



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.03

УДК 539.3

ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

В.Э. Вильдеман, А.И. Мугатаров

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 04 июня 2019 г.
Принята: 02 декабря 2019 г.
Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

закритическое деформирование, разупрочнение, кручение, резерв несущей способности, «жесткое» нагружение.

АННОТАЦИЯ

Разупрочнение материала – это процесс, который начинается после достижения критического напряженного состояния. Данный процесс характеризуется снижением уровня напряжений при растущих деформациях и может развиваться при равновесном накоплении структурных повреждений. Равновесное накопление повреждений в структуре материала возможно при обеспечении заданных перемещений точек границы тела, то есть при «жестком» нагружении, а также при достаточной жесткости нагружающей системы. Конструкция становится неспособной выдерживать нагрузки только тогда, когда зоны с ослабленными связями достаточно развиты. Из этого следует, что учет разупрочнения в расчетах на прочность позволяет более точно определить несущую способность конструкции.

В работе получено аналитическое решение для задачи кручения однородного цилиндрического тела круглого поперечного сечения при его «жестком» нагружении с учетом разупрочнения материала. Рассмотрены кусочно-линейные аппроксимации упругой и упругопластической среды с линейным разупрочнением на закритической стадии деформирования. Приведены эпюры распределения напряжений по сечению; построены графики зависимости максимального значения крутящего момента и экстремального значения относительного угла закручивания сечения от параметров диаграммы деформирования. Определены зависимости крутящего момента от относительного угла поворота сечений для стадии начальной закритической деформации и стадии закритической деформации и разрушения. Построены графики зависимости крутящего момента от угла поворота сечения. Определены резервы несущей способности конструкции. Отмечено, что учет разупрочнения при кручении цилиндрического тела круглого поперечного сечения целесообразен при расчетах на прочность, а также при определении коэффициента запаса системы.

© ПНИПУ

© Вильдеман Валерий Эрвинович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., дир., e-mail: wildemann@pstu.ru, ID: 0000-0002-6240-4022.

Мугатаров Артур Ильдарович – лаб., e-mail: cem_mugatarov@mail.ru, ID: 0000-0002-2229-8181.

Valeriy E. Wildemann – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Director, e-mail: wildemann@pstu.ru, ID: 0000-0002-6240-4022.

Artur I. Mugatarov – Assistant, e-mail: cem_mugatarov@mail.ru, ID: 0000-0002-2229-8181.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE TORSION PROBLEM OF A CYLINDRICAL SOLID TAKING INTO ACCOUNT THE MATERIAL WEAKENING

V.E. Wildemann, A.I. Mugatarov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 June 2018
Accepted: 02 December 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

supercritical deformation, weakening of the material, torsion, load bearing capacity, "hard" loading.

ABSTRACT

The weakening of the material begins reaching a critical level of stress state, is characterized by a decrease in the level of stress during growing deformations and can develop with an equilibrium accumulation of structural damage. The equilibrium accumulation of damage is possible if the given displacements of the boundary points are provided (that is, with "hard" loading) and if the rigidity of the loading system is sufficient. The design becomes unable to withstand the load only when zones with weakened connections are developed enough. Therefore, taking into account the full deformation diagram in the calculations allows to more accurately determine the load bearing capacity of the design.

This paper gives an analytical solution for the problem of a homogeneous cylindrical solid torsion with a circular cross section with its hard loading taking into account the material weakening. Piecewise linear approximations of elastic and elastoplastic medium with a linear weakening at the supercritical deformation stage are considered. The diagrams are plotted regarding stress distribution over the cross section are given; the graphs of the maximum torque value and the extreme value of the relative angle of rotation on the parameters of the deformation diagram. The dependences of the torque on the relative angle of rotation of the sections for the stage of initial supercritical deformation, as well as the stage of supercritical deformation and fracture are determined. The graphs of the dependence of torque on the angle of rotation of the section are given. Reserves of the load bearing capacity of the design are identified. It is noted that taking into account the weakening of the material is expedient in strength calculations and in determination of the system's safety factor.

© PNRPU

Введение

В настоящее время при расчетах конструкций за критическое состояние принимается состояние, при котором напряжения достигают предела текучести либо предела прочности материала [1, 2]. Стадия разупрочнения (закритическая стадия деформирования) начинается после достижения материалом максимальных в данных условиях напряжений (предела прочности) и характеризуется снижением уровня напряжений при растущих деформациях [3–10]. Закритическая стадия деформирования может развиваться при равновесном накоплении повреждений и может быть устойчивой при достаточной жесткости нагружающей системы [11–13]. Экспериментально полная диаграмма деформирования материала может быть получена с использованием специальных установок [14–20]. Анализ деформируемых систем с учетом разупрочнения материала позволяет выявить условия устойчивого закритического деформирования в локальных зонах и оценить соответствующие резервы несущей способности конструкций, что показано в работах [21–27].

Аналитические решения задач с учетом полной диаграммы деформирования были получены в работах В.А. Ибрагимова, В.Д. Ключникова (задачи чистого изгиба балки и сферической полости в пространстве, нагруженной равномерно распределенным давлением) [22]; Л.В. Никитина, Е.И. Рыжак (задача о всестороннем сжатии горных пород) [23]; С.Д. Волкова, Г.И. Дубовиной, Ю.П. Соковнина (задача растяжения пласти-

ны с поперечной трещиной) [24]; В.В. Стружанова (задача о разрушении диска с ослабленной центральной зоной) [25]; В.Э. Вильдемана (задачи трехточечного изгиба балки, разрушения толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления, задачи механики закритического деформирования стержневых систем) [1, 26, 12].

