



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.05

УДК 539.375

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В МОДЕЛИ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО ДЕФЕКТА ПРИ НАГРУЖЕНИИ ТИПА МОДЫ II

В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин

Тульский государственный университет, Тула, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 11 марта 2019 г.

Принята: 14 ноября 2019 г.

Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

энергетическое произведение, линейный размер, трещина моды II.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается нагружение трещиноподобного дефекта по моде II. В отличие от классического представления трещины в виде математического разреза предлагаемая модель определяет трещину в виде физического разреза с характерным линейным размером. Мысленное продолжение физического разреза в твердом теле формирует слой взаимодействия. Существенно, что напряженно-деформированное состояние слоя не вносит в модель трещины сингулярность. Произведение приращения удельной свободной энергии в торцевом квадратном элементе слоя на линейный размер определяет его энергетическое произведение (ЭП). Объектом исследования является двухконсольный образец, а предметом исследования – энергетическое произведение в торцевом элементе слоя взаимодействия. Внешняя нагрузка консолей приводит к их горизонтальным антисимметричным перемещениям, которые формируют в слое взаимодействия однородные сдвиговые деформации. Из условий равновесия консолей в вариационной форме с учетом гипотезы однородности осевых деформаций и с учетом их обжатия получена система дифференциальных уравнений, связывающая напряженное состояние в слое и консолях. Исследовано решение характеристического уравнения системы при различных отношениях толщин слоя и консолей. Показано, что при отношениях меньше определенного значения, зависящего от коэффициента Пуассона, имеют место вещественные корни. В рамках вещественных корней характеристического уравнения получено аналитическое решение поставленной задачи. При условии пренебрежения обжатием консолей найдено упрощенное решение. Определены деформации в слое с учетом обжатия консолей и без него. Проведен анализ зависимости ЭП от отношений толщин слоя и консолей. Показано, что при отношении толщин 10^{-6} и менее ЭП практически не меняет своего значения. Учет обжатия консолей дает различие в значениях ЭП порядка 20 % по отношению к упрощенному решению задачи.

© ПНИПУ

© Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vadim@tsu.tula.ru,

ИД: [0000-0003-0371-7704](https://orcid.org/0000-0003-0371-7704)

Глаголев Леонид Вадимович – к.ф.-м.н., инж., e-mail: len4ic92@gmail.com, ИД: [0000-0003-2313-2084](https://orcid.org/0000-0003-2313-2084)

Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф., e-mail: markin-nikram@yandex.ru,

ИД: [0000-0003-1456-8281](https://orcid.org/0000-0003-1456-8281)

Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department,

e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ИД: [0000-0003-0371-7704](https://orcid.org/0000-0003-0371-7704)

Leonid V. Glagolev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Engineer, e-mail: len4ic92@gmail.com,

ИД: [0000-0003-2313-2084](https://orcid.org/0000-0003-2313-2084)

Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ИД: [0000-0003-1456-8281](https://orcid.org/0000-0003-1456-8281)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ENERGY PRODUCT IN A CRACK-LIKE DEFECT MODEL UNDER LOADING OF MODE II TYPE

V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Markin

Tula State University, Tula, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019
Accepted: 14 November 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

energy product, linear size, crack mode II.

ABSTRACT

The loading of a crack-like defect in mode II is considered. In contrast to the classical representation of a crack in the form of a mathematical cut, the proposed model defines a crack in the form of a physical cut with a characteristic linear size. The mental continuation of a physical cut in a solid forms an interaction layer. It is significant that the stress-strain state of the layer does not introduce a singularity to the crack model. The product of the increment of the specific free energy in the face square element of the layer by the linear size determines its energy product. The object of the study is a double-cantilever sample, and the subject of study is the energy product in the face element of the interaction layer. The external load of the cantilevers leads to their horizontal antisymmetric displacements, which form uniform shear deformations in the interaction layer. From the equilibrium conditions of the cantilevers in the variation form, taking into account the hypothesis of axial deformation homogeneity and their reduction, a system of differential equations is obtained, which relates the stress state in the layer and the cantilevers. The solution of the characteristic equation of the system is investigated for various ratios of layer thickness and cantilevers. It is shown that when the relationship is less than a certain value, depending on the Poisson's ratio, real roots take place. In the framework of the real roots of the characteristic equation, an analytical solution of the problem is obtained. Subject to the neglect of compression cantilevers found a simplified solution. The deformations in the layer are determined taking into account the compression of the consoles and without it. The analysis of the dependence of the energy product on the relationship of the thickness of the layer and cantilevers. It is shown that with a thickness ratio of 10-6 or less, the energy product practically does not change its value. Accounting for the compression of cantilevers gives a difference in the values of the energy product of the order of 20 % in relation to the simplified solution of the problem.

© PNRPU

Введение

Классическая постановка задачи о трещине моды II рассматривает бесконечное линейно-упругое пространство с дефектом в виде математического разреза, поверхности которого нагружены противоположными векторами напряжений [1, 2]. В этом случае на продолжении математического разреза в слое нулевой толщины реализуются только сдвиговые напряжения. Для образцов конечных размеров предлагается ряд схем нагружения [3–6], в которых на продолжении трещины реализуется напряженное состояние, соответствующее поперечному сдвигу. Данные схемы также принято рассматривать как трещину моды II. Отметим, что для образцов конечных размеров общие решения строятся, как правило, на основе численных процедур, основанных на методе конечных элементов [7–12]. Аналитические решения получают, как правило, в рамках упрощающих гипотез [13–19]. Так, в работе [6] для консоли с центральной трещиной на основе гипотез теории пластин Тимошенко получено решение задачи и определено значение J -интеграла. В этом случае в консолях учитывались деформации растяжения и сдвига. Влияние обжатия консолей в результате внешнего воздействия не рассматривалось.

