

Лолов Д.С., Лилкова-Маркова Св.В. Расчет критической скорости флюида, протекающего в однослойной углеродной нанотрубке в полимерной матрице // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 4. С. 114-119. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.11

Lolov D.S., Lilikova-Markova Sv.V. Determination of the critical velocity of the fluid flowing in a single-walled carbon nanotubes, embedded in a polymer matrix. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 114-119. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.11



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.11

УДК 539.3

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ФЛЮИДА, ПРОТЕКАЮЩЕГО В ОДНОСЛОЙНОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКЕ В ПОЛИМЕРНОЙ МАТРИЦЕ

Д.С. Лолов, Св.В. Лилкова-Маркова

Университет архитектуры, строительства и геодезии, София, Болгария

О СТАТЬЕ

Получена: 11 марта 2019 г.
Принята: 05 сентября 2019 г.
Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

нанотруба, динамическая устойчивость, критическая скорость, упругое основание, дифференциально-квадратичный метод.

АННОТАЦИЯ

Начиная с 1990-х годов прошлого века нанотрубки широко используют в нанофизике, нанобиологии и наномеханике для транспортировки жидкости в виде наноконтейнеров – для хранения газа и для других целей. Они представляют собой полую цилиндрическую структуру диаметром от десятых до нескольких десятков нанометров и длиной от одного микрометра до нескольких сантиметров. Нанотрубки обладают высокой электропроводностью и превосходящей сталь прочностью. Рассмотрение проблемы взаимодействия «жидкость-нанотрубка» на наноуровне сопряжено со значительными трудностями и является дорогостоящим. Это основные причины расчетного исследования динамической устойчивости нанотрубок, транспортирующих жидкость, с использованием модели упругой балки Эйлера или Тимошенко.

В данной статье рассматривается динамическая устойчивость однослойной углеродной нанотрубки, встроенной в полимерную матрицу. Динамика и устойчивость исследовались на основе модели балки Эйлера и применения обобщенного дифференциально-квадратичного метода.

Исследуемая трубка встроена в полимерную матрицу и имеет шарнирное опирание. Для изучения влияния окружающей упругой среды (например, полимера) на устойчивость трубы вводится эластичное основание Пастернака. Представлено дифференциальное уравнение, описывающее поперечные колебания нанотрубки, встроенной в полимерную матрицу. Введены безразмерные параметры. Для дискретизации использована схема Чебышева–Гаусса–Лобато. Коэффициенты рассчитаны с помощью интерполяционных функций Лагранжа. Записана система однородных уравнений в матричной форме.

Исследуется влияние отношения масс (отношения массы жидкости к общей массе жидкости и трубки) на величину критической скорости жидкости (скорость, при которой система теряет устойчивость) при различной изгибной жесткости основания Пастернака. Полученные результаты представлены в графической форме. Сделаны выводы об устойчивости системы. Установлено понижение критической скорости при увеличении массового отношения (отношения массы жидкости к сумме масс жидкости и трубки на единицу длины).

© ПНИПУ

© Лолов Димитр Сенков – к.т.н., доц., e-mail: dlolov@yahoo.com, iD: [0000-0002-8138-0265](https://orcid.org/0000-0002-8138-0265).
Лилкова-Маркова Светлана Велкова – к.т.н., проф., зав. каф., e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg,
iD: [0000-0003-0582-8176](https://orcid.org/0000-0003-0582-8176).

Dimitar S. Lolov – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: dlolov@yahoo.com, iD: [0000-0002-8138-0265](https://orcid.org/0000-0002-8138-0265).
Svetlana V. Lilikova-Markova – CSc in Technical Sciences, Professor, Head of Department,
e-mail: lilkova_fhe@uacg.bg, iD: [0000-0003-0582-8176](https://orcid.org/0000-0003-0582-8176).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

DETERMINATION OF THE CRITICAL VELOCITY OF THE FLUID FLOWING IN A SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBES EMBEDDED IN A POLYMER MATRIX

D.S. Lolov, Sv.V. Lilkova-Markova

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Sofia, Bulgaria

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019
Accepted: 05 September 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

nanotube, dynamic stability, critical stability, elastic foundation, differential quadrature method.