В работе рассматривается задача кручения стержня круглого поперечного сечения при его «жестком» нагружении с учетом разупрочнения материала.

1. Кручение стержня из упругого материала с разупрочнением

Закон связи напряжений и деформаций выбирается для простоты кусочно-линейным:

$$\tau = \begin{cases} G\gamma, & 0 \leq \gamma \leq \gamma_m, \\ \tau_m - D_G(\gamma - \gamma_m), & \gamma_m < \gamma \leq \gamma_p, \\ 0, & \gamma_p < \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Приведенные соотношения обеспечивают проиллюстрированную на рис. 1 двухзвенную кусочно-линейную аппроксимацию полной диаграммы деформирования: G – модуль сдвига; D_G – модуль разупрочнения при сдвиге, $D_G = \text{tg}\beta$; τ_m, γ_m – предел текучести при сдвиге и соответствующий угол сдвига; γ_p – деформация полного разрушения. Иначе связь напряжений и деформаций на участке разупрочнения представима в виде [28]

$$\tau = G\gamma(1 - \omega(\gamma)), \quad (2)$$

где $\omega(\gamma)$ – функция пластичности Ильюшина [29]. Для данной задачи

$$\omega(\gamma) = \bar{\lambda} \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma} \right), \quad (3)$$

где

$$\bar{\lambda} = \frac{G + D_\sigma}{G}. \quad (4)$$

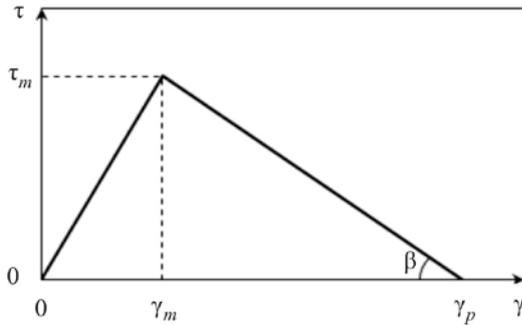


Рис. 1. Диаграмма деформирования материала с участком разупрочнения

Fig. 1. The material's deformation diagram with weakening stage

Предполагается выполнение гипотезы плоских сечений. Относительный угол сдвига γ связан с относительным углом закручивания θ формулой [30]

$$\gamma = \theta \rho, \quad (5)$$

где ρ – расстояние от центра до рассматриваемой точки сечения; относительный угол закручивания определяется отношением угла закручивания к длине, на которой он измеряется:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (6)$$

Выполнение соотношения (5) можно обеспечить при кручении цилиндрических образцов с утолщенной зоной для захватов, которая работает упруго и обеспечивает линейную связь между сдвиговыми деформациями и расстоянием от центра, на котором эти деформации рассматриваются.

Связь между внешним крутящим моментом M и относительным углом закручивания устанавливается из равенства внешних и внутренних силовых факторов с учетом (2):

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 2\pi\rho^2 \tau(\rho) d\rho = \\ &= 2\pi G\theta \int_0^{\rho_m} \rho^3 d\rho + 2\pi G\theta \int_{\rho_m}^{\rho_p} \rho^3 (1 - \omega(\rho)) d\rho, \end{aligned} \quad (7)$$

где использованы соотношения

$$\rho_m = \begin{cases} \frac{\gamma_m}{\theta}, & \frac{\gamma_m}{\theta} < R, \\ R, & \frac{\gamma_m}{\theta} \geq R, \end{cases} \quad \rho_p = \begin{cases} \frac{\gamma_p}{\theta}, & \frac{\gamma_p}{\theta} < R, \\ R, & \frac{\gamma_p}{\theta} \geq R. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь ρ_m, ρ_p – расстояния от центра сечения до границ упругой зоны и зоны закритической деформации соответственно; R – радиус стержня; $\rho_m = R$ при отсутствии пластических деформаций (максимальный угол сдвига меньше угла сдвига γ_m), аналогично $\rho_p = R$, когда отсутствуют участки разрушенного материала. В области $\rho_p < \rho < R$ в случае устойчивого деформирования имеет место полностью разрушенный материал с нулевым сопротивлением внешним нагрузкам.

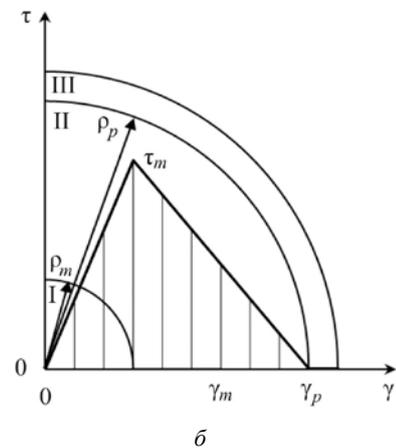
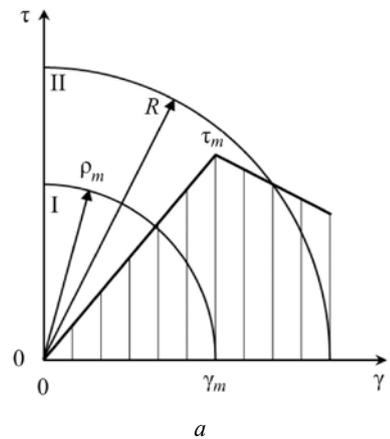