Альтернативной моделью трещины в виде математического разреза является разрез физический с характерной толщиной δ_0 . В данном представлении особую роль играет описание взаимодействия материального объема, лежащего на продолжении физического разреза, со смежной средой. Важно, чтобы та или иная модель не приводила к сингулярности в области окончания физического разреза. При нагружении трещиноподобного дефекта нормальным отрывом отметим модель в виде связей Прандтля, предложенную в статье [20] и используемую в работах [21–23]. В модели Ф. Макклитока [24] предложено использовать для материала слоя усредненные характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС). Постановки конкретных задач исходя из представления Ф. Макклитока были реализованы на основе теории слоя взаимодействия в работах [18–20], [26–28]. В частности, в статье [27] введено понятие энергетического произведения (ЭП) в виде произведения приращения удельной свободной энергии в элементе слоя и толщины слоя. В статье [18] о нагружении двухконсольной балки (ДКБ-образца) нормальным отрывом (нагружение по моде I) показано, что при уменьшении отношения толщины слоя к высоте консоли имеет место сходимость ЭП к поверхностной энергии, рассчитанной через вязкость разрушения K_{IC} .

В данной работе предложена схема нагружения ДКБ-образца в которой реализуется состояние, близкое к моде II. На основе общей вариационной постановки задачи [26–28] получены упрощенные постановки с учетом и без учета обжатия консолей. Из аналитических решений показано, что при уменьшении отношения толщины слоя к толщине консоли имеет место сходимость ЭП в слое для данного вида нагружения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим случай нагружения ДКБ-образца согласно схеме, показанной на рис. 1. Правые торцы консолей 1 и 2 образца свободны от внешней нагрузки. Верхняя граница консоли 1 и нижняя граница консоли 2 закреплены от вертикальных перемещений. На левых торцах консолей действует горизонтальная антисимметричная нагрузка интенсивностью \mathbf{P} .

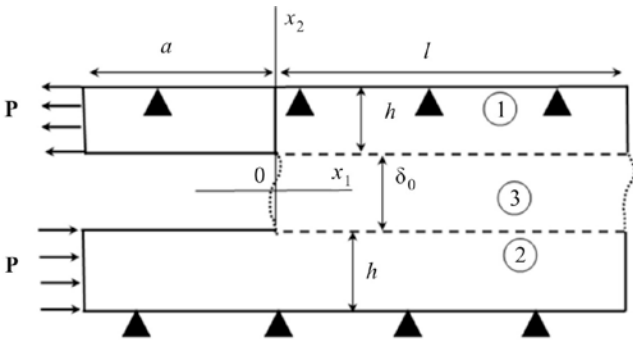


Рис. 1. Схема сдвигового воздействия на тонкий слой

Fig. 1. Shear effect on a thin layer

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работах [26–28]. В этом случае условия равновесия тел 1 и 2 запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0,5\delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl \quad (1)$$

и тела 2

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + 0,5\delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (2)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещений; $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$ – вектора внешней нагрузки тел 1 и 2; S_1, S_2 – площади тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с компонентами:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right),$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0,5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = 0,5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right), \quad (4)$$

где u_k^\pm – компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя соответственно; $k = 1, 2$; L_1, L_2 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1 и 2. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); \mathbf{u}^- = \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2) \quad x_1 \in [0; \ell]. \quad (5)$$

Примем определяющие соотношения в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (6)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона тела; ε – объемное расширение, $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \quad (7)$$

Распределение перемещений в консолях при данном нагружении принимаем в следующем виде:

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1),$$

$$u_2^{(1)}(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)(h + \delta_0/2 - x_2), \quad (8)$$

$$u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_1^-(x_1),$$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_2) = \psi_2(x_1)(h + \delta_0/2 + x_2). \quad (9)$$

Вертикальные перемещения тождественно удовлетворяют граничным условиям на верхней границе консоли 1 и нижней границе консоли 2:

$$u_2^{(1)} \Big|_{x_2=h+\delta_0/2} = 0, \quad u_2^{(2)} \Big|_{x_2=-h-\delta_0/2} = 0.$$

В этом случае деформацию консолей будут определять компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{11}^k(x_1, x_2) = \frac{du_1^\pm(x_1)}{dx_1}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{22}^k(x_1, x_2) = \mp \Psi_k, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{12}^k(x_1, x_2) = 0,5 \left(\frac{d\Psi_k(x_1)}{dx_1} (h + \delta_0/2 \mp x_2) \right), \quad (12)$$

где u_1^\pm – горизонтальное перемещение верхней (+) или нижней (–) границы слоя; символ \mp преобразуется в знак (–) для $k = 1$, а для $k = 2$ преобразуется в знак (+).

При распределении деформаций в консолях в виде (10)–(12) работа внутренних напряжений в теле l рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds &= \int_{-a}^0 \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - \sigma_{22} \delta \Psi_1 + \sigma_{12} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{d\delta \Psi_1}{dx_1} (h + \delta_0/2 - x_2) \right) \right) dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_{+0}^\ell \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} - \sigma_{22} \delta \Psi_1 + \right. \\ &+ \left. \sigma_{12} \left(\frac{d\delta \Psi_1}{dx_1} (h + \delta_0/2 - x_2) \right) \right) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (13)$$

в теле 2:

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds &= \int_{-a}^0 \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \frac{d\delta u_1^-}{dx_1} + \sigma_{22} \delta \Psi_2 + \right. \\ &+ \left. \sigma_{12} \left(\frac{d\delta \Psi_2}{dx_1} (h + \delta_0/2 + x_2) \right) \right) dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_{+0}^\ell \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \left(\sigma_{11} \frac{d\delta u_1^-}{dx_1} + \sigma_{22} \delta \Psi_2 + \right. \\ &+ \left. \sigma_{12} \left(\frac{d\delta \Psi_2}{dx_1} (h + \delta_0/2 + x_2) \right) \right) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (14)$$

Введем в рассмотрение обобщенные силы:

$$Q_{11}^1(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2, \quad (15)$$

$$Q_{22}^1(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{22} dx_2, \quad (16)$$

$$Q_{11}^2(x_1) = \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2, \quad (17)$$

$$Q_{22}^2(x_1) = \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{22} dx_2 \quad (18)$$

и обобщенные моменты:

$$M_{12}^1(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} (h + \delta_0/2 - x_2) dx_2, \quad (19)$$

$$M_{12}^2(x_1) = \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{12} (h + \delta_0/2 + x_2) dx_2. \quad (20)$$