ABSTRACT

Since 90's carbonic nanotubes are broadly used in nanophysics, nanobiology and nanomechanics in nanofluidic devices, nanocontainers for gas storage and nanopipes conveying fluid. They have a perfect hollow cylindrical geometry and superior mechanical strength. The flowing fluid can be water, oil, dynamic flow of methane, ethane and ethylene molecules. The problem of the fluid-structure interaction could be considered in the case of nanoscale. However, the experiments at the nanoscale are difficult and expensive. That is why the continuum elastic models have been used to study the fluid-structure interaction. The carbon nanotubes are considered with Euler- and Timoshenko-beam models.

In this paper the dynamic stability of a single-walled carbon nanotube is investigated on the basis of the Euler-beam model and with the employment of the Generalized Differential Quadrature Method. The tube under investigation is assumed hinged at its both ends and is embedded in a polymer matrix. To study the influence of the surrounding elastic medium (for example, a polymer) on the stability of the pipe, an elastic base of Pasternak is introduced. A differential equation is presented that describes the transverse vibrations of a nanotube embedded in a polymer matrix. Dimensionless parameters are introduced. The scheme of Chebycheva-Gauss-Lobato is used for sampling. The coefficients are calculated using Lagrange interpolation functions. A system of homogeneous equations is written in the matrix form.

The obtained numerical results are for flowing fluids with different densities. In order to study the effect of the surrounding elastic medium (such as polymer) on the stability of the pipe the Pasternak elastic foundation is introduced. The critical velocities of each type of fluid are determined for different stiffnesses of this matrix. A decrease in the critical speed with the increasing mass ratio has been established.

© PNRPU

Введение

Углеродные нанотрубки применяются в различных областях промышленности. Механические свойства этих трубок являются исключительными. Исследования по углеродным нанотрубкам проводятся с момента их открытия в 1991 году.

Ряд статей посвящен динамической устойчивости нанотрубок с текущим флюидом. В [5] показано влияние массы движущегося флюида на собственные частоты и критическую скорость одностенной углеродной нанотрубки. В [1] эти колебания изучаются в случае, когда нанотрубка лежит на упругом основании Винклера.

При исследовании собственных колебаний и устойчивости труб с протекающим флюидом часто применяется дифференциально-квадратичный метод. В [3] с использованием дифференциально-квадратичного метода решены разные задачи и показана его эффективность. В [4] приведены различные схемы дифференциально-квадратичного метода при исследовании колебаний балок для разных граничных условий.

В [2] представлена техника решения некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. В [9] анализируется влияние плотности транспортируемой жидкости, длины трубы и размеров ее поперечного сечения на критическую скорость потока жидкости

в двухслойной нанотрубке. В [10] исследуется динамика труб с флюидом на основаниях Винклера и Пастернака. Труды с [11] по [30] посвящены исследованиям колебаний различных нанотрубок с протекающим флюидом.

В [6] исследована консольная труба с протекающим флюидом. Применен обобщенный дифференциально-квадратичный метод и проведены параметрические исследования устойчивости трубы. В настоящей работе дифференциально-квадратичный метод применяется для определения критической скорости протекающего флюида в однослойной углеродной нанотрубке, лежащей на упругом основании Пастернака. Рассмотрены различные параметры этого упругого основания.

1. Методология

Однослойная углеродная нанотрубка исследуется на динамическую устойчивость с использованием континуальной модели балки Эйлера. Эта модель (рассмотренная в [8]) чрезвычайно проста и надежна в исследованиях такого типа. Эксперименты в области устойчивости углеродных нанотрубок демонстрируют эффективность модели Эйлера [7].

Дифференциальное уравнение, описывающее поперечные колебания нанотрубки с длиной L , изгибной

жесткостью EI , по которой течет флюид со скоростью V , имеет следующий вид:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_f V^2 - k_r) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_w w = 0, \quad (1)$$

где m_f и m_p – масса флюида на единицу длины трубы и масса трубы на единицу длины соответственно; x – осевая координата вдоль оси трубы; t – время; $w(x, t)$ – поперечные перемещения оси трубы; k_w и k_r являются параметрами упругого основания Пастернака, моделирующего полимерную матрицу.