Рис. 2. Эпюры распределения напряжений: *a* – стадия начальной закритической деформации; *b* – стадия закритической деформации и разрушения; I – упругая зона; II – зона закритического деформирования; III – зона с разрушенным материалом; ρ_m, ρ_p – радиусы упругой зоны и зоны с разрушенным материалом соответственно определяются соотношением (8)

Fig. 2. Stress distribution diagrams: *a* – stage of initial supercritical deformation; *b* – stage of supercritical deformation and fracture; I – elastic zone; II – supercritical deformation zone; III – fractured material zone

1. Стадия начальной закритической деформации. Данная стадия характеризуется тем, что $\gamma_m < \theta R < \gamma_p$, а значит, $\rho_m = \frac{\gamma_m}{\theta}$, $\rho_p = R$. Пусть начало закритической стадии деформирования стержня с полярным моментом инерции I_p происходит при крутящем моменте M_m и относительном угле закручивания θ_m :

$$\theta_m = \frac{M_m}{GI_p}. \quad (9)$$

Тогда, подставляя (3)–(5) в (7), получим

$$M = \frac{M_m}{3} \left(3(1-\bar{\lambda}) \frac{\theta}{\theta_m} + \bar{\lambda} \left(4 - \frac{\theta^3}{\theta_m^3} \right) \right). \quad (10)$$

Найдем точку экстремума θ^* функции $M(\theta)$ из условия равенства нулю производной

$$\theta^* = \theta_m \sqrt[3]{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1}}; \quad (11)$$

отметим, что $\theta^* < \theta_p = \frac{\gamma_p}{R}$. Экстремальное значение крутящего момента

$$M^* = \frac{4M_m}{3} \left(\bar{\lambda} - \sqrt[3]{\bar{\lambda}(\bar{\lambda}-1)^3} \right). \quad (12)$$

Будем понимать под резервом несущей способности величину, показывающую, насколько максимальный крутящий момент M^* , рассчитанный с учетом участка разупрочнения материала, превышает момент M_m , рассчитанный для стержня, работающего в упругой области. Тогда формула (12) позволяет выявить и оценить резерв несущей способности с учетом неупругого деформирования. Чем меньше $\bar{\lambda}$, т.е. чем меньше модуль спада системы, тем больше резерв стержня. Графически зависимость (12) показана на рис. 3.

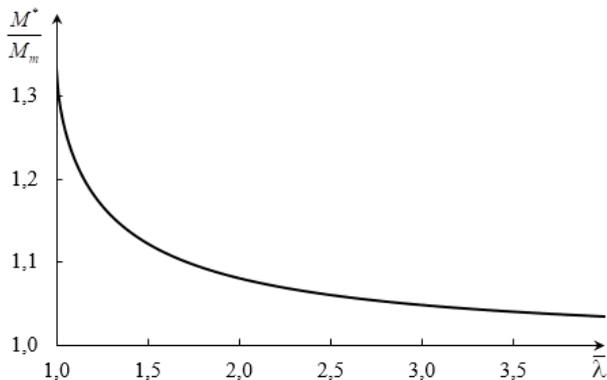


Рис. 3. Зависимость максимального значения крутящего момента от $\bar{\lambda}$ (в относительных координатах)

Fig. 3. Dependence of the maximum torque value on $\bar{\lambda}$ (in relative coordinates)

Формула (11) отражает зависимость соответствующего моменту M^* значения экстремального относительного угла поворота сечения θ^* от $\bar{\lambda}$. Данная зависимость показана на рис. 4. Из графика видно, что с уменьшением $\bar{\lambda}$ растет экстремальное значение θ^* . При $\bar{\lambda} \rightarrow 1$: $\theta^* \rightarrow \infty$, материал в данном сечении переходит в пластическое состояние; радиус упругой области стремится к нулю.

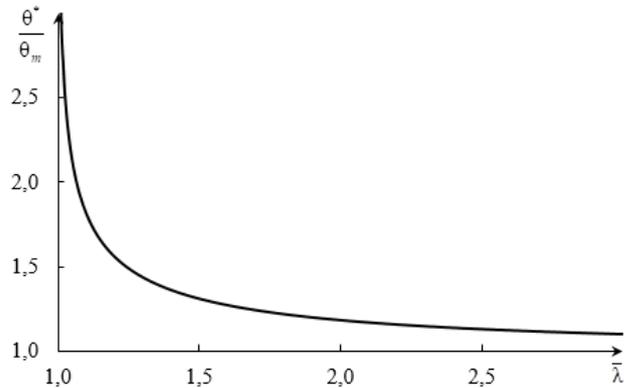


Рис. 4. Зависимость экстремального относительного угла закручивания от $\bar{\lambda}$ (в относительных координатах)

Fig. 4. Dependence of the extreme relative angle of rotation on $\bar{\lambda}$ (in relative coordinates)

2. Стадия закритической деформации и разрушения. На данной стадии $\gamma_p < \theta R$, $\rho_m = \frac{\gamma_m}{\theta}$, $\rho_p = \frac{\gamma_p}{\theta}$. Выразим γ_p , приравняв выражение (2) нулю:

$$\gamma_p = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \gamma_m. \quad (13)$$