Интегрируем по частям ряд слагаемых в (13), (14) с учетом (15)–(20) и четвертое и пятое слагаемые в левой части (1) и (2) с учетом (8) и (9):

$$\int_{-a}^0 Q_{11}^k \frac{d\delta u_1^\pm}{dx_1} dx_1 = Q_{11}^k \delta u_1^\pm \Big|_{x_1=-a}^{x_1=0} - \int_{-a}^0 \frac{dQ_{11}^k}{dx_1} \delta u_1^\pm dx_1, \quad (21)$$

$$\int_{+0}^\ell Q_{11}^k \frac{d\delta u_1^\pm}{dx_1} dx_1 = Q_{11}^k \delta u_1^\pm \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^\ell \frac{dQ_{11}^k}{dx_1} \delta u_1^\pm dx_1, \quad (22)$$

$$\int_{-a}^0 M_{12}^k \frac{d\delta \Psi_k}{dx_1} dx_1 = M_{12}^k \delta \Psi_k \Big|_{x_1=-a}^{x_1=0} - \int_{-a}^0 \frac{dM_{12}^k}{dx_1} \delta \Psi_k dx_1, \quad (23)$$

$$\int_{+0}^\ell M_{12}^k \frac{d\delta \Psi_k}{dx_1} dx_1 = M_{12}^k \delta \Psi_k \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^\ell \frac{dM_{12}^k}{dx_1} \delta \Psi_k dx_1, \quad (24)$$

$$\int_{+0}^\ell \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^\pm}{dx_1} dx_1 = \bar{\sigma}_{11} \delta u_1^\pm \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^\ell \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} \delta u_1^\pm dx_1. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \int_{+0}^\ell \bar{\sigma}_{12} \frac{d\delta u_2^\pm}{dx_1} dx_1 &= \int_{+0}^\ell \bar{\sigma}_{12} \frac{d\delta h \Psi_k}{dx_1} dx_1 = \\ &= h \left(\bar{\sigma}_{12} \delta \Psi_k \Big|_{x_1=+0}^{x_1=\ell} - \int_{+0}^\ell \frac{d\bar{\sigma}_{12}}{dx_1} \delta \Psi_k dx_1 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим правые части уравнений (1) и (2). При положительном обходе контура работа внешних напряжений рассчитывается так:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u} dl &= - \int_{h+\delta_0/2}^{\delta_0/2} P \delta u_1^+ (-dx_2) \Big|_{x_1=-a} = \\ &= -Ph \delta u_1^+ \Big|_{x_1=-a} = -Q_{11}^1 \delta u_1^+ \Big|_{x_1=-a}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u} dl &= - \int_{h+\delta_0/2}^{\delta_0/2} P \delta u_1^- (-dx_2) \Big|_{x_1=-a} = \\ &= Ph \delta u_1^- \Big|_{x_1=-a} = Q_{11}^2 \delta u_1^- \Big|_{x_1=-a}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $Q_1 = Ph$.

Подставив (13), (15), (16) (21)–(28) в (1) и приравняв слагаемые при равных вариациях, приходим к двум системам дифференциальных уравнений:

для участка $x_1 \in [-a; 0]$

$$\frac{dM_{12}^1}{dx_1} + Q_{22}^1 = 0, \quad \frac{dQ_{11}^1}{dx_1} = 0, \quad (29)$$

для участка $x_1 \in (0; \ell]$

$$\frac{dM_{12}^1}{dx_1} + Q_{22}^1 + 0,5\delta_0 h \frac{d\bar{\sigma}_{12}}{dx_1} = h\bar{\sigma}_{22},$$

$$\frac{dQ_{11}^1}{dx_1} + 0,5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}, \quad (30)$$

с условиями сопряжения

$$u_1^+ \Big|_{x_1=-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=+0}, \quad (31)$$

$$\Psi_1 \Big|_{x_1=-0} = \Psi_1 \Big|_{x_1=+0}, \quad (32)$$

$$M_{12}^1 \Big|_{x_1=-0} = \left(M_{12}^1 + 0,5\delta_0 h \bar{\sigma}_{12} \right) \Big|_{x_1=+0}, \quad (33)$$

$$Q_{11}^1 \Big|_{x_1=-0} = \left(Q_{11}^1 + 0,5\delta_0 \bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=+0} \quad (34)$$

и с естественными граничными условиями:
на левом торце

$$Q_{11}^1 \Big|_{x_1=-a} = Q_1, \quad (35)$$

$$M_{12}^1 \Big|_{x_1=-a} = 0, \quad (36)$$

на правом торце

$$\left(Q_{11}^1 + 0,5\delta_0 \bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad (37)$$

$$\left(M_{12}^1 + 0,5\delta_0 h \bar{\sigma}_{12} \right) \Big|_{x_1=\ell} = 0. \quad (38)$$

Аналогичным образом из (2) приходим к системам дифференциальных уравнений:

для участка $x_1 \in [-a; 0]$

$$\frac{dM_{12}^2}{dx_1} = Q_{22}^2, \quad \frac{dQ_{11}^2}{dx_1} = 0, \quad (39)$$

для участка $x_1 \in (0; \ell]$

$$\begin{aligned} \frac{dM_{12}^2}{dx_1} - Q_{22}^2 + 0,5\delta_0 h \frac{d\bar{\sigma}_{12}}{dx_1} + h\bar{\sigma}_{22} &= 0, \\ \frac{dQ_{11}^2}{dx_1} + 0,5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} &= -\bar{\sigma}_{21}, \end{aligned} \quad (40)$$

с условиями сопряжения

$$u_1^- \Big|_{x_1=-0} = u_1^- \Big|_{x_1=+0}, \quad (41)$$

$$\Psi_2 \Big|_{x_1=-0} = \Psi_2 \Big|_{x_1=+0}, \quad (42)$$

$$M_{12}^2 \Big|_{x_1=-0} = \left(M_{12}^2 + 0,5\delta_0 h \bar{\sigma}_{12} \right) \Big|_{x_1=+0}, \quad (43)$$

$$Q_{11}^2 \Big|_{x_1=-0} = \left(Q_{11}^2 + 0,5\delta_0 \bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=+0} \quad (44)$$

