularity of stresses not only in length but also in width of joints. To solve such problems, a simplified two-dimensional model of the overlapping adhesive joint of the rectangular plates is proposed. The simplification consists in the fact that the displacements of the layers are considered only along one of the axes. The model is actually a two-dimensional generalization of the Volkersen classical connection model. The stresses are considered even distributed over the layer thickness and the adhesive layer works only on a shift. These simplifications allowed us to obtain an analytical solution to the studied problem. The problem of the stressed state of the adhesive jointing of the two rectangular plates is solved, one of which is rigidly fixed along one side, and the second one is loaded with an uneven shear load on the opposite side. The problem is reduced to a system of second-order differential equations in partial derivatives with respect to longitudinal displacements of the two carrier (outer) layers. The solution is constructed using the method of separating the variables, in the form of a functional series consisting of the Eigen functions of the spectral problem. The boundary conditions at the unloaded ends are accurately satisfied. The satisfaction of the boundary conditions on the sides leads to a system of linear equations for the unknown coefficients of the functional series. The convergence of the obtained solution is proved. The model problem is solved and the numerical results are compared with the results of the calculations performed using the finite element method. It is shown that the proposed approach has a sufficient accuracy for engineering tasks.

© PNRPU

Введение

Большинство математических моделей клеевых соединений внахлест, позволяющих описать напряженно-деформированное состояние соединения в аналитической форме, являются одномерными [1–5]. Другими словами, предполагают равномерное распределение напряжений по ширине соединения и априорно заданное распределение напряжений по толщине клеевого слоя и соединяемых слоев (как правило, равномерное или линейное). Данный подход успешно применяется для моделирования напряженного состояния двухсрезных клеевых соединений [6, 7]. Наличие симметричных накладок с двух сторон соединения позволяет уменьшить влияние изгибающих моментов в соединяемых слоях на напряженное состояние клеевого слоя.

Одним из направлений развития и уточнения математических моделей соединений является изучение распределения напряжений по толщине соединения, т.е. создание двумерных моделей соединения внахлест [8–13]. При этом распределение напряжений по ширине соединения полагается равномерным. Однако при расчете напряженного состояния некоторых конструкций, например соединений силовых элементов или ремонтных накладок с обшивкой, необходимо учитывать неравномерность напряженно-деформированного состоя-

ния склеиваемых пластин не только по длине, но и по ширине соединения. Как правило, для исследования двумерного напряженного состояния соединений используются различные численные методы, такие как метод конечных элементов или метод конечных разностей [14–20]. Аналитическое решение задачи о напряженном состоянии соединения в общей двумерной (в плоскости склейки) постановке пока не известно. В связи с этим для решения задач предложено две упрощенные модели, которые позволяют получить решение задачи в аналитической форме:

1) для изучения влияния на напряженное состояние соединения поперечных деформаций, обусловленных коэффициентами Пуассона соединяемых пластин, касательные напряжения в них полагаются равными нулю [21–24]. Приложенная к соединению нагрузка в этом случае полагается равномерно распределенной вдоль боковых сторон пластинок, а соединяемые пластины полагаются абсолютно податливыми на сдвиг;

2) для решения задачи о напряженном состоянии соединения при неравномерной нагрузке перемещения несущих слоев в плоскости соединения в поперечном направлении полагается равными нулю, т.е. соединяемые пластины полагается абсолютно жесткими в направлении, поперечном приложенной продольной нагрузке [25].

Гипотеза об отсутствии поперечных перемещений ранее была использована при решении ряда задач для прямоугольных пластин и клеевых соединений (двумерная по толщине модель соединения) [9, 26]. В рамках этой модели также получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии клевого соединения пластинок разной ширины [27]. В перечисленных выше работах [25, 27] упрощенная двумерная математическая модель клевого соединения была использована для описания напряженного состояния соединения, вызванного продольной нормальной нагрузкой (растяжение-сжатие). Однако клееные конструкции также могут быть нагружены касательными напряжениями в плоскости соединения [28–31]. Примерами таких конструкций являются соединения полок балок со стенкой балки, соединения панелей обшивки фюзеляжа или крыла самолета и т.д.

Целью данной работы является построение аналитического решения и исследование напряженного состояния клевого соединения внахлест прямоугольных пластин, нагруженных касательной нагрузкой. Данная задача в двумерной постановке решается впервые.

1. Постановка задачи

Рассмотрим клевое соединение двух прямоугольных пластин ($a \times b$), показанное на рис. 1. К противоположным боковым сторонам $y=0$ и $y=b$ приложена сдвиговая нагрузка. Торцы $x=0$ и $x=a$ свободны от нагрузки. Обозначим толщины первого и второго несущих слоев δ_1 и δ_2 соответственно. Толщину соединительного слоя обозначим δ_0 . Считаем, что несущие слои деформируются только в плоскости соединения (плоскости xOy), клеевой слой работает только на сдвиг, и напряжения равномерно распределены по толщине слоев.