Тогда из выражения (7) получим

$$M = \frac{M_m}{3} \frac{\theta^3}{\theta_m^3} \left(3 + 3(1-\bar{\lambda}) \left(\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \right)^4 - 1 \right) + 4\bar{\lambda} \left(\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \right)^3 - 1 \right) \right). \quad (14)$$

Графики, отображающие зависимость крутящего момента от относительного угла поворота сечения, показаны на рис. 5. При «мягком» нагружении экстремальные значения являются предельными, так как невозможно дальнейшее увеличение нагрузки; при «жестком» нагружении после достижения экстремума момент может уменьшаться, асимптотически стремясь к нулю. Из графиков видно, что с увеличением $\bar{\lambda}$ уменьшается предельное значение крутящего момента и предельное значение относительного угла поворота. Соответственно, материал, обладающий меньшим значением коэффициента разупрочнения при сдвиге D_G , является более эффективным для применения в конструкциях, работающих на кручение.

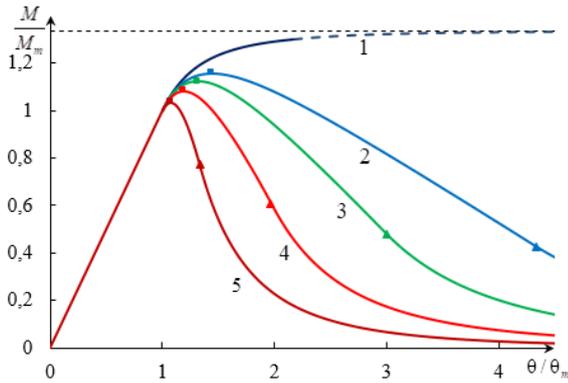


Рис. 5. Графики зависимости крутящего момента от относительного угла поворота сечения для разных значений $\bar{\lambda}$: 1–5 – графики для $\bar{\lambda}=1; 1,3; 1,5; 2; 4$ соответственно; пунктирная линия ограничивает график для $\bar{\lambda}=1$. Маркеры означают (слева направо): момент начала разупрочнения; экстремумы; момент начала разрушения материала

Fig. 5. The dependence of torque on the relative angle of rotation of the cross section for different values of $\bar{\lambda}$: 1–5 – are dependences for $\bar{\lambda}=1; 1,3; 1,5; 2; 4$ respectively; the dashed line limits dependence for $\bar{\lambda}=1$. Markers mean (from left to right): the beginning of weakening; extreme points; destruction start point

2. Кручение стержня из упругопластического материала с разупрочнением

Примем закон связи напряжений и деформаций для материала в следующем виде:

$$\tau = \begin{cases} G\gamma, & 0 \leq \gamma \leq \gamma_m, \\ \tau_m + G'(\gamma - \gamma_m), & \gamma_m < \gamma \leq \gamma_B, \\ \tau_B - D_G(\gamma - \gamma_B), & \gamma_B < \gamma \leq \gamma_p, \\ 0, & \gamma_p < \gamma. \end{cases} \quad (15)$$

Приведенные соотношения обеспечивают проиллюстрированную на рис. 6 трехзвенную кусочно-линейную аппроксимацию полной диаграммы деформирования: G' – коэффициент упрочнения материала при сдвиге; τ_B, γ_B – предел прочности при мягком нагружении при чистом сдвиге и соответствующий угол сдвига.

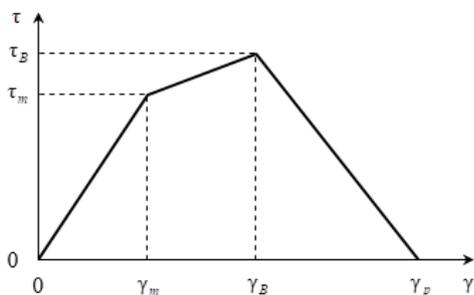


Рис. 6. Диаграмма деформирования материала с участками упрочнения ($\gamma_m < \gamma \leq \gamma_B$) и разупрочнения ($\gamma_B < \gamma \leq \gamma_p$)

Fig. 6. The deformation diagram for a material with a hardening stage ($\gamma_m < \gamma \leq \gamma_B$) and weakening stage ($\gamma_B < \gamma \leq \gamma_p$)

Из условия равенства между внутренними и внешними силовыми факторами следует равенство

$$M = \int_0^R 2\pi\rho^2\tau(\rho) d\rho = 2\pi G\theta \int_0^{\rho_m} \rho^3 d\rho + 2\pi(\tau_m - G'\gamma_m) \int_{\rho_m}^{\rho_B} \rho^2 d\rho + 2\pi G'\theta \int_{\rho_m}^{\rho_B} \rho^3 d\rho + 2\pi(\tau_B + D_G\gamma_B) \int_{\rho_B}^{\rho_p} \rho^2 d\rho - 2\pi D_G\theta \int_{\rho_B}^{\rho_p} \rho^3 d\rho. \quad (16)$$

При записи последнего соотношения использованы следующие обозначения:

$$\rho_m = \begin{cases} \frac{\gamma_m}{\theta}, & \frac{\gamma_m}{\theta} < R, \\ R, & \frac{\gamma_m}{\theta} \geq R, \end{cases} \quad \rho_p = \begin{cases} \frac{\gamma_p}{\theta}, & \frac{\gamma_p}{\theta} < R, \\ R, & \frac{\gamma_p}{\theta} \geq R, \end{cases} \quad (17)$$

где ρ_m, ρ_B, ρ_p – расстояния от центра сечения до границ упругой зоны, зон пластического упрочнения и за критической деформации соответственно. В области $\rho_p < \rho < R$ в случае устойчивого деформирования имеет место полностью разрушенный материал с нулевым сопротивлением внешним нагрузкам.