и естественными граничными условиями:
на левом торце

$$Q_{11}^2 \Big|_{x_1=-a} = -Q_1, \quad (45)$$

$$M_{12}^2 \Big|_{x_1=-a} = 0, \quad (46)$$

правом торце

$$\left(Q_{11}^2 + 0,5\delta_0 \bar{\sigma}_{11} \right) \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad (47)$$

$$\left(M_{12}^2 + 0,5\delta_0 h \bar{\sigma}_{12} \right) \Big|_{x_1=\ell} = 0. \quad (48)$$

С учетом выражений (10)–(12) и условием плоской деформации ($\varepsilon_{33} = 0$) определяющие соотношения (6) запишем в виде

$$\sigma_{11}^k = D \frac{du_1^\pm}{dx_1} \mp D1 \Psi_k, \quad (49)$$

$$\sigma_{22}^k = \mp D \Psi_k + D1 \frac{du_1^\pm}{dx_1}, \quad (50)$$

$$\sigma_{12}^k = L \left(\frac{d\Psi_k}{dx_1} (h + \delta_0/2 \mp x_2) \right), \quad (51)$$

где $D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $D1 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $L = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Из (7)–(9), (3) и (4) получим связь средних напряжений в слое взаимодействия с его граничными перемещениями:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{D}{2} \frac{d(u_1^+ + u_1^-)}{dx_1} + \frac{D1}{\delta_0} h(\Psi_1 - \Psi_2), \quad (52)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{D}{\delta_0} h(\Psi_1 - \Psi_2) + \frac{D1}{2} \frac{d(u_1^+ + u_1^-)}{dx_1}, \quad (53)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = L \left(\frac{u_1^+ - u_1^-}{\delta_0} + 0,5h \left(\frac{d\Psi_1}{dx_1} + \frac{d\Psi_2}{dx_1} \right) \right). \quad (54)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (29), (30), (39), (40) с учетом связей (10)–(12), (15)–(20) и определяющих соотношений (49)–(54) является замкнутой относительно четырех неизвестных функций $u_1^+, u_1^-, \Psi_1, \Psi_2$. Каждая искомая функция входит в систему со второй производной включительно. Удовлетворение восьми граничных условий (35)–(38), (45)–(48) с учетом сопряжения решений (31)–(34), (41)–(44) даст решение поставленной задачи.

2. Решение задачи

Рассмотрим решение поставленной задачи в виде $u_1^+ = -u_1^-, \Psi_1 = \Psi_2$ для полубесконечного образца ($\ell \rightarrow \infty$). В этом случае движение консолей противоположно, с одинаковым модулем обжатия. Для решения задачи достаточно рассмотреть только систему уравнений (29), (30) при следующих выражениях обобщенных сил:

$$Q_{11}^1(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2 = h \left(D \frac{du_1^+}{dx_1} - D1 \Psi_1 \right), \quad (55)$$

$$Q_{22}^1(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{22} dx_2 = h \left(-D\psi_1 + D1 \frac{du_1^+}{dx_1} \right), \quad (56)$$

обобщенного момента

$$M_{12}^1(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} (h + \delta_0/2 - x_2) dx_2 = \frac{Lh^3}{3} \frac{d\psi_1}{dx_1} \quad (57)$$

и средних напряжений в слое

$$\bar{\sigma}_{11} = 0, \quad (58)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = 0, \quad (59)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = L \left(\frac{2u_1^+}{\delta_0} + h \frac{d\psi_1}{dx_1} \right). \quad (60)$$

Проинтегрируем второе уравнение системы (29) с учетом граничного условия (35) и связи (55):

$$u_1^{'+} = \frac{D1}{D} \psi_1 + \frac{Q_1}{hD}. \quad (61)$$

Запишем первое уравнение системы (29) с учетом (56), (57) в виде

$$\frac{Lh^2}{3} \psi_1'' = D\psi_1 - D1u_1^{'+}. \quad (62)$$

Из (61), (62) приходим к следующему неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\psi_1'' - \left(\frac{g}{h} \right)^2 \psi_1 = A, \quad (63)$$

где $g^2 = \frac{3(D^2 - D1^2)}{LD} > 0$; $A = -\frac{3D1Q_1}{LDh^3}$.

Запишем общее решение (63):

$$\psi_1 = C_1 e^{-\frac{g}{h}x_1} + C_2 e^{\frac{g}{h}x_1} - \frac{D1Q_1}{h(D^2 - D1^2)}. \quad (64)$$

Из граничного условия (36) и выражения (57) найдем связь постоянных интегрирования

$$C_1 = C_2 e^{\frac{2ag}{h}}. \quad (65)$$

Таким образом, из (64), (65) имеем

$$\psi_1 = C_2 \left(e^{-\frac{g(2a+x_1)}{h}} + e^{\frac{g}{h}x_1} \right) - \frac{D1Q_1}{h(D^2 - D1^2)}, \quad (66)$$

а из (61) и (66) получаем распределение горизонтального перемещения на участке $x_1 \in [-a; 0]$:

$$u_1^+ = C_2 \frac{D1h}{Dg} \left(e^{\frac{g}{h}x_1} - e^{-\frac{g(2a+x_1)}{h}} \right) + \frac{Q_1 x_1 (D^2 - 2D1^2)}{hD(D^2 - D1^2)} + C_3. \quad (67)$$

Рассмотрим решение на участке $x_1 \in (0; \ell]$. Запишем систему (30) с учетом выражений (55)–(60):

$$\begin{cases} \psi_1'' = K2\psi_1 - K3u_1^{'+}, \\ u_1^{'+} = Ku_1^+ + K1\psi_1', \end{cases} \quad (68)$$

где $K = \frac{2L}{h\delta_0 D}$; $K1 = \frac{L+D1}{D}$; $K2 = \frac{3D}{Lh^2 \left(1 + 1.5 \frac{\delta_0}{h} \right)}$;

$$K3 = \frac{3(L+D1)}{Lh^2}.$$

Систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка (68) сведем к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{pmatrix} u_1^+ \\ \psi_1 \\ w \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & K2 & 0 & -K3 \\ K & 0 & K1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \psi_1 \\ w \\ v \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Характеристическое уравнение системы (69) запишем в виде

$$\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0, \quad (70)$$

где $b = K1K3 - K2 - K$; $c = KK2$.