Для нанотрубки с шарнирными опорами на обоих концах применяются следующие граничные условия:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0; \quad \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0. \quad (2)$$

Решение дифференциального уравнения (1) ищется следующим образом:

$$w(x, t) = W(x) e^{\omega t}, \quad (3)$$

где ω – комплексная круговая частота системы.

После подставления выражения (3) в (1) и преобразования получается дифференциальное уравнение

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} + (m_f V^2 - k_r) \frac{d^2 W}{dx^2} + 2m_f V \omega \frac{dW}{dx} + (m_f + m_p) \omega^2 W + k_w W = 0. \quad (4)$$

Для удобства введены следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{L}; \eta = \frac{W}{L}; u = VL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}; \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m_f + m_p}{EI}}; \beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}; \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}; \bar{k}_w = \frac{k_w L^4}{EI}; \bar{k}_r = \frac{k_r L^2}{EI}. \quad (5)$$

Уравнение (4), записанное в безразмерной форме, принимает следующий вид:

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} + (u^2 - \bar{k}_r) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + 2\sqrt{\beta} u \Omega \frac{d\eta}{d\xi} + (\Omega^2 + \bar{k}_w) \eta = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) можно преобразовать в систему алгебраических уравнений дифференциально-квадратичным методом, использованным в [4], [6]. Согласно этому методу значения производных функции $\eta(\xi)$ представляются в виде суммы умноженных с коэффициентами значений функции $\eta(\xi_j)$ в каждой точке оси трубы после дискретизации.

циентами значений функции $\eta(\xi_j)$ в каждой точке оси трубы после дискретизации.

$$\frac{d^n \eta(\xi)}{d\xi^n} \Big|_{\xi=\xi_i} = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^{(n)} \eta(\xi_j), \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

где m – количество точек, которые разделяют нанотрубку на участки; $\beta_{ij}^{(n)}$ – коэффициенты для n -й производной в i -й точке оси трубы.

В настоящей статье ось трубы дискретизируется с использованием схемы Чебышева–Гаусса–Лобато, согласно которой

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{m-1} \pi \right) \right], \quad i = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Коэффициенты рассчитываются с помощью интерполяционных функций Лагранжа [6]:

$$\beta_{ij}^{(1)} = \frac{L^{(1)}(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j) L^{(1)}(\xi_j)}, \quad i, j = 1, \dots, m, i \neq j, \quad (9)$$

$$\beta_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^m \beta_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$\beta_{ij}^{(n)} = n \left(\beta_{ii}^{(n-1)} \beta_{ij}^{(1)} - \frac{\beta_{ij}^{(n-1)}}{\xi_i - \xi_j} \right), \quad i, j = 1, \dots, m; i \neq j; n = 2, \dots, (m-1), \quad (11)$$

$$\beta_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^m \beta_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad n = 2, \dots, (m-1). \quad (12)$$

В формуле (9) первая производная интерполяционных полиномов Лагранжа в каждой точке с ординатой ξ_k вычисляется по формуле

$$L^{(1)}(\xi_k) = \prod_{l=1, l \neq k}^m (\xi_k - \xi_l), \quad k = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Показано, что применение интерполяционных полиномов Лагранжа при дискретизации в схемах Чебышева–Гаусса–Лобато обеспечивает конвергенцию решаемой задачи. Увеличение количества точек приводит к уменьшению ошибки в решении [6].