На стадиях упругого ($\rho_m = \rho_B = \rho_p = R$) и упруго-пластического деформирования ($\rho_m = \frac{\gamma_m}{\theta}, \rho_B = \rho_p = R$)

уравнение (16) после преобразований совпадает с известными решениями. Получим соотношения, позволяющие определять распределение напряжений в сечении стержня, на стадии за критической деформации.

1. Стадия начальной за критической деформации. Пусть указанная стадия характеризуется тем, что

$$\gamma_B < \theta R < \gamma_p, \text{ следовательно, } \rho_m = \frac{\gamma_m}{\theta}, \rho_B = \frac{\gamma_B}{\theta}, \rho_p = R$$

. После преобразования из уравнения (16) следует

$$M = -A \frac{1}{\theta^3} + B - C\theta, \quad A = \frac{M_m \theta_m^3}{3} \left[\frac{G - G'}{G} + \frac{G' + D_G}{G} \alpha^4 \right], \\ B = \frac{4M_m}{3} \left[\frac{G - G'}{G} + \frac{G' + D_G}{G} \alpha \right], \quad C = \frac{M_m D_G}{\theta_m G}, \quad \alpha = \frac{\gamma_B}{\gamma_m}. \quad (18)$$

Экстремальное значение относительного угла поворота сечения найдем из условия равенства нулю производной $dM/d\theta$:

$$\theta^* = \theta_m \sqrt[4]{\frac{G - G'}{D_G} + \frac{G' + D_G}{D_G} \alpha^4}, \quad (19)$$

отметим, что $\theta^* < \gamma_p / R$, максимум достигается до начала разрушения материала.

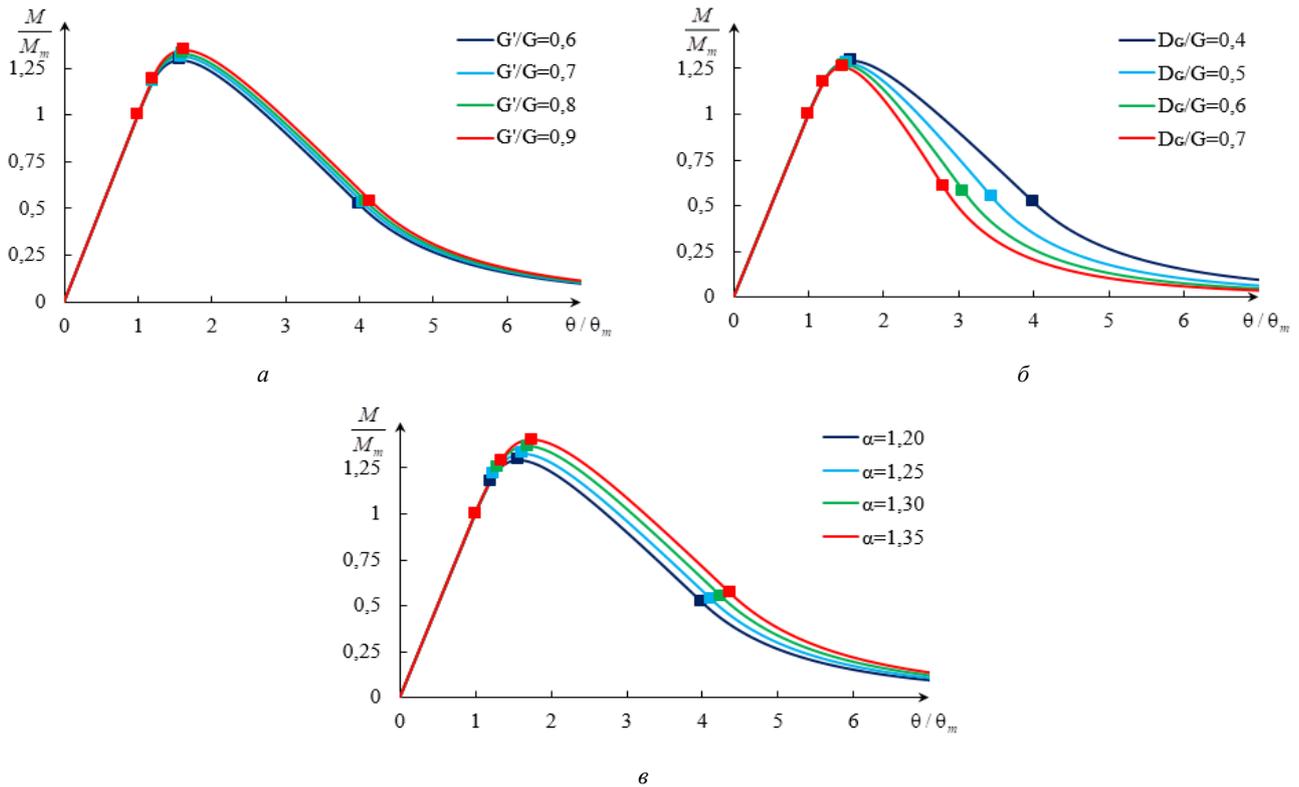


Рис. 7. Графики зависимости крутящего момента от относительного угла поворота сечения для материала с участком упрочнения при разных параметрах: а – G'/G ; б – D_G/G ; в – α . Маркеры означают (слева направо): момент начала упрочнения; момент начала разупрочнения; момент наибольшего значения крутящего момента; момент начала разрушения