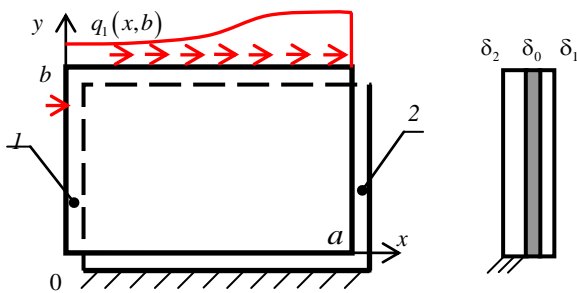


Рис. 1. Схема клевого соединения

Fig. 1. A scheme of the glued joint

Полагаем, что $a > b$, и изгибом пластин в плоскости соединения можно пренебречь. Поскольку поперечные (в направлении оси y) перемещения несущих слоев считаем равными нулю, усилия в поперечном направлении и соответствующие касательные напряжения в кле

также будут равны нулю. Уравнения равновесия элементов несущих слоев в данном случае имеют вид [16, 25]

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где N_k , q_k – нормальные (в продольном направлении) и касательные усилия в несущем в слое k , $k = 1, 2$; τ – касательные напряжения в клевом слое в продольном направлении.

Соотношения Коши при условии равенства нулю поперечных перемещений имеют вид

$$N_k = \delta_k E_k \frac{\partial U_k}{\partial x}, \quad q_k = \delta_k G_k \frac{\partial U_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где U_k – продольные перемещения слоя k .

Напряжения в клеевой прослойке полагаем пропорциональными разности перемещений слоев:

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2 - U_1), \quad (3)$$

где G_0 – модуль сдвига клевого слоя.

Подставив приведенные выше соотношения в уравнения (1), получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0, \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\alpha_k = \frac{E_k \delta_k \delta_0}{G_0}$; $\mu_k = \sqrt{\frac{G_k}{E_k}}$; $k = 1, 2$.

Краевые условия на торцах имеют вид $q_k(0, y) = q_k(a, y) = 0$, т.е. с учетом (2)

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_k}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0. \quad (5)$$

На боковых сторонах заданы либо перемещения

$$U_k \Big|_{y=0} = v_k^{(1)}(x); \quad U_k \Big|_{y=b} = v_k^{(2)}(x), \quad (6)$$

либо касательные усилия

$$\begin{aligned} q_k \Big|_{y=0} &= G_k \delta_k \frac{\partial U_k}{\partial y} \Big|_{x=0} = Q_k^{(1)}(x); \\ q_k \Big|_{y=b} &= G_k \delta_k \frac{\partial U_k}{\partial y} \Big|_{x=a} = Q_k^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (7)$$

2. Построение решения

Из первого уравнения системы (3) следует, что

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (8)$$

Подставив (8) во второе уравнение системы (4), найдем

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \gamma_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \gamma_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (9)$$

где $\beta_2 = \alpha_1 \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 \alpha_2 (\mu_1^2 + \mu_2^2)$, $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2 \mu_1^2 \mu_2^2$, $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_2 \mu_2^2$.

Обозначим

$$\Phi = \gamma_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \quad (10)$$

и определим, при каких значениях коэффициентов c_1 и c_2 уравнение

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \Phi = 0 \quad (11)$$

эквивалентно уравнению (9). Подставим (10) в (11) и приравняем коэффициенты при производных в полученном уравнении коэффициентам уравнения (10), получим зависимости $c_1^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $c_2^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu_1^2 \mu_2^2}{\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_2 \mu_2^2}$, а

также $\mu_1 = \mu_2 \left(\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2} \right)$. Последнее условие, очевидно,

ограничивает область применения предлагаемого метода решения. Однако если соединяемые материалы одинаковы (что характерно для сэндвич-панелей и ремонтных накладок) или же обладают близкими коэффициентами Пуассона, то предложенный подход оправдан. Обозначим $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. В таком случае получим $c_2 = \mu c_1$. Выражение (10) можно представить в виде

$$\Phi = (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (12)$$

Перемещения второго слоя (8) соответственно представим в виде

$$U_2 = U_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \Phi. \quad (13)$$