Применением формул (7), (8), (9), (10), (11), (12) и (13) уравнение (6) представляется следующей системой алгебраических уравнений в точках $i = 3, 4, \dots, (m-2)$ оси трубы:

$$\sum_{j=1}^m \beta_{ij}^{(4)} \eta(\xi_j) + (u^2 - \bar{k}_r) \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^{(2)} \eta(\xi_j) + 2\Omega u \sqrt{\beta} \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^{(1)} \eta(\xi_j) + (\Omega^2 + \bar{k}_w) \eta(\xi_i) = 0. \quad (14)$$

Граничные условия (2) записываются следующим образом:

$$\eta(\xi_1) = \eta(\xi_m) = 0; \quad \sum_{j=1}^m \beta_{1j}^{(2)} \eta(\xi_j) = \sum_{j=1}^m \beta_{mj}^{(2)} \eta(\xi_j) = 0. \quad (15)$$

Уравнение (14), записанное в матричной форме, дает следующую форму:

$$\begin{aligned} & (B^{(4)} + (u^2 - \bar{k}_r)B^{(2)} + 2\Omega u \sqrt{\beta} B^{(1)})\delta + \\ & + (\Omega^2 + \bar{k}_r)I\delta_d = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

В (16)

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(4)} &= \beta_{ij}^{(4)}; \quad B_{ij}^{(2)} = \beta_{ij}^{(2)}; \quad B_{ij}^{(1)} = \beta_{ij}^{(1)}, \\ i &= 3, 4, \dots, (m-2), \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (17)$$

являются матрицами размерностью $(m-4) \times m$. Векторы

$$\delta = \{ \eta(\xi_1), \dots, \eta(\xi_m) \}^T, \quad (18)$$

$$\delta_d = \{ \eta(\xi_3), \dots, \eta(\xi_{m-2}) \}^T. \quad (19)$$

Четыре граничных условия записываются в матричной форме:

$$K_b \delta = 0, \quad (20)$$

где матрица K_b имеет размерность $(4 \times m)$ и следующий вид:

$$K_b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{11}^{(2)} & \beta_{12}^{(2)} & \beta_{13}^{(2)} & \dots & \beta_{1m}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \beta_{m1}^{(2)} & \beta_{m2}^{(2)} & \beta_{m3}^{(2)} & \dots & \beta_{mm}^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Уравнения (16) и (20) могут быть записаны в системе m алгебраических уравнений с m неизвестными:

$$\begin{aligned} & \left| B^{(4)} + (u^2 - \bar{k}_r)B^{(2)} + 2\Omega u \sqrt{\beta} B^{(1)} \right| \delta + \\ & + \begin{vmatrix} 0 \\ (\Omega^2 + \bar{k}_w)I \end{vmatrix} \delta_d = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

После преобразований уравнение (22) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{vmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ B_{db}^{(4)} & B_{dd}^{(4)} \end{vmatrix} + (u^2 - \bar{k}_r) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ B_{db}^{(2)} & B_{dd}^{(2)} \end{vmatrix} + 2\Omega u \sqrt{\beta} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ B_{db}^{(1)} & B_{dd}^{(1)} \end{vmatrix} \right) \times \\ & \times \begin{vmatrix} \delta_b \\ \delta_d \end{vmatrix} + (\Omega^2 + \bar{k}_w) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_b \\ \delta_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$K_{bb} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{11}^{(2)} & \beta_{12}^{(2)} & \beta_{1(m-1)}^{(2)} & \beta_{1m}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_{m1}^{(2)} & \beta_{m2}^{(2)} & \beta_{m(m-1)}^{(2)} & \beta_{mm}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (24)$$

$$K_{bd} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{13}^{(2)} & \beta_{14}^{(2)} & \dots & \beta_{1(m-2)}^{(2)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{m3}^{(2)} & \beta_{m4}^{(2)} & \dots & \beta_{m(m-2)}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (25)$$

$$B_{db}^{(4)} = \begin{vmatrix} \beta_{31}^{(4)} & \beta_{32}^{(4)} & \beta_{3(m-1)}^{(4)} & \beta_{3m}^{(4)} \\ \beta_{41}^{(4)} & \beta_{42}^{(4)} & \beta_{4(m-1)}^{(4)} & \beta_{4m}^{(4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{(m-3)1}^{(4)} & \beta_{(m-3)2}^{(4)} & \beta_{(m-3)(m-1)}^{(4)} & \beta_{(m-3)m}^{(4)} \\ \beta_{(m-2)1}^{(4)} & \beta_{(m-2)2}^{(4)} & \beta_{(m-2)(m-1)}^{(4)} & \beta_{(m-2)m}^{(4)} \end{vmatrix} \quad (26)$$