Fig. 7. The dependence of torque on the relative angle of rotation of the cross section for the material with hardening stage with different parameters: а – G'/G ; б – D_G/G ; в – α . Markers mean (from left to right): the moment the hardening begins; the beginning of weakening; the moment of the greatest value of torque; destruction start point

Данная стадия кончится, когда деформации вблизи поверхности достигнут значения γ_p ; напряжения будут равны нулю. Выразим γ_p через γ_m из уравнения (15):

$$\gamma_p = \left(\frac{G - G'}{D_G} + \frac{G' + D_G}{D_G} \alpha \right) \gamma_m = \beta \gamma_m, \quad (20)$$

где β – безразмерный коэффициент.

Отметим, что резерв несущей способности конструкции превышает значения, полученные для материала с двухзвенной диаграммой деформирования, в силу наличия зоны упрочнения; значение резерва определяется параметрами диаграммы деформирования материала.

2. Стадия за критической деформации и разрушения. Указанная стадия характеризуется тем, что $\gamma_p < \theta R$;

$$\rho_m = \frac{\gamma_m}{\theta}, \quad \rho_B = \frac{\gamma_B}{\theta}, \quad \rho_p = \frac{\gamma_p}{\theta}. \quad \text{Тогда уравнение зависимости крутящего момента от относительного угла поворота сечения выглядит следующим образом:}$$

$$M = M_m \frac{\theta_m^3}{\theta^3} \left[1 + \frac{4}{3} \frac{G - G'}{G} (\alpha^3 - 1) + \frac{G'}{G} (\alpha^4 - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3} \frac{D_G}{G} \beta (\beta^3 - \alpha^3) + \frac{D_G}{G} (\alpha^4 - \beta^4) \right]. \quad (21)$$

Функция монотонно убывает и ограничена снизу нулем.

Графики зависимостей крутящего момента от относительного угла поворота сечения для разных значений коэффициентов G'/G , D_G/G , α показаны на рис. 7. Из графиков видно, что критическое значение момента и критическое значение относительного угла поворота прямо пропорциональны коэффициентам G'/G и $\alpha = \gamma_B / \gamma_m$; обратно пропорциональны коэффициенту D_G/G . При этом наибольшее влияние оказывает α ; коэффициент G'/G на изменение вида графика влияет слабо. В предельном случае, при $\alpha = 1$, из данного решения получим решение для упругого материала с разупрочнением.

Заключение

Таким образом, в работе получено новое аналитическое решение задачи о кручении цилиндрического тела круглого поперечного сечения из упругопластического

материала с разупрочнением. Были рассмотрены двухзвенная и трехзвенная аппроксимации диаграммы деформирования. Получены соотношения, описывающие распределения деформаций и напряжений на разных стадиях нагружения; приведены эпюры распределения напряжений по сечению. Для двухзвенной диаграммы деформирования получены графики зависимости максимального значения крутящего момента и экстремального значения относительного угла поворота сечения от параметров диаграммы деформирования. Показано, что с уменьшением модуля спада при разупрочнении растет максимальный крутящий момент. Приведены оценки прочностных резервов, связанных с реализацией критической стадии деформирования; показана зависимость резервов от параметров диаграммы деформирования. Построены графики зависимости крутящего момента от относительного угла поворота сечения. Из

всего вышеизложенного можно сделать вывод, что учет участка закритических деформаций целесообразен при проведении прочностных расчетов и определении коэффициента запаса системы.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №16-19-00069) в Пермском национальном исследовательском политехническом университете.

Acknowledgment

The work was carried out with support of the Russian Science Foundation (Project 16-19-00069) in the Perm National Research Polytechnic University.