Учитывая краевые условия (5), из соотношения (12) следует

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (11) решим методом разделения переменных. Частные решения уравнения будем искать в виде $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$. После подстановки в уравнение (11) и удовлетворения граничных условий (14) получим

$$\frac{c_1^2 X''}{X} = -\frac{c_2^2 Y''}{Y} - Y,$$

$$X'(0) = 0; \quad X'(a) = 0.$$

Поскольку обе части равенства зависят от разных переменных, то полученное равенство возможно только в случае, когда обе его части постоянны:

$$\frac{c_1^2 X''}{X} = -\frac{c_2^2 Y''}{Y} = -\lambda^2. \quad (15)$$

В результате получим спектральную задачу

$$\begin{cases} X'' + \frac{\lambda^2}{c_1^2} X = 0, \\ X'(0) = 0; \quad X'(a) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Система собственных функций данной задачи будет иметь вид

$$X_n(x) = \cos \frac{\lambda_n x}{c_1}, \quad \text{где } \lambda_n = \frac{\pi n c_1}{a} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Из второй части равенства (15), учитывая, что $\lambda = \lambda_n$, получим уравнение $Y_n'' - \frac{(1 + \lambda_n^2)}{c_2^2} Y_n = 0$, решением которого является семейство функций

$$Y_n(y) = A_n \cosh \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda_n^2}}{c_2} y \right) + B_n \cosh \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda_n^2}}{c_2} (y - b) \right).$$

Следовательно, общее решение уравнения (11) можно представить в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y - b)) \right] \cos \frac{\pi n x}{a}, \quad (17)$$

где $\xi_n = \frac{\sqrt{1 + \lambda_n^2}}{c_2}$; A_n, B_n – семейства произвольных коэффициентов.

На следующем этапе построения решения необходимо найти общее решение уравнения (12). Решение будем искать в виде линейной суперпозиции решений V и W :

$$U_1 = V + W, \quad (18)$$

где V является общим решением однородного уравнения (12) с однородными граничными условиями (5),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (19)$$

Функция W представляет собой частное решение неоднородного уравнения (12), соответствующее заданной функции $\Phi(x, y)$ (17).

Решение уравнения (19) также будем искать методом разделения переменных. Искомую функцию представим в виде произведения $V(x; y) = X(x)Y(y)$. Операция разделения переменных приводит к уравнениям

$$X'' + \Lambda^2 X = 0, \quad Y'' - \frac{\Lambda^2}{\mu^2} Y = 0, \quad (20)$$

где $-\Lambda^2$ ($\Lambda \geq 0$) – параметр разделения переменных. Общее решение первого уравнения (20) при условии $\Lambda > 0$ имеет вид

$$X(x) = C_3 \sin \Lambda x + C_4 \cos \Lambda x.$$

Функция $X(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (5) и не равна нулю тождественно только при $\Lambda_n = \pi n a^{-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Таким образом, получим $X(x) = \cos(\pi a^{-1} n x)$.

Решение второго уравнения (18) при $\Lambda = \Lambda_n$ будет иметь вид

$$Y_n(y) = C_n \cosh(\Lambda_n \mu^{-1} y) + D_n \cosh(\Lambda_n \mu^{-1} (y - b)).$$

Если же параметр разделения переменных Λ равен нулю, то общие решения уравнений (19) представляют собой линейные функции от координат x и y . Однородные краевые условия (5) в этом случае будут удовлетворены, если $X(x) = \text{const}$. Следовательно, решение уравнения (18), которое удовлетворяет краевым условиям (5), можно записать в виде

$$V = C_0 y + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh(\chi_n y) + D_n \cosh(\chi_n (y - b))) \cos \frac{\pi n x}{a},$$

где $\chi_n = \frac{\pi n}{\mu a}$; C_n, D_n – семейства произвольных коэффициентов.

Функция Φ в уравнении (12) имеет вид (17), после некоторых преобразований частное решение (12) можно представить в виде

$$W = \frac{c_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{a} x \times [A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y - b))].$$

На основании (12) и (17) получим

$$U_k = C_0 y + D_0 + d_k (A_0 \cosh(\xi_0 y) + B_0 \cosh(\xi_0 (y - b))) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} [C_n \cosh(\chi_n y) + D_n \cosh(\chi_n (y - b))] + d_k (A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y - b))), \quad (21)$$

$$\text{где } k = 1, 2; \quad d_1 = \frac{c_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad d_2 = \frac{c_1^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Касательные усилия в несущих слоях (2) имеют вид

$$q_k = \delta_k G_k [C_0 + d_k \xi_0 (A_0 \sinh(\xi_0 y) + B_0 \sinh(\xi_0 (y - b)))] + \delta_k G_k \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} [\chi_n (C_n \sinh(\chi_n y) + D_n \sinh(\chi_n (y - b))) + d_k \xi_n (A_n \sinh(\xi_n y) + B_n \sinh(\xi_n (y - b)))] \quad (22)$$

Краевые условия (7) разложим в ряд Фурье по собственным функциям задачи (16) на интервале $(0; a)$, получим

$$Q_1(x, 0) = 0, \quad Q_1(x, b) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{a},$$

$$U_2(x, 0) = 0, \quad Q_2(x, b) = 0, \quad (23)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2}{a} \int_0^a Q_k^{(2)}(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a Q_k^{(2)}(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx.$$