$$B_{dd}^{(4)} = \begin{vmatrix} \beta_{33}^{(4)} & \beta_{34}^{(4)} & \dots & \beta_{3(m-2)}^{(4)} \\ \beta_{43}^{(4)} & \beta_{44}^{(4)} & \dots & \beta_{4(m-2)}^{(4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{(m-2)3}^{(4)} & \beta_{(m-2)4}^{(4)} & \dots & \beta_{(m-2)(m-2)}^{(4)} \end{vmatrix} \quad (27)$$

$$\delta_b = \{ \eta(\xi_1) \eta(\xi_2) \eta(\xi_{(m-1)}) \eta(\xi_m) \}^T, \quad (28)$$

$$\delta_d = \{ \eta(\xi_3) \eta(\xi_4) \dots \eta(\xi_{(m-3)}) \eta(\xi_{(m-2)}) \}^T. \quad (29)$$

Учитывается, что

$$\delta_b = -K_{bb}^{-1} K_{bd} \delta_d. \quad (30)$$

В результате получается система с $(m-4)$ уравнениями и $(m-4)$ неизвестными:

$$\begin{aligned} & (B_{dd}^{(4)} - B_{db}^{(4)} K_{bb}^{-1} K_{bd}) \delta_d + (u^2 - \bar{k}_r) (B_{dd}^{(2)} - B_{db}^{(2)} K_{bb}^{-1} K_{bd}) \delta_d + \\ & + 2\Omega u \sqrt{\beta} (B_{dd}^{(1)} - B_{db}^{(1)} K_{bb}^{-1} K_{bd}) \delta_d + (\Omega^2 + \bar{k}_w) I \delta_d = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Чтобы уравнение (31) имело ненулевое решение, определитель перед вектором δ_d должен быть нулевым. Этот определитель является функцией неизвестной критической скорости u_{cr} и неизвестной круговой частоты $\Omega = \text{Re}\Omega + i\text{Im}\Omega$. В случае когда $\text{Re}\Omega < 0$, система устойчива. Если $\text{Re}\Omega > 0$, система теряет свою стабильность. Если $\text{Re}\Omega = 0$, система находится в состоянии безразличного равновесия.

Следующая вычислительная процедура используется для определения критической скорости: задается конкретное значение u_{cr} , и из условия, что определитель перед вектором δ_d в уравнении (31) равен нулю, определяется круговая частота Ω , на основе которой система оценивается как стабильная.

2. Численные исследования

Для иллюстрации предложенного метода исследована устойчивость однослойной углеродной нанотрубки с внешним радиусом поперечного сечения $R = 55 \text{ нм}$ и толщиной $h = 10 \text{ нм}$. Длина трубки $L = 2000 \text{ нм}$. Трубка имеет шарнирное опирание. Исследованы случаи жидкостей с плотностями в диапазоне $\rho = [700; 1600] \text{ кг/м}^3$. Определена критическая скорость флюида V_{cr} для параметров упругого основания Пастернака $k_w = 100 \text{ кПа}$;

$k_r = 100 \text{ Нм/м}$ и $k_w = 100 \text{ кПа}$; $k_r = 200 \text{ Нм/м}$. Полученные результаты представлены на рисунке. Параметры k_w и k_r соответствуют механическим характеристикам полимерной матрицы, в которую вставлена исследованная нанотрубка.

Исследования показали, что при $m > 14$ представленные результаты для разных значений m довольно похожи. Наблюдаемые отклонения $< 4\%$.

Выводы

Из графика на рисунке видно, что снижение жесткости k_r упругого основания оказывает стабилизирующее воздействие на систему. В пределах исследуемого интервала β более высокие критические скорости флюида получены для упругого основания с меньшей жесткостью k_r . В обоих исследованных упругих осно-

ваниях видно снижение критической скорости при увеличении массового отношения β .