Библиографический список

1. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / под ред. Ю.В. Соколкина. – М.: Наука: Физматлит, 1997. – 288 с.
2. К теории накопления повреждений / Г.И. Дубровина, Ю.П. Соковнин, Ю.П. Гуськов [и др.] // Проблемы прочности. – 1975. – № 2. – С. 21–24.
3. Основы экспериментальной механики разрушения / И.М. Керштейн, В.Д. Ключников, Е.В. Ломакин [и др.]. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 140 с.
4. Ломакин Е.В. Кручение цилиндрических тел с изменяющимися деформационными свойствами // МТТ. – 2008. – № 3. – С. 217–226.
5. Bažant Z.P. Size effect on strength and lifetime probability distribution of quasibrittle structures // *Sadhana*. – 2012. – Vol. 37. – Iss. 1. – P. 17–31.
6. Yu Q., Bazant Z.P. Shear strength of reinforced concrete beams: Size effect and its fracture-mechanics basis // *American Concrete Institute, ACI Special Publication*. – 2015. January. – Iss. SP 300. – P. 143–174.
7. Никитин Л.В. Закритическое поведение разупрочняющегося материала // Докл. АН. – 1995. – Т. 342, № 4. – С. 487–490.
8. Effect of complex combined loading mode on the fracture toughness of titanium alloys / M.G. Chausov, P.O. Maruschak, V. Hutsaylyuk, L. Śniezek, A.P. Pylypenko // *Vacuum*. – 2018. – Vol. 147. – P. 51–57.
9. Tsvetkov A.B., Pavlova L.D., Fryanov V.N. Construction of the approximant of complete diagram for rock deformation // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. – 2016. – Vol. 45. – Iss. 1.
10. Struzhanov V.V., Korkin A.V. The stability of the deformation of one of the farm with the softening of the material elements // *CEUR Workshop Proceedings*. – 2016. – Vol. 1825. – P. 180–187.
11. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Краевые задачи континуальной механики разрушения. – Пермь, 1992. – (Препринт / УрО РАН).
12. Вильдеман В.Э. Задачи механики закритического деформирования стержневых систем // *Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Динамика и прочность машин*. – 2005. – № 5. – С. 15–29.
13. Линьков А.М. Об условиях устойчивости в механике разрушения // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, № 1. – С. 45–48.
14. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении / С.Д. Волков, Ю.П. Гуськов, В.И. Кривоспицкая [и др.] // Проблемы прочности. – 1979. – № 1. – С. 3–6.
15. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г. Установка для построения полностью равновесных диаграмм деформирования // Проблемы прочности. – 1981. – № 12. – С. 104–106.
16. Волков С.Д., Дубровина Г.И., Соковнин Ю.П. Устойчивость сопротивления материала в механике разрушения // Проблемы прочности. – 1978. – № 6. – С. 65–69.
17. Закритическое деформирование и разрушение тел с концентраторами в условиях плоского напряженного состояния / В.Э. Вильдеман, Е.В. Ломакин, Т.В. Третьякова, М.П. Третьяков // МТТ. – 2017. – № 5. – С. 22–29.
18. Chausov N.G. Full deformation diagram as source of information about accumulation of damages and material crack resistance // *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika materialov*. – 2004. – Vol. 70. – Iss. 7. – P. 42–49.
19. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г., Евецкий Ю.Л. Методика построения полных диаграмм деформирования листовых материалов // Проблемы прочности, – 1986. – № 9. – С. 29–32.
20. Setup for testing materials with plotting complete stress-strain diagrams / N.G. Chausov, D.G. Vojtyuk, A.P. Pilipenko, A.M. Kuz'menko // *Problemy Prochnosti*. – 2004. – Iss. 5. – P. 117–123.
21. Стружанов В.В. О применении полных диаграмм деформирования в расчетах на прочность // Проблемы прочности. – 1988. – № 5 – С. 122–123.
22. Ибрагимов В.А., Ключников В.Д. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Механика твердого тела. – 1971. – № 4 – С. 116–121.
23. Никитин Л.В., Рыжак Е.И. Закономерности разрушения горной породы с внутренним трением и дилатансией // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. – 1977. – № 5. – С. 22.
24. Волков С.Д., Дубровина Г.И., Соковнин Ю.П. О краевой задаче механики разрушения // Проблемы прочности. – 1978. – № 1. – С. 3–7.

25. Стружанов В.В. О разрушении диска с центральной ослабленной зоной // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 1. – С. 135–141.
26. Вильдеман В.Э., Ташкинов А.А. Расчет несущей способности толстостенных труб с использованием полных диаграмм деформирования // Проблемы прочности. – 1994. – № 8. – С. 17–20.
27. Радченко В.П., Горбунов С.В. Метод решения краевой упругопластической задачи о растяжении полосы с концентраторами напряжений с учетом локальных областей пла-

- стического разупрочнения материала // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 4. – С. 98–110.
28. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
29. Ильющин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. – М.: Изд-во ОГИЗ, 1948. – 376 с.
30. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.