Удовлетворив краевым условиям (7), получим системы линейных уравнений относительно коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n :

$$\begin{cases} C_0 - d_1 \xi_0 B_0 \sinh(\xi_0 b) = 0, \\ C_0 + d_1 \xi_0 A_0 \sinh(\xi_0 b) = \frac{a_0}{2 \delta_1 G_1}, \\ D_0 + d_2 (A_0 + B_0 \cosh(\xi_0 b)) = 0, \\ C_0 + d_2 \xi_0 A_0 \sinh(\xi_0 b) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \chi_n D_n \sinh(\chi_n b) + d_1 \xi_n B_n \sinh(\xi_n b) = 0, \\ \chi_n C_n \sinh(\chi_n b) + d_1 \xi_n A_n \sinh(\xi_n b) = \frac{a_n}{\delta_1 G_1}, \\ C_n + D_n \cosh(\chi_n b) + d_2 (A_n + B_n \cosh(\xi_n b)) = 0, \\ \chi_n C_n \sinh(\chi_n b) + d_2 \xi_n A_n \sinh(\xi_n b) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Решения систем (24) и (25) запишем в виде

$$A_0 = -\frac{1}{2} \frac{a_0}{\xi_0 \delta_1 G_1 (d_2 - d_1) \sinh(\xi_0 b)};$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \frac{d_2}{d_1} \frac{a_0}{\xi_0 \delta_1 G_1 (d_2 - d_1) \sinh(\xi_0 b)};$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \frac{a_0 d_2}{\delta_1 G_1 (d_2 - d_1)};$$

$$D_0 = -\frac{1}{2} \frac{d_2}{d_1} \frac{a_0 (d_2 \cosh(\xi_0 b) - d_1)}{\xi_0 \delta_1 G_1 (d_2 - d_1) \sinh(\xi_0 b)}.$$

$$A_n = \frac{a_n}{\xi_n \delta_1 G_1 (d_1 - d_2) \sinh(\xi_n b)};$$

$$C_n = -\frac{a_n \xi_n d_2}{\chi_n \delta_1 G_1 (d_1 - d_2) \sinh(\chi_n b)};$$

$$B_n = \frac{d_1 d_2 a_n (\xi_n \delta_1 G_1 (d_1 - d_2))^{-1}}{d_2 \chi_n \sinh(\chi_n b) \cosh(\xi_n b) - d_1 \xi_n \sinh(\xi_n b) \cosh(\chi_n b)};$$

$$D_n = \frac{d_2 a_n \sinh(\chi_n b) (\delta_1 G_1 (d_1 - d_2) \sinh(\xi_n b))^{-1}}{d_1 \xi_n \sinh(\xi_n b) \cosh(\chi_n b) - d_2 \chi_n \sinh(\chi_n b) \cosh(\xi_n b)}.$$

Из приведенных формул следует, что A_n, B_n, C_n, D_n :

: $\frac{H[a_n]}{nR(\xi_n; \chi_n)}$, где $H[a_n]$ – некоторые линейные выра-

жения с постоянными коэффициентами, зависящие от a_n (22), а $R(\xi_n; \chi_n) = \{\sinh(\xi_n b); \sinh(\chi_n b)\}$. Следова-

тельно $A_n, B_n, C_n, D_n \sim \frac{1}{n^s R(\xi_n; \chi_n)}$, где $s \geq 2$. Таким

образом, гиперболические функции $\frac{\cosh(\chi_n y)}{\sinh(\chi_n b)}$,

$\frac{\cosh(\chi_n (y-h))}{\sinh(\chi_n b)}$, $\frac{\cosh(\xi_n y)}{\sinh(\xi_n b)}$ и т.д. на интервале

$y \in (0; h)$ ограничены и экспоненциально стремятся к нулю с ростом n . Учитывая сказанное выше, можно сделать вывод, что внутри рассматриваемой области ряды Фурье (20) дважды дифференцируемы и удовлетворяют уравнениям (4). А ряды (21) и (22) на отрезке $y \in [0; h]$ сходятся равномерно.

