



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.12

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ЖЕСТКИМ ВНЕШНИМ ПОКРЫТИЕМ

А.Н. Прокудин, С.В. Фирсов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 12 сентября 2019 г.
Принята: 07 декабря 2019 г.
Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

вращающийся цилиндр, полый цилиндр, плоская деформация, упругопластичность, пластическое течение, закон Гука, условие Треска–Сен-Венана, повторное пластическое течение, остаточные напряжения.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается вращающийся полый цилиндр с закрепленными торцами, внутренняя поверхность которого свободна от напряжений, а внешняя зафиксирована от радиальных перемещений. Предполагается, что цилиндр изготовлен из идеального изотропного упругопластического материала, а деформации в нем являются малыми и представляют собой сумму упругих и пластических деформаций. Напряжения связаны с упругими деформациями законом Гука. Пластические деформации определяются с помощью условия Треска–Сен-Венана и ассоциированного с ним закона пластического течения. Скорость вращения цилиндра сначала монотонно возрастает до максимального значения, а затем снижается до нуля.

С помощью упругого решения найдена зависимость для критической скорости вращения, при которой начинается пластическое течение. Установлено, что в зависимости от толщины цилиндра и коэффициента Пуассона пластическое течение может начаться как на внутренней, так и на внешней поверхности цилиндра. При этом на стадии нагрузки в цилиндре появляются три пластические области, а на стадии разгрузки – четыре. Эти области соответствуют двум граням и двум ребрам призмы Треска.

Для каждой пластической области найдено точное аналитическое решение определяющей системы уравнений. Приведены системы условий на границах между областями, обеспечивающие непрерывность полученных решений во всем цилиндре. Рассмотрены два случая с пластическим течением, впервые начинающимся на внутренней поверхности цилиндра и на внешней поверхности цилиндра. Получены аналитические выражения для скоростей вращения, при которых появляются новые области. Установлена зависимость между скоростями зарождения повторного и первичного пластического течения. Также найдено значение максимальной скорости вращения, достаточное для полного перехода цилиндра в состояние повторного пластического течения. Выявлено, что введение жесткого внешнего покрытия позволяет значительно увеличить ресурс эксплуатируемой детали.

© ПНИПУ

© Прокудин Александр Николаевич – к.т.н., в.н.с., e-mail: sunbeam_85@mail.ru, [iD: 0000-0002-5156-424X](https://orcid.org/0000-0002-5156-424X).
Фирсов Сергей Викторович – м.н.с., e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, [iD: 0000-0001-7446-6231](https://orcid.org/0000-0001-7446-6231).

Prokudin A. Nikolaevich – CSc in Technical Sciences, Leading Researcher, e-mail: sunbeam_85@mail.ru, [iD: 0000-0002-5156-424X](https://orcid.org/0000-0002-5156-424X).

Firsov S. Viktorovich – Junior Researcher, e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, [iD: 0000-0001-7446-6231](https://orcid.org/0000-0001-7446-6231).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF A ROTATING HOLLOW CYLINDER WITH A RIGID CASING

A.N. Prokudin, S.V. Firsov

Institute of machinery and metallurgy FEB RAS,
Komsomolsk-na-Amure, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 12 September 2019
Accepted: 07 December 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

rotating cylinder, hollow cylinder, plain strain, elastoplasticity, plastic flow, Hooke's law, Tresca – Saint-Venant condition, secondary plastic flow, residual stresses.

ABSTRACT

A rotating hollow cylinder with fixed ends is considered, the inner surface of which is free of stresses, and the outer one is fixed from radial movements. It is assumed that the cylinder is made of an ideal isotropic elastoplastic material, and the deformations in it are small and represent the sum of elastic and plastic deformations. Stresses are associated with elastic deformations by Hooke's law. Plastic deformations are determined using the Tresca – Saint-Venant condition and the plastic flow rule associated with it. The cylinder rotation speed first monotonically increases to a maximum value, and then decreases to zero.

By using the elastic solution, the dependence is found for the critical rotation speed at which the plastic flow begins. It is established that, depending on the thickness of the cylinder and the Poisson's ratio, plastic flow can begin, either on the inner or on the outer surface of the cylinder. In addition, 3 plastic regions appear in the cylinder at the loading stage, and 4 plastic regions appear at the unloading stage. These regions correspond to two faces and two edges of the Tresca prism.