References

1. Wildemann V.E., Sokolkin Y.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Mechanics of inelastic deformation and fracture of composite materials]. Moscow. Nauka. Fizmatlit, 1997, 288 p.
2. Dubrovina, G.I., Sokovnin, Yu.P., Gus'kov, Yu.P., Sokolov, P.S., Volkov, S.D. A theory of the accumulation of damages. Strength of Materials [On the theory of damage accumulation]. 1975, vol. 7, iss. 12, pp. 1450-1453.
3. Kershtejn I.M., Klyushnikov V.D., Lomakin E.V. Osnovy eksperimental'noj mekhaniki razrusheniya [Fundamentals of experimental fracture mechanics]. Moscow, Izd-vo Mosk. un-ta, 1989, 140 p.
4. Lomakin E.V. Torsion of cylindrical bodies with varying strain properties [Torsion of cylindrical bodies with varying deformation properties]. *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, iss. 3, pp. 502-511.
5. Bažant Z.P. Size effect on strength and lifetime probability distribution of quasibrittle structures. *Sadhana*, 2012, vol. 37, iss. 1, pp. 17-31.
6. Yu, Q., Bazant, Z.P. Shear strength of reinforced concrete beams: Size effect and its fracture-mechanics basis. *American Concrete Institute, ACI Special Publication*, 2015, vol. 2015-January, iss. SP 300, pp. 143-174.
7. Nikitin L.V. Zakriticheskoe povedenie razuprochnyayushchegosya materiala [Supercritical behavior of the softening material]. *Dokl. AN*, 1995, vol. 342, no. 4, pp. 487-490.
8. Chausov M.G., Maruschak P.O., Hutsaylyuk V., Śniezek L., Pylypenko A.P. Effect of complex combined loading mode on the fracture toughness of titanium alloys. *Vacuum*, 2018, vol. 147, 2018, pp. 51-57
9. Tsvetkov, A.B., Pavlova, L.D., Fryanov, V.N. Construction of the approximant of complete diagram for rock deformation. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2016, vol. 45, iss. 1.
10. Struzhanov, V.V., Korokin, A.V. The stability of the deformation of one of the farm with the softening of the material elements. *CEUR Workshop Proceedings*, 2016, vol. 1825, pp. 180-187.
11. Wildemann V.E., Sokolkin Y.V., Tashkinov A.A.. Kraevye zadachi kontinual'noj mekhaniki razrusheniya [Boundary value problems of continuum fracture mechanics]. *Perm*, 1992
12. Wildemann V.E. Zadachi mekhaniki zakriticheskogo deformirovaniya sterzhnevyykh sistem [Problems of mechanics of supercritical deformation of rod systems]. *Vestn. PGTU. Dinamika i prochnost' mashin*, 2005, no. 5, pp. 15-29.
13. Lin'kov A.M. Ob usloviyah ustojchivosti v mekhanike razrusheniya [On stability conditions in fracture mechanics]. *Dokl. AN SSSR*, 1977, vol. 233, no. 1, pp. 45-48.
14. Volkov S.D., Gus'kov Y.P., Krivospickaya V.I. Eksperimental'nye funktsii soprotivleniya legirovannoj stali pri rastyazhenii i kruchenii [Experimental resistance functions of alloy steel under tension and torsion]. *Problemy prochnosti*, 1979, no. 1, pp. 3-6.
15. Lebedev, A.A., Chausov, N.G. Equipment for testing of materials with the recording of completely equilibrium deformation diagrams. *Strength of Materials*, 1981, vol. 13, iss. 12, pp. 1549-1551.
16. Volkov, S.D., Dubrovina, G.I., Sokovnin, Y.P. A theory of the resistance to failure of technical materials. *Strength of materials*, 1978, vol. 10, iss. 2, pp. 121-125.
17. Vildeman V.E., Lomakin E.V., Tret'yakova T.V., Tret'yakov M.P. Supercritical Deformation and Fracture of Bodies with Concentrators under Plane Stress State Conditions. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, iss. 5, pp. 488-494.
18. Chausov, N.G. Full deformation diagram as source of information about accumulation of damages and material crack resistance. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2004, vol. 70, iss. 7, pp. 42-49.
19. Lebedev A.A., Chausov N.G., Evekii Y.L. Method for Constructing Complete Diagrams of Deformation of Sheet Materials [Technique of construction of complete diagrams of deformation of sheet materials]. *Problemy prochnosti*, 1986, iss., 1986, pp. 29-32
20. Chausov N.G., Voityuk D.G., Pilipenko A.P., Kuz'menko A.M. Setup for testing materials with plotting complete stress-strain diagrams. *Problemy Prochnosti*, 2004, iss. 5, pp. 117-123.
21. Struzhanov V.V. O primenenii polnykh diagramm deformirovaniya v raschetah na prochnost' [On the application of complete deformation diagrams in strength calculations]. *Problemy prochnosti*, 1988, no. 5, pp. 122-123.
22. Ibragimov V.A., Klyushnikov V.D. Nekotorye zadachi dlya sred s padayushchey diagrammoy [Some of the tasks for environments with falling graph]. *Mekhanika tverdogo tela*, 1971, no. 4, pp. 116-121.
23. Nikitin L.V., Ryzhak E.I. Zakonomernosti razrusheniya gornoy porodoy s vnutrennim treniem i dilatatsiej [Regularities of rock destruction with internal friction and dilatation]. *Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli*, 1977, no. 5, pp. 22.
24. Volkov, S.D., Dubrovina, G.I., Sokovnin, Y.P. Boundary Problem of Fracture Mechanics [On the boundary value problem of fracture mechanics]. *Problemy prochnosti*, 1978, iss. 1, 1978, pp. 3-7.
25. Struzhanov V.V. Fracture of a disk with a weakened central zone [About destruction of a disk with the Central weakened zone]. *Mechanics of Solids*, 1986, vol. 21, iss. 1, 1986, pp. 140-146.
26. Wildemann V.E., Tashkinov A.A. Calculation of the supporting capacity of thin-walled tubes using complete deformation curves [Calculation of the bearing capacity of thick-walled pipes using complete deformation diagrams]. *Strength of Materials*, 1994, vol. 26, iss. 8, pp. 592-597.
27. Radchenko V.P., Gorbunov S.V. Metod resheniya kraevoy uprugoplasticheskoy zadachi o rastyazhenii polosity s konцентраторами napryazhenij s uchedom lokal'nykh oblastej plasticheskogo razuprochneniya materiala [A method for solving the boundary elastic plastic problem of stretching a strip with stress concentrators taking into account the local areas of plastic softening of the material]. *Vestn. SamGTU. Ser. Fiz.-mat. Nauki*, 2014, no. 4, pp. 98-110.
28. Pisarenko G.S., Mozharovskij N.S. Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti. Spravochnoe posobie [Equations and boundary value problems of plasticity and creep theory. Reference book]. *Kiev, Nauk. Dumka*, 1981, 496 p.
29. Il'yushin A.A. Plastichnost'. CH.1. Uprugoplasticheskie deformatsii [Plasticity. Part 1. Elastic-plastic deformation]. *Moscow, Izd-vo OGIЗ*, 1948, 376 p.
30. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Handbook on strength of materials]. *Kiev, Naukova dumka*, 1988, 736 p.