Касательные напряжения в клее (3) можно представить в виде

$$\tau = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{G_0}{\delta_0} \left[A_0 \cosh(\xi_0 y) + B_0 \cosh(\xi_0 (y-b)) \right] -$$

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{G_0}{\delta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} \times$$

$$\times \left[A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y-b)) \right].$$

Можно отметить, что в данной формуле слагаемые, стоящие вне знака суммы, представляют собой известное одномерное решение [30] и описывают напряжения

в клеевом слое при равномерной касательной нагрузке. При этом слагаемые, стоящие под знаком суммы, описывают напряжения в клее, вызванные самоуравновешенной нагрузкой, поскольку $\int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} dx = 0$ при

$n = 1, 2, 3, \dots$. Можно показать, что в глубине области, при удалении от краев $y = 0$ и $y = b$, слагаемые, стоящие под знаком суммы экспоненциально убывают, что совпадает с принципом Сен-Венана. То есть если соединяемые пластины будут достаточно велики, то на удалении от края напряженное состояние соединения будет мало зависеть от конкретного распределения нагрузки по краю и будет определяться лишь суммарной

величиной нагрузки $a_0 = \frac{2}{a} \int_0^a Q_k^{(2)}(x) dx$.

3. Численный пример

Рассмотрим клеевое соединение двух алюминиевых пластинок, имеющих размеры $a = 6$ см, $b = 2$ см, $\delta_1 = 3$ мм, $\delta_2 = 2$ мм. Толщина клеевой прослойки $\delta_0 = 0,1$ мм. Упругие характеристики материалов соединения $E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 27$ ГПа, $G_0 = 0,5$ ГПа. Зададим следующие краевые условия на боковых сторонах склеенных пластин:

$$q_1(x, b) = F(x), \quad q_1(x, 0) = q_2(x, b) = 0; \quad U_2(x, 0) = 0,$$

где

$$F(x) = \begin{cases} F_0, & x \in \left(\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}\right), \\ 0, & x \in \left(0; \frac{a}{3}\right) \cup \left(\frac{2a}{3}; a\right). \end{cases}$$

График касательных напряжений в клее приведен на рис. 2. Напряжения на рисунке показаны в безразмерном виде как отношение действующих напряжений τ к гипотетическим напряжениям τ_0 , которые возникли бы при равномерном распределении нагрузки по всей плоскости клеевого шва, т.е. как отношение τ к напряжениям $\tau_0 = F_0 \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{ab} = \frac{F_0}{3b}$.

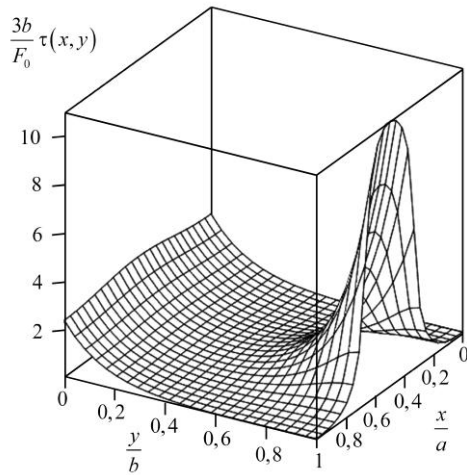


Рис. 2. Касательные напряжения в клеевом слое

Fig. 2. Shear stresses in the adhesive layer

Для верификации предложенной методики проведен расчет напряженного состояния соединения при помощи метода конечных элементов (МКЭ) в пакете COMSOL Multiphysics 5.3. Для расчета использована трехмерная модель, генерация сетки автоматическая, характерный размер элемента 0,03 мм.

На рис. 3 приведены графики касательных напряжений в середине толщины клевого слоя вдоль оси симметрии соединения ($x = a/2$), вычисленные при помощи предложенной методики (а), и МКЭ (б).

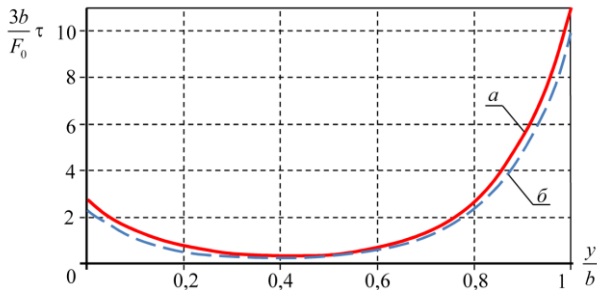


Рис. 3. Касательные напряжения в кле вдоль прямой $x = L/2$: а – расчет по предложенной методике; б – МКЭ

Fig. 3. Shear stresses in the adhesive layer along the line $x = L/2$: а – calculation by the proposed method; б – FEM

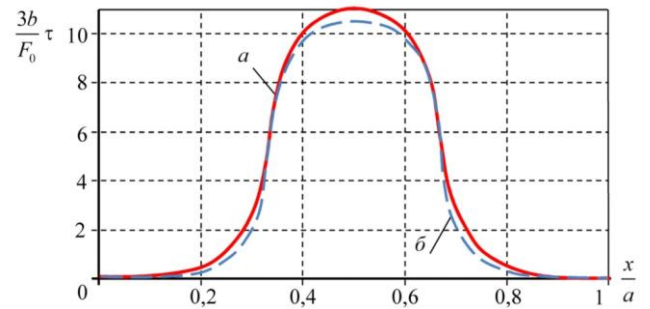


Рис. 4. Касательные напряжения в кле вдоль прямой $y = h$: а – расчет по предложенной методике; б – МКЭ

Fig. 4. Shear stresses in the adhesive layer along the line $y = h$: а – calculation by the proposed method; б – FEM

На рис. 4 приведены графики касательных напряжений в срединной плоскости клевого слоя вдоль края $y = b$, вычисленные при помощи предложенной методики (а), и МКЭ (б).