Коэффициенты биквадратного уравнения (70) представим в виде

$$b = -\frac{m}{h\delta_0},$$

$$c = \frac{6}{h^3 \delta_0 \left(1 + 1.5 \frac{\delta_0}{h} \right)},$$

$$m = \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{6(1-\nu)}{(1-2\nu) \left(1 + 1.5 \frac{\delta_0}{h} \right)} \frac{\delta_0}{h} - \frac{1.5}{(1-2\nu)(1-\nu)} \frac{\delta_0}{h} \right).$$

Дискриминант уравнения (70) имеет вид

$$d = \left(\frac{n}{h\delta_0} \right)^2, \quad (71)$$

где $n^2 = m^2 - \frac{24}{\left(1 + 1.5 \frac{\delta_0}{h} \right) h} \frac{\delta_0}{h}$.

На рис. 2 приведем зависимость n^2 от отношения h/δ_0 для различных значений коэффициента Пуассона.

Из приведенных зависимостей видно, что для выбранного коэффициента Пуассона существует пороговое значение отношения h/δ_0 , для которого n^2 становится положительной величиной. При дальнейшем из-

ложении будем рассматривать только такие толщины слоя и консоли, при которых $n^2 > 0$. Из (70) в этом случае получаем собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{m_1}{h\delta_0}}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{m_2}{h\delta_0}},$$

где $m_1 = 0,5(m+n) > 0$; $m_2 = 0,5(m-n) > 0$.

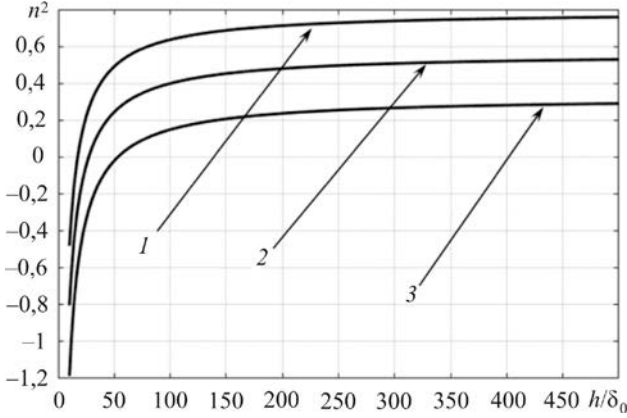


Рис. 2. Зависимость n^2 от отношения h/δ_0 : (1) $\nu = 0,1$; (2) $\nu = 0,2$; (3) $\nu = 0,3$

Fig. 2. Dependence of CC n^2 on ratio h/δ_0 : (1) $\nu = 0,1$; (2) $\nu = 0,2$; (3) $\nu = 0,3$

Запишем решение (69) в следующем виде:

$$u_1^+ = \sum_{j=1}^4 S_j e^{\lambda_j x_1}, \quad (72)$$

$$\Psi_1 = \sum_{j=1}^4 S_j q_j e^{\lambda_j x_1}, \quad (73)$$

где $q_j = 2 \left[\lambda_j (1-\nu) - \frac{(1-2\nu)}{h\delta_0 \lambda_j} \right]$.

При удовлетворении на бесконечности граничных условий (37), (38) получаем $S_1 = S_3 = 0$.

Найдем постоянные C_2, C_3 в (66), (67) и S_2, S_4 в (72), (73) из условий сопряжения решений (31)–(34):

$$\begin{cases} C_2 \frac{D1h}{Dg} \left(1 - e^{-\frac{2ag}{h}} \right) + C_3 = S_2 + S_4, \\ C_2 \left(1 + e^{-\frac{2ag}{h}} \right) - \frac{D1Q_1}{h(D^2 - D1^2)} = S_2 q_2 + S_4 q_4, \\ C_2 \frac{h^2 g}{3} \left(1 - e^{-\frac{2ag}{h}} \right) = S_2 \left(q_2 \lambda_2 \left(\frac{h^3}{3} + \frac{\delta_0 h^2}{2} \right) + h \right) + \\ + S_4 \left(q_4 \lambda_4 \left(\frac{h^3}{3} + \frac{\delta_0 h^2}{2} \right) + h \right), \\ \frac{Q_1}{h} = S_2 (D\lambda_2 - D1q_2) + S_4 (D\lambda_4 - D1q_4). \end{cases} \quad (74)$$

Запишем решение системы (74) в следующем виде:

$$\begin{cases} S_4 = \frac{RR2 - VR3}{R4 - V1R3 - R1R2}, \\ S_2 = V - V1S_4, \\ C_2 = R + R1S_4, \\ C_3 = S_2 + S_4 - C_2 \frac{D1h}{Dg} \left(1 - e^{-\frac{2ag}{h}} \right), \end{cases}$$

где $V = \frac{Q_1}{h(D\lambda_2 - D1q_2)}$; $V1 = \frac{(D\lambda_4 - D1q_4)}{(D\lambda_2 - D1q_2)}$;

$$M = 1 + e^{-\frac{2ag}{h}}; \quad B2 = \frac{D1Q_1}{h(D^2 - D1^2)}; \quad R = \frac{Vq_2 + B2}{M};$$

$$R1 = \frac{q_4 - V1q_2}{M}; \quad R2 = \frac{h^2 g}{3} \left(1 - e^{-\frac{2ag}{h}} \right); \quad R3 = q_2 \lambda_2 \times \\ \times \left(\frac{h^3}{3} + \frac{\delta_0 h^2}{2} \right) + h; \quad R4 = q_4 \lambda_4 \left(\frac{h^3}{3} + \frac{\delta_0 h^2}{2} \right) + h.$$