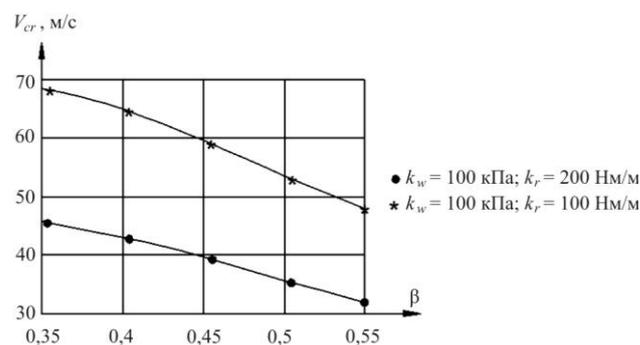


Рис. Зависимость критической скорости флюида V_{cr} от массового отношения β

Fig. Dependence of the critical fluid velocity V_{cr} and the mass ratio β

Библиографический список

1. Belhadi A., Boukhalfa A., Belalia S.A. Free vibration modeling of single-walled carbon nanotubes using the differential quadrature method // *Mathematical Modeling of Engineering Problems*. – 2017. – Vol. 4. – No. 1. – С. 33–37.
2. Bellman R., Kashef B.G., Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. – 1972 – Vol. 10. – P. 40–52.
3. Bert C.W., Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review // *Applied Mechanics Reviews* – 1996 – Vol. 49. – P. 1–27.
4. Ng C.H.W., Zhao Y. Xiang, G.W. We. On the accuracy and stability of a variety of differential quadrature formulations for the vibration analysis of beams // *International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS)* – 2009. – Vol. 1. – Iss. 4. – P. 1–25.
5. Free vibration analysis of fluid conveying single-walled carbon nanotubes / C.D. Reddy, C. Lu, S. Rajendran, K.M. Liew // *Applied Physics Letters*. – 2007. – Vol. 90 – P. 133.
6. Critical flow speeds of pipes conveying fluid using Generalized Quadrature Method / F. Tornabene, A. Marzani, E. Viola, I. Elishakoff // *Adv. Theor. Appl. Mech.* – 2010. – No. 3. – С. 121–138.
7. Yoon J., Ru C., Mioduchowski A. Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid // *Composites Science and Technology* – 2005 – No. 65. – С. 1326–1336.
8. Лилкова-Маркова Св.В., Лолов Д.С. Устойчивост на тръби с протичащ флуид. – София: ABC Техника, 2016. – 124 с.
9. Lolov D.S., Lilkova-Markova Sv.V. Dynamic stability of double-walled carbon nanotubes // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. – 2018. – Vol. 12. – No. 1 – С. 1–8.
10. Lilkova-Markova Sv.V., Lolov D.S. Free and forced vibrations of a pipe on Winkler and Pasternak elastic foundations // *Beams and Frames on Elastic Foundation 3*. – Ostrava, 2010. – P. 337–343.
11. Hanasaki I., Nakatani A. Water flow through carbon nanotube junctions as molecular convergent nozzles // *Nanotechnology*. – 2006. – Vol. 17 (11) – С. 2794–2804.
12. Anomalous immobilized water: a new water phase induced by confinement in nanotubes / R.J. Mashl, S. Joseph, N.R. Aluru, E. Jakobsson // *Nano Lett.* – 2003 – Vol. 3 – P. 589–592.
13. Sokhan V.P., Nicholson D., Quirke N. Fluid flow in nanopores: an examination of hydrodynamic boundary conditions // *J. Chem. Phys.* – 2001 – Vol. 115 (8). – P. 3878–3887.
14. Molecular dynamics simulation of contact angle of water droplet in carbon nanotubes / T. Werder, J.H. Walther, R.L. Jaffe, T. Halicioglu, F. Noca, P. Koumoutsakos // *Nano Lett.* – 2001. – Vol. 1. – С. 697–702.
15. Rapid transport of gases in CNTs / A. Skoulidas, D.M. Ackerman, K.J. Johnson, D.S. Sholl // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 89 (6). – P. 185–901.
16. Dynamics of fluid flow inside CNTs / R.E. Tuzun, D.W. Noid, B.G. Sumpter, R.C. Merkle // *Nanotechnology*. – 1996. – Vol. 7. – P. 241–246.
17. Mahan G.D. Oscillations of a thin hollow cylinder: carbon nanotubes // *Phys. Rev.* – 2002. – B 65. – P. 235.
18. Popov V.N., Doren V.E. Van, Balkanski M. Elastic properties of single-walled carbon nanotubes // *Phys. Rev.* – 2000. – B 61. – P. 3078–3084.
19. Gogotsi Y. In situ multiphase fluid experiments in hydrothermal CNTs // *Appl. Phys. Lett.* – 2001. – Vol. 79. – P. 1021–1023.
20. Pozhar L.A., Structure and dynamics of nanofluids: theory and simulations to calculate viscosity // *Phys. Rev.* – 2000. – E 61 (2). – P. 1432.
21. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A. Sound wave propagation in multiwall carbon nanotubes // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol. 93 (8). – P. 4801.
22. Supple S., Quirke N. Rapid imbibition of fluids in CNTs // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol. 90. – P. 214.
23. Mao Z., Sinnott S.B. A computational study of molecular diffusion and dynamics flow through CNTs // *J. Chem. Phys.* – 2000. – B 104. – С. 4618–4624.
24. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A. Noncoaxial resonance of an isolated multi-walled carbon nanotubes // *Phys. Rev.* – 2002. – B 66.

25. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A. Flow-induced flutter instability of cantilever CNTs // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – Vol. 43. – P. 3337–3349.

26. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A. Vibration and instability of CNTs conveying fluid // *Compos. Sci. Technol.* – 2005. – Vol. 65 – P. 1326–1336.

27. Wang X.Y., Wang X., Sheng G.G. The coupling vibration of fluid-filled carbon nanotubes // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2007. – Vol. 40 – P. 2563–2572.

References

1. Belhadi A., Boukhalifa A., Belalia S.A. Free vibration modeling of single-walled carbon nanotubes using the differential quadrature method. *Mathematical modeling of engineering problems*, 2017, vol. 4, no.1, pp. 33-37.

2. Bellman R., Kashef B.G., Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 1972, vol. 10, pp. 40-52.

3. Bert C.W., Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review. *Applied Mechanics Reviews*. 1996, vol. 49, pp. 1-27.

4. Ng C.H.W., Zhao, Y. Xiang, G. W. We. On the accuracy and stability of a variety of differential quadrature formulations for the vibration analysis of beams. *International journal of engineering and applied sciences (IJEAS)*, 2009, vol.1, is. 4, pp.1-25.

5. Reddy, C.D., Lu C., S. Rajendran S., Liew, K.M. Free vibration analysis of fluid conveying single-walled carbon nanotubes. *Applied Physics Letters*, 2007, no. 90, pp.133.

6. Tornabene, F., Marzani, A., Viola, E., Elishakoff I. Critical flow speeds of pipes conveying fluid using Generalized Quadrature Method. *Adv. Theor. Appl. Mech.*, 2010, no.3, pp. 121-138.

7. Yoon, J., Ru, C., Mioduchowski, A. Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid. *Composites Science and Technology*, 2005, no.65, pp. 1326-1336.

8. Lilkova-Markova Sv. V., Lolov D.S. Stability of pipes conveying fluid. *Softia, ABC Technika*, 2016, 124 p.

9. Lolov D.S., Lilkova-Markova Sv. V. Dynamic stability of double-walled carbon nanotubes. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2018, vol.12, no 1, pp.1-8.

10. Lilkova-Markova Sv. V., Lolov D.S. Free and forced vibrations of a pipe on Winkler and Pasternak elastic foundations. *Beams and frames on elastic foundation 3, Ostrava*, 2010, pp. 337-343.

11. Hanasaki I., Nakatani A., Water flow through carbon nanotube junctions as molecular convergent nozzles. *Nanotechnology*, 2006, vol. 17, no. 11 pp. 2794-2804.