Из графиков видно, что касательные напряжения в кле, вычисленные по предложенной модели, несколько превосходят напряжения, вычисленные при помощи МКЭ. Расчет напряженного состояния данного соединения при помощи МКЭ также показал, что касательные напряжения в кле в поперечном направлении, которые обусловлены поперечными перемещениями слоев и которые в предложенной модели не учитываются, не превосходят 9 % от максимальных касательных напряжений в продольном направлении.

Заключение

Предложена упрощенная модель клевого соединения, которая позволяет находить напряженное состояние соединения при произвольном нагружении соединяемых пластин касательными усилиями на боковых сторонах. Получено аналитическое решение задачи и обоснована его сходимости. Решена модельная задача.

Расчеты показали, что точность предложенной приближенной методики достаточна для решения многих инженерных задач. Данный подход может быть использован для построения аналитических решений задач о напряженном состоянии клеевых соединений деталей разной ширины; соединений силовых элементов конструкции с обшивкой; соединений, которые имеют дефекты в клеивом слое; соединений ремонтных накладок с обшивкой и других задач, где требуется знать двумерное напряженное состояние клеивого соединения.

Список литературы

1. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey / L.F.M. da Silva, P.J.C. das Neves, R.D. Adams, J.K. Spelt // Int. J. Adhes. Adhesiv. – 2009. – Vol. 29. – P. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005

2. Семин М.И. Расчеты соединений элементов конструкций из полимерных материалов на прочность и долговечность: монография. – М.: Изд-во МАДИ, 2016. – 62 с.
3. Wang J., Zhang C. Three-parameter elastic foundation

model for analysis of adhesively bonded joints // *Int. J. Adhes. & Adhes.* – 2009. – Vol. 29. – P. 495–502. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.10.002

4. Amidi S., Wang J. Three-parameter viscoelastic foundation model of adhesively bonded single-lap joints with functionally graded adherends // *Engineering Structures.* – 2018. – Vol. 170. – P. 118–134. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.076

5. Артюхин Ю.П. Напряжения в клеевых соединениях // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. – № 10. – С. 3–27.

6. Tsai M.Y., Morton J. An Investigation into the Stresses in Double-Lap Adhesive Joints with Laminated Composite Adherends // *Int. J. Solids Struct.* – 2010. – Vol. 47. – P. 3317–3325. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.08.011

7. Gustafson P.A., Bizard A., Waas A.M. Dimensionless Parameters in Symmetric Double Lap Joints: An Orthotropic Solution for Thermomechanical Loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – Vol. 44. – P. 5774–5795. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.01.025

8. Исследование напряженного состояния в составной пластинке вблизи края линии соединения в зависимости от толщины и материальных параметров соединяющей прослойки / В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик, Е.А. Полянина // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 1. – С. 153–166.

9. Васильев В.В., Боков Ю.В. Исследования напряженного состояния клеевого соединения композиционного материала с металлическим листом // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: Изд-во ЦАГИ, 1979. – Вып. 7. – С. 4–10.

10. Liu J., Sawa T. Stress analysis and strength evaluation of single-lap band adhesive joints subjected to external bending moments // *J. Adhesion Science.* – 1999. – Vol. 13. – No. 6. – P. 729–749. DOI: 10.1163/156856199X00965

11. Короткова С.Е. Механика клеевых соединений. – Алчевск, 1998. – 187 с.

12. Кутыинов В.Ф. Расчет клеевых соединений // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: Изд-во ЦАГИ, 1979. – Вып. 7. – С. 14–30.

13. Kurennov S.S., Koshevoi A.G., Polyakov A.G. Through-Thickness Stress Distribution in the Adhesive Joint for the Multilayer Composite Material // *Russian Aeronautics (Iz. VUZ)* – 2015. – Vol. 58. – No. 2. – P. 145–151. DOI: 10.3103/S1068799815020026

14. Рябенков Н.Г., Артюхин Ю.П. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – № 16. – С. 82–90.

15. Andruet R.H., Dillard D.A., Holzer S.M. Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints // *International Journal of Adhesion & Adhesives.* – 2001. – Vol. 21. – P. 17–34. DOI: 10.1016/S0143-7496(00)00024-5

16. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // *Archives of Civil and Mechanical Engineering.* – 2015. – Vol. 15. – Iss. 2. – P. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004

17. Analysis method for bonded patch repair of a skin with a

cutout / Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D.R. // *Composite Structures.* – 2002. – Vol. 55. – Iss. 88. – P. 277–294. DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00158-1.