Рассмотрим упрощенный вариант решения рассмотренной задачи, положив в задании поля перемещений (8), (9) $\psi_1 = \psi_2 = 0$. В этом случае из (29)–(38) с учетом (58) приходим к следующей постановке задачи:

для участка $x_1 \in [-a; 0)$

$$\frac{dQ_{11}^1}{dx_1} = 0, \quad (75)$$

для участка $x_1 \in (0; \ell]$

$$\frac{dQ_{11}^1}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}, \quad (76)$$

с условиями сопряжения

$$u_1^+ \Big|_{x_1=0} = u_1^+ \Big|_{x_1=+0}, \quad (77)$$

$$Q_{11}^1 \Big|_{x_1=0} = Q_{11}^1 \Big|_{x_1=+0} \quad (78)$$

и граничным условием в левом торце

$$Q_{11}^1 \Big|_{x_1=-a} = Q_1 \quad (79)$$

и правом торце

$$Q_{11}^1 \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad (80)$$

где $\bar{\sigma}_{12} = L \left(\frac{2u_1^+}{\delta_0} \right)$; $Q_{11}^1(x_1) = hD \frac{du_1^+}{dx_1}$.

В постановке (75)–(80) связь (76) соответствует постановке «дифференциального сдвига», предложенной в [29] и обсуждаемой в [30].

Решение (75)–(80) запишем в виде

$$\begin{cases} u_1^+ = Q_1 \left(\frac{x_1}{Dh} - \sqrt{\frac{\delta_0}{2LDh}} \right), x_1 \in [-a; 0), \\ u_1^+ = -Q_1 \sqrt{\frac{\delta_0}{2LDh}} e^{-\sqrt{\frac{2L}{Dh\delta_0}} x_1}, x_1 \in [0; \ell). \end{cases} \quad (81)$$

Введем в рассмотрение энергетическое произведение (ЭП) [27] среднее на элементе слоя размером $\delta_0 \times \delta_0$:

$$2\bar{\gamma} = \delta_0 \bar{\varphi}, \quad (82)$$

где $\bar{\varphi} = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} \varphi(x_1) dx_1$; $\varphi(x_1)$ – средняя удельная свободная энергия по толщине слоя.

Из (81) находим

$$2\bar{\gamma} = -\frac{(Q_1)^2}{2} \sqrt{\frac{1}{2LDh\delta_0}} \left(e^{-2\sqrt{\frac{2L\delta_0}{Dh}}} - 1 \right). \quad (83)$$

При $\delta_0/h \rightarrow 0$ выражение (83) принимает постоянное значение

$$2\bar{\gamma}_0 = \frac{(Q_1)^2}{Dh}. \quad (84)$$

Рассмотрим консоль со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $a = 0,1$ м, $h = 0,05$ м, $\nu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. На рис. 3 показано поведение функции $\bar{\gamma}/\bar{\gamma}_0$ в зависимости от десятичного логарифма отношения δ_0/h для единичной внешней нагрузки.

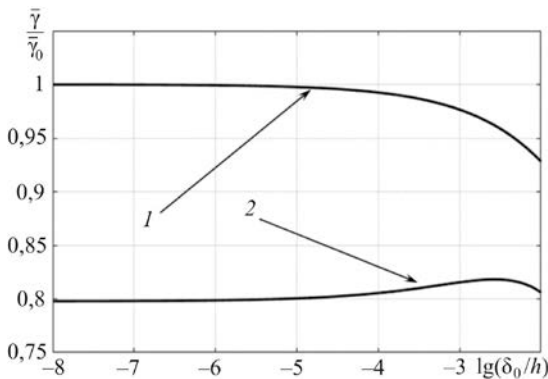


Рис. 3. Зависимость величины ЭП, отнесенной к значению (84), от отношения δ_0/h : 1 – ЭП рассчитано по формуле (83); 2 – ЭП рассчитано на основе формул (72) и (73)

Fig. 3. Dependence of the EP magnitude, referred to the value (84), on the ratio δ_0/h : 1 – EP calculated by the formula (83); 2 – EP calculated on the basis of formulas (72) and (73)

На рис. 3 график 1 определяет соотношение (83), а график 2 построен на основе решений (72), (73). Из полученных зависимостей видно, что имеет место сходимость ЭП. При отношении $\delta_0/h < 10^{-6}$ значения ЭП практически не меняются. Однако учет обжатия консоли дает снижение значения ЭП на 20 %.

Объяснение данному факту можно дать, рассмотрев зависимости деформации в слое $\bar{\epsilon}_{12}^c = \frac{u_1^{+c}}{\delta_0} + \frac{h}{2} \frac{d\psi_1}{dx_1}$

с учетом обжатия и без него; $\bar{\epsilon}_{12}^w = \frac{u_1^+}{\delta_0}$, где u_1^{+c} – горизонтальное перемещение в модели с обжатием. На рис. 4 построены деформации $\bar{\epsilon}_{12}^p$, $p = c, w, 1c, 2c$ в слое с учетом и без учета обжатия консоли, а также слагаемые деформации с учетом обжатия на участке $x_1 \in [0, a/4]$ при толщине слоя, равной $\delta_0 = 10^{-2} h$. График 1 определяет деформацию $\bar{\epsilon}_{12}^w$, график 2 – деформацию $\bar{\epsilon}_{12}^c$, график 3 – слагаемое деформации $\bar{\epsilon}_{12}^{1c} = \frac{u_1^{+c}}{\delta_0}$, график 4 – слагаемое деформации $\bar{\epsilon}_{12}^{2c} = \frac{h}{2} \frac{d\psi_1}{dx_1}$. Значения деформаций отнесены к значению деформации $\bar{\epsilon}_{12}^w$ на торце слоя.