12. Mashl R.J., Joseph S., Aluru N.R., Jakobsson E., Anomalous immobilized water: a new water phase induced by confinement in nanotubes. *Nano Lett*, 2003, no. 3, pp. 589-592.

13. Sokhan V.P., Nicholson D., Quirke N., Fluid flow in nanopores: an examination of hydrodynamic boundary conditions. *J. Chem. Phys.*, 2001, vol. 115, no. 8, pp. 3878-3887.

14. Werder T., Walther J.H., Jaffe R.L., Halicioglu T., Noca F., Koumoutsakos P., Molecular dynamics simulation of contact angle of water droplet in carbon nanotubes. *Nano Lett.*, 2001, no. 1, pp. 697-702.

28. Dong K., Wang X. Wave propagation in carbon nanotubes under shear deformation // *Nanotechnology*. – 2006. – Vol. 17. – P. 2773–2782.

29. Dong K., Wang X., Sheng G.G. Wave dispersion characteristics in fluid-filled carbon nanotubes embedded in an elastic medium // *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* – 2007. – Vol. 15 – P. 427–439.

30. Anomalous potential barrier of double-wall carbon nanotube / R. Saito, R. Matsuo, T. Kimura, G. Dresselhaus, M.S. Dresselhaus // *Chem. Phys. Lett.* – 2001. – Vol. 348. – P. 187–193.

15. Skoulidas A., Ackerman D.M., Johnson K.J., Sholl D.S., Rapid transport of gases in CNTs. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 89, no. 6, pp. 185-901.

16. Tuzun R.E., Noid D.W., Sumpter B.G., Merkle R.C. Dynamics of fluid flow inside CNTs *Nanotechnology*, 1996, no. 7, pp. 241-246.

17. Mahan G.D., Oscillations of a thin hollow cylinder: carbon nanotubes. *Phys. Rev.*, 2002, B 65, pp. 235.

18. Popov V.N., Van Doren V.E., Balkanski M., Elastic properties of single-walled carbon nanotubes. *Phys. Rev.*, 2000, B 61, pp. 3078-3084.

19. Gogotsi Y., In situ multiphase fluid experiments in hydrothermal CNTs. *Appl. Phys. Lett.*, 2001, vol. 79, pp. 1021-1023.

20. Pozhar L.A., Structure and dynamics of nanofluids: theory and simulations to calculate viscosity. *Phys. Rev.*, 2000, E 61 (2), pp. 1432.

21. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A., Sound wave propagation in multiwall carbon nanotubes. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 93, no. 8, pp. 4801.

22. Supple S., Quirke N., Rapid imbibition of fluids in CNTs. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 90, pp. 214.

23. Mao Z., Sinnott S.B., A computational study of molecular diffusion and dynamics flow through CNTs. *J. Chem. Phys.*, 2000, B 104, pp. 4618-4624.

24. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A., Noncoaxial resonance of an isolated multi-walled carbon nanotubes. *Phys. Rev.*, 2002, B 66.

25. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A, Flow-induced flutter instability of cantilever CNTs, *Int. J. Solids Struct.*, 2006 no. 43, pp. 3337-3349.

26. Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A, Vibration and instability of CNTs conveying fluid. *Compos. Sci. Technol*, 2005, no. 65, pp. 1326-1336.

27. Wang X.Y., Wang X., Sheng G.G., The coupling vibration of fluid-filled carbon nanotubes. *J. Phys. D: Appl. Phys*, 2007, no. 40, pp.2563-2572.

28. Dong K., Wang X., Wave propagation in carbon nanotubes under shear deformation. *Nanotechnology*, 2006, no. 17, pp. 2773-2782.

29. Dong K., Wang X., Sheng G.G., Wave dispersion characteristics in fluid-filled carbon nanotubes embedded in an elastic medium. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2007, 15, pp. 427-439.

30. Saito R., Matsuo R., Kimura T., Dresselhaus G., Dresselhaus M.S., Anomalous potential barrier of double-wall carbon nanotube. *Chem. Phys. Lett.*, 2001, no. 348, pp.187-193.