For each plastic region, an exact analytical solution of the determining system of equations is found. The system of conditions at the boundaries between the regions providing continuity of the obtained solutions throughout the cylinder is given. Two cases are considered, i.e. the case with a plastic flow which starts first on the inner, and then on the outer surface of the cylinder. Analytical expressions are obtained for rotational speeds at which new regions appear. The relationship between the nucleation rates of the secondary and primary plastic flow is established. The value of the maximum rotation speed sufficient for a complete transition of the cylinder to the state of the secondary plastic flow was also found. It has been revealed that the adding of a rigid casing can significantly increase the resource of an exploited part.

© PNRPU

Введение

Расчет напряжений во вращающихся дисках и валах относится к классическим задачам механики деформируемых твердых тел. Опубликовано множество научных трудов, посвященных решению данных задач в различных постановках. Обычно рассматривается три варианта кинематики задачи. Это цилиндры с закрепленными концами, свободными концами и диски различных профилей. Решение подобных задач входит в различные монографии и учебники [1–9]. Так, С.П. Тимошенко впервые [4] предложил рассчитывать распределения напряжений в форме решения соответствующей краевой задачи теории упругости. Для упругих тел данную задачу можно считать принципиально решенной после того, как А.И. Лурье получил общее решение этой задачи [5] с произвольной зависимостью упругого потенциала от инвариантов тензора конечных деформаций. В работах [10–13] рассмотрены задачи упругого деформирования вращающихся цилиндров из функционально-градиентных материалов. В работе [14] приведено решение задачи вязкоупругого деформирования сплошных и полых цилиндров из функционально-градиентных материалов. Вращение гиперупругих цилиндров приводится в работах [15–17].

Необратимое деформирование материала вращающегося цилиндра в рамках жесткопластического анализа рассмотрел впервые А. Надаи [6]. Изучению дефор-

мирования вращающихся дисков в условиях ползучести посвящена работа Ю.Н. Работнова [2]. Также можно отметить работы [18–21], посвященные изучению деформации ползучести вращающихся цилиндров. Упругопластическое деформирование впервые было рассмотрено в [22]. Но построенное решение, как позже было показано в [23], имело неисправимый изъян, заключающийся в том, что не обеспечивалась непрерывность перемещений на упругопластической границе. В отечественной учебно-методической литературе последнее обстоятельство называют «ошибкой К. Шевченко» [24]. Проявляется такая ошибка в попытках получить решение упругопластических задач в скоростях без должного отслеживания выполнения требования непрерывности перемещений на упругопластических границах. В работах [23, 25] приводится корректное решение упругопластической задачи для вращающегося цилиндра с закрепленными концами. Остаточные напряжения и деформации в сплошном цилиндре после его остановки получены в работе [26]. Полый цилиндр с закрепленными концами исследовался в [27].

Сплошной и полый вращающиеся цилиндры со свободными концами рассматривались в работах [28] и [29] соответственно. В работе [30] приводится сравнение результатов численных расчетов вращающихся сплошного и полого дисков для условий пластичности Треска и Мизеса. Полуаналитическое решение для сплошного диска при использовании условия Мизеса

приведено в [31]. В работе [32] рассматривался вращающийся сплошной цилиндр из линейно-упрочняющегося упругопластического материала как с закрепленными, так и со свободными концами. Вращающийся цилиндр с нелинейным законом упрочнения рассматривался в работе [33]. Упругопластический анализ сплошных и полых цилиндров из функционально-градиентных материалов рассмотрен в работах [34–37]. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра со свободными и закрепленными торцами рассматривалось в работе [38]. В последнее время приобрела актуальность задача нахождения остаточных напряжений в трубе после вращения. Решение данной задачи используется для описания процесса автофретирования труб за счет вращения [39–43].

Из обзора материалов, посвященных вращающимся дискам и цилиндрам, можно видеть, что большинство работ посвящены рассмотрению сплошных и полых тел. Случаев, когда в качестве граничных условий выступают перемещения, гораздо меньше. Среди таких работ можно отметить [44–46], где рассматривался вращающийся