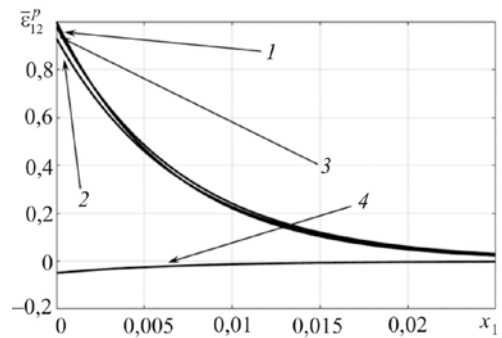


Рис. 4. Зависимость деформаций в слое: 1 – $\bar{\epsilon}_{12}^w$; 2 – $\bar{\epsilon}_{12}^c$; 3 – $\bar{\epsilon}_{12}^{1c}$; 4 – $\bar{\epsilon}_{12}^{2c}$

Fig. 4. Dependence of strains in the layer: 1 – $\bar{\epsilon}_{12}^w$; 2 – $\bar{\epsilon}_{12}^c$; 3 – $\bar{\epsilon}_{12}^{1c}$; 4 – $\bar{\epsilon}_{12}^{2c}$

Из рис. 4 видно, что деформации $\bar{\epsilon}_{12}^{2c}$ имеют противоположный знак и составляют порядка 5 % от деформации $\bar{\epsilon}_{12}^w$ на торце слоя. В итоге деформация в слое $\bar{\epsilon}_{12}^c$ с учетом обжатия консоли составляет около 93 % от деформации $\bar{\epsilon}_{12}^w$.

При толщине слоя $\delta_0 = 10^{-6} h$ характер решения меняется. Деформация $\bar{\epsilon}_{12}^{2c}$ составляет порядка 0,03 % от деформации $\bar{\epsilon}_{12}^w$, и ее можно не принимать во внимание. Однако в этом случае деформация $\bar{\epsilon}_{12}^{1c}$ будет равна 89 % от деформации $\bar{\epsilon}_{12}^w$, что приводит к результату, показанному на рис. 3 для ЭП.

Заключение

Рассмотрено НДС ДКБ-образца, близкое к сдвиговому, в рамках модели слоя взаимодействия. Гипотеза об однородном распределении главных деформаций по толщине консолей позволила получить аналитическое решение задачи. Установлено, что ЭП при стремлении толщины слоя к нулю на некотором отрезке, начиная с порогового значения, практически не зависит от тол-

щины слоя. Определено, что учет обжатия консолей на 20 % уменьшает пороговое значение ЭП. Если в результате эксперимента определить критическое значение внешней нагрузки при заданной толщине консоли, то можно найти критическое пороговое значение ЭП. Универсальность данного значения можно установить, сравнивая величины критических нагрузок, определенных теоретически из условия постоянства ЭП при различных толщинах консолей с результатами экспериментов.

Библиографический список

1. Broberg K.B. Cracks and fracture. – London: Academic Press, UK, 1999. – 752 p.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Thouless M.D., Hutchinson J.W., Liniger E.G. Plane-strain, buckling-driven delamination of thin films: Model experiments and mode-II fracture // *Acta Mater.* – 1992. – Vol. 40. – No. 10. – P. 2639–2649. [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(92\)90333-A](https://doi.org/10.1016/0956-7151(92)90333-A)
4. Samudrala O., Huang Y., Rosakis A.J. Subsonic and intersonic mode II crack propagation with a rate-dependent cohesive zone // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* – 2002. – Vol. 50. – No. 6. – P. 1231–1268. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00129-6](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00129-6)
5. Fang X., Charalambides P.G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2015. – Vol. 149. – P. 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.039>
6. Fang X., Charalambides P.G. A J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2017. – Vol. 169. – P. 35–53. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.010>
7. Davidson B.D., Hu H., Schapery R.A. An analytical crack-tip element for layered elastic structures // *Journal of Applied Mechanics.* – 1995. – Vol. 62. – No. 2. – P. 294–305. DOI:10.1115/1.2895931
8. Bruno D., Greco F., Lonetti P. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables // *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* – 2005. – Vol. 12. – No. 4. – P. 285–304. <https://doi.org/10.1080/15376490590953563>
9. Yarasca J., Mantari J.L., Arciniega R.A. Hermite–Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams // *Composite Structures.* – 2016. – Vol. 140. – No. 15. – P. 567–581. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.015>
10. Todo M., Jar P.-Y.B., Takahashi K. Initiation of a mode-II interlaminar crack from an insert film in the end-notched flexure composite specimen // *Composites Science and Technology.* – 2000. – Vol. 60. – No. 2. – P. 263–272. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(99\)00119-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(99)00119-0)
11. Shahverdi M., Vassilopoulos A.P., Keller T. Mixed-Mode I/II fracture behavior of asymmetric composite joints // *Procedia Structural Integrity.* – 2016. – Vol. 2. – P. 1886–1893. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2016.06.237>
12. Morais A.B. Analysis of the metal adhesively bonded double cantilever beam specimen // *International Journal of Adhesion and Adhesives.* – 2015. – Vol. 61. – P. 8–14. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.04.010>
13. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 18-31-20053 и № 19-41-710001 р_а.

Acknowledgment

The reported study was funded by RFBR according to the research projects No 18-31-20053 and No 19-41-710001 r_a.

14. Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates // *International Journal of Fracture.* – 1988. – Vol. 36. – No. 2. – P. 101–119. <https://doi.org/10.1007/BF00017790>
15. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // *International Journal of Fracture.* – 1990. – Vol. 43. – No. 1. – P. 1–18. <https://doi.org/10.1007/BF00018123>
16. Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams // *Composite Structures.* – 2015. – Vol. 134. – P. 593–601. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.073>
17. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2017. – Vol. 169. – P. 309–320. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.10.013>
18. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2018. – № 4. – С. 93–97. DOI:10.15593/perm.mech/2018.4.08
19. Гаврилкина М.В., Глаголев В.В., Маркин А.А. К решению одной задачи механики разрушения // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 121–127.
20. Глаголев В.В., Маркин А.А. Модель трещины с масштабируемым линейным параметром // *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. науч.-техн. конф.* – Воронеж, 2018. – С. 1082–1087.
21. Prandtl L. Ein Gedankenmodell für den Zerreißvorgang spröder Körper // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* – 1933. – Vol. 13. – S. 129–133. = Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture.* – 2011. – Vol. 171. – No. 2. – P. 105–109. <https://doi.org/10.1007/s10704-011-9637-3>
22. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Изв. АН СССР. МТТ.* – 1968. – № 6. – С. 87–99.
23. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия // *К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова; Ин-т компьютер. исслед.* – Ижевск, 2012. – 180 с.
24. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегавшем горизонтальном пласте // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых.* – 2015. – № 2. – С. 24–33.
25. Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // *Разрушение.* Т. 3 – М.: Мир, 1976. – С. 67–262.

26. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Определение напряженно-деформированного состояния упруго-пластических тел с боковым трещиноподобным дефектом с использованием модели с линейным размером // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 143–154.

27. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

References

1. Broberg K.B. Cracks and fracture. 1999. London, UK, Academic Press, 752 p.

2. Cherepanov G.P. Mekhanika hrupkogo razrusheniya [Mechanics of brittle failure]. Moscow, Nauka, 1974, 640 p.

3. Thouless M.D., Hutchinson J.W., Liniger E.G. Plane-strain, buckling-driven delamination of thin films: Model experiments and mode-II fracture. *Acta Mater.*, 1992, vol. 40, no. 10, pp. 2639–2649. DOI: 10.1016/0956-7151(92)90333-A

4. Samudrala O., Huang Y., Rosakis A.J. Subsonic and intersonic mode II crack propagation with a rate-dependent cohesive zone. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, vol. 50, no. 6, pp. 1231–1268. DOI: 10.1016/S0022-5096(01)00129-6

5. Fang X., Charalambides P.G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 149, pp. 1–17. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.09.039

6. Fang X., Charalambides P.G. A J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, Vol. 169, pp. 35–53. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.11.010

7. Davidsen B.D., Hu H., and Schapery R.A. An analytical crack-tip element for layered elastic structures. *Journal of Applied Mechanics*, 1995, vol. 62, no. 2, pp. 294–305. DOI:10.1115/1.2895931

8. Bruno D., Greco F., Lonetti P. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2005, vol. 12, no. 4, pp. 285–304. DOI: 10.1080/15376490590953563

9. Yarasca J., Mantari J.L., Arciniega R.A. Hermite–Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*, 2016, vol. 140, no. 15, pp. 567–581. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.01.015

10. Todo M., Jar P.-Y.B., Takahashi K. Initiation of a mode-II interlaminar crack from an insert film in the end-notched flexure composite specimen. *Composites Science and Technology*, 2000, vol. 60, no. 2, pp. 263–272. DOI: 10.1016/S0266-3538(99)00119-0

11. Shahverdi M., Vassilopoulos A.P., Keller T. Mixed-Mode I/II fracture behavior of asymmetric composite joints. *Procedia Structural Integrity*, 2016, vol. 2, pp. 1886–1893. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.237

12. Morais A.B. Analysis of the metal adhesively bonded double cantilever beam specimen. *International Journal of Adhe-*

28. Glagolev, V.V., Glagolev, L.V., Markin A.A. Stress-strain state of elastoplastic bodies with crack // *Acta Mechanica Sinica*. – 2015. – Vol. 28. – No. 4. – P. 375–383. DOI:10.1016/S0894-9166(15)30023-9

29. Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten // *Luftfahrtforschung*. – 1938. – Vol. 15. – P. 41–47.

30. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey / L.F.M. Da Silva, P.J.C. das Neves, R.D. Adams, J.K. Spelt // *Int. J. Adhes.* – 2009. – Vol. 29. – No. 3. – P. 319–330. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005>

13. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. Plastiny i obo-lochki [Plates and shells]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 636 p.

14 Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates. *International Journal of Fracture*, 1988, vol. 36, no. 2, pp. 101–119. DOI: 10.1007/BF00017790

15. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. *International Journal of Fracture*, 1990, vol. 43, no. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1007/BF00018123

16. Mantari J.L., Yarasca J. A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams. *Composite Structures*, 2015, vol. 134, pp. 593–601. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.073

17. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 169, pp. 309–320. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.10.013

18. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 93–97. DOI:10.15593/perm.mech/2018.4.08

19. Gavrilkina M.V., Glagolev V.V., Markin A.A. Solution of one problem of fracture mechanics. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no 4, pp. 571–576. DOI: 10.1007/s10808-007-0072-1

20. Glagolev V.V., Markin A.A. Model' treshchiny s masshtabiruemyim linejnym parametrom [Crack model with scalable linear parameter]. Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mekhaniki: sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii (Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics: a collection of works of the International Scientific and Technical Conference). Voronezh, 2018, pp. 1082–1087.

21. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids. *International Journal of Fracture*, 2011, vol. 171, no. 2, pp. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3

22. Entov V.M., Salganik R.L. K modeli hrupkogo razrushe-niya Prandtlya [To the Prandtl model of brittle fracture]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1968, no. 6, pp. 87–99.

23. Salganik R.L., Mishchenko A.A., Fedotov A.A. Model' treshchiny Prandtlya i ee primenenie dlya resheniya zadachi mekhaniki kontaktnogo vzaimodejstviya [Prandtl crack model and its application for solving the problem of contact interaction mechanics]. *Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij*, 2012, 180 p.

24. Salganik R.L., Mishchenko A.A., Fedotov A.A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed. *Journal of Mining Science*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 220-227. DOI: 10.1134/S1062739115020027

25. Makklintok F. Plasticheskie aspekty razrusheniya [Plastic aspects of destruction]. *Razrushenie T. 3, Moscow, Mir*, 1976, pp. 67-262.

26. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Determining the stress-strain state of elastic-plastic solids with a lateral crack-like defect with the use of a model with a linear size. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1085-1094.

27. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of*

Solids and Structures, 2019, vol. 158, pp. 141-149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

28. Glagolev, V.V., Glagolev, L.V., Markin A.A. Stress-strain state of elastoplastic bodies with crack. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2015, vol. 28, no. 4, pp. 375-383. DOI: 10.1016/S0894-9166(15)30023-9

29. Volkersen, O. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung*, 1938, vol. 15, pp. 41-47.

30. Da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K. Analytical models of adhesively bonded joints Part I: Literature survey. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2009, vol. 29, no. 3, pp. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005