18. Федотов А.А., Ципенко А.В., Лебедев А.И. Численное моделирование клеевого ремонтного соединения // Научный вестник МГТУ ГА. – 2018. – Т. 21(3). – С. 125–138. DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138

19. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2013. – 272 с.

20. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels / Chukwujekwu Okafor, N. Singh, U.E. Enemuoh, S.V. Rao // *Composite Structures.* – 2005. – Vol. 71. – P. 258–270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023

21. Adams R.D., Peppiat N.A. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design.* – 1973. – Vol. 8. – No. 2. – P. 134–139.

22. Mathias J.D., Grédiac M., Balandraud X. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2006. – Vol. 43. – P. 6921–6947. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.02.016

23. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model / R. Kessentini, O. Klinkova, I. Tawfiq, M. Haddar // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2019. – Vol. 150. – P. 188–201. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004

24. Kurennov S.S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution // *Mechanics of Composite Materials.* – 2014. – Vol. 50 – No. 1. – P. 105–114. DOI: 10.1007/s11029-014-9397-z

25. Kurennov S.S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // *Mechanics of Composite Materials.* September. – 2015. – Vol. 51. – Iss. 4. – P. 479–488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2

26. Васильев В.В., Лурье С.А. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 4. – С. 40–49.

27. Куреннов С.С., Танчик Е.В. Расчет напряженного состояния клеевого соединения прямоугольных пластинок разной ширины // Вестн. Моск. авиац. ин-та. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 162–169.

28. Kim H., Kedward K. Stress analysis of in-plane shear loaded adhesively bonded composite joints and assemblies // Office of Aviation Research. – Washington, DC, Report No. DOT/FAA/AR017; 2001.

29. Kim H., Kedward K.T. Stress analysis of adhesively bonded joints under in-plane shear loading // *The Journal of Adhesion.* – 2001. – Vol. 76(1). – P. 1–36. DOI: 10.1080/00218460108029615

30. Карпов Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов: учебник. – Харьков: Изд-во Нац. аэрокосм. ун-та «Харьковский авиационный ин-т», 2010. – 768 с.

31. Uslu Uysal M., Güven U. A bonded plate having orthotropic inclusion in the adhesive layer under in-plane shear loading // *The Journal of Adhesion.* – 2015. – Vol. 92(3). – P. 214–235. DOI: 10.1080/00218464.2015.1019064

References

1. da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K.

Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature

- survey. *Int. J. Adhes. Adhesiv*, 2009, vol. 29, pp. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005
2. Semin M.I. Raschetiy soedineniy elementov konstruksiy iz polimernykh materialov na prochnost i dolgovechnost: monografiya. [Calculations of compounds of structural elements of polymeric materials for strength and durability: monograph]. *Moscow, MADI*, 2016, 62 p.
 3. Wang J., Zhang C. Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints. *Int. J. Adhes. & Adhes*, 2009, vol. 29, pp.495-502. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.10.002
 4. Amidi S., Wang J. Three-parameter viscoelastic foundation model of adhesively bonded single-lap joints with functionally graded adherends. *Engineering Structures*, 2018, vol.170, pp. 118-134. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.076
 5. Artyuhin Yu. P. Napryazheniya v kleevykh soedineniyakh [Stresses in adhesive joints]. *Issled. po teor. plastin i obolochek, Izd-vo Kazanskogo un-ta, Kazan*, 1973, vol.10, pp. 3-27.
 6. Tsai, M. Y.; Morton, J. An Investigation into the Stresses in Double-Lap Adhesive Joints with Laminated Composite Adherends. *Int. J. Solids Struct*, 2010, vol. 47, pp. 3317-3325. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.08.011
 7. Gustafson, P. A.; Bizard, A.; Waas, A. M. Dimensionless Parameters in Symmetric Double Lap Joints: An Orthotropic Solution for Thermomechanical Loading. *Int. J. Solids Struct*, 2007, vol. 44, pp. 5774-5795. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.01.025
 8. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Polyamina E.A. Study of the stress state in composite plate near the connecting line edge depending on the thickness and material parameters of the connecting interlayer. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014, no. 1, pp. 153-166.
 9. Vasil'ev V.V., Bokov Ju.V. Issledovaniya naprjazhennogo sostojaniya kleevogo soedineniya kompozitsionnogo materiala s metallicheskim listom [Studies of the stress state of adhesive bonding of a composite material with a metal sheet]. *Proektirovanie, raschet i ispytaniya konstrukcij iz kompozitsionnykh materialov. Moscow, CAGI*, -1979, vol. 7, pp. 4-10.
 10. Liu J., Sawa T. Stress analysis and strength evaluation of single-lap band adhesive joints subjected to external bending moments. *J. Adhesion Science*, 1999, vol. 13, no. 6, pp. 729-749. DOI: 10.1163/156856199X000965
 11. Korotkova S.E. Mehanika kleevykh soedinenij [Mechanics of adhesive joints]. *Alchevsk, ISMO, DGMI*, 1998, 187 p.
 12. Kut'nov V.F. Raschet kleevykh soedinenij [Calculation of adhesive joints] // *Proektirovanie, raschet i ispytaniya konstrukcij iz kompozitsionnykh materialov. Moscow, CAGI*, 1979, vol. 7, pp. 14-30.
 13. Kurennov S.S. Koshevoi A.G., Polyakov A.G. Through-Thickness Stress Distribution in the Adhesive Joint for the Multi-layer Composite Material. *Russian Aeronautics. Iz. VUZ*, 2015, vol. 58, no.2, pp. 145-151. DOI: 10.3103/S1068799815020026
 14. Rjabenkov N.G., Artjuhina Ju.P. Opredelenie naprjazhenij kleja v soedinenii dveh polubeskonechnykh plastin [Determination of stress in the joint of two semi-infinite plates]. *Issledovanie po teorii plastin i obolochek, Izd-vo Kazanskogo un-ta*, 1981, no. 16, pp. 82-90.
 15. Andruet R.H., Dillard D.A., Holzer S.M. Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 2001, vol. 21, pp. 17-34. DOI: 10.1016/S0143-7496(00)00024-5
 16. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 603-619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004
 17. Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D.R. Analytical method for bonded patch repair of a skin with a cutout. *Composite Structures*, 2002, iss. 88, vol. 55, pp. 277-294. DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00158-1
 18. Fedotov A.A., Tsipenko A.V., Lebedev A.I. Chislennoe modelirovanie kleevogo remontnogo soedineniya [Numerical simulation of adhesive repair compound]. *Nauchnyy vestnik MGTU GA*, 2018; vol. 21(3), pp. 125-138. DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138.
 19. Grishin V.I., Dzyuba A.S., Dudarkov Yu.I. Prochnost i ustoychivost elementov i soedineniy aviatsionnykh konstruksiy iz kompozitov. [Strength and stability of elements and compounds of aircraft structures made of composites]. *Moscow, Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury*, 2013, 272 p.
 20. Chukwujekwu Okafor, Singh N., Enemuoh U.E., Rao S.V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*, 2005, vol. 71, pp. 258-270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023
 21. Adams R.D., Peppiatt N.A. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1973, vol. 8, no. 2, p. 134-139.
 22. Mathias J.D., Grédiac M., Balandraud X. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches. *Int. J. of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 6921-6947. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.02.016
 23. Kessentini R., Klinkova O., Tawfiq I., Haddar M. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, vol. 150, pp. 188-201. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004
 24. Kurennov S.S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution. *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 105-114. DOI: 10.1007/s11029-014-9397-z
 25. Kurennov S.S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*. 2015, vol. 51, iss. 4, pp. 479-488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2
 26. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. On the solution singularity in the plane elasticity problem for a cantilever strip. *Mechanics of Solid*, 2013. vol. 48. pp. 388-396. DOI: 10.3103/S0025654413040055
 27. Kurennov S.S. Tanchik E.V. Raschet naprjazhennogo sostojaniya kleevogo soedineniya prjamougol'nykh plastinok raznoj shiriny [The calculation of the stress state of adhesive bonding rectangular plates of different widths]. *Vest. Mosk. aviac. in-ta*, 2014, vol. 22, iss. 2, pp. 162-169.
 28. Kim H, Kedward K. Stress analysis of in-plane shear loaded adhesively bonded composite joints and assemblies. Office of aviation research, Washington, DC, Report No. DOT/FAA/AR017; 2001.
 29. Kim H., Kedward K. Stress Analysis of Adhesively-bonded Joints Under In-plane Shear Loading. *The Journal of Adhesion*, 2001, vol, 76(1), pp. 1-36. DOI: 10.1080/00218460108029615
 30. Karpov J.S. Proektirovaniya detalej i agregatov iz kompozitov: uchebnik [Designing parts and assemblies of composites: a textbook]. *Kharkov: Nac. ajerokosm. un-t «Har'kovskij aviac. institut»*, 2010, 768 p.
 31. Uslu Uysal M., Güven U. A Bonded Plate Having Orthotropic Inclusion in the Adhesive Layer under In-Plane Shear Loading. *The Journal of Adhesion*, 2015, vol. 92(3), pp.214-235. DOI: 10.1080/00218464.2015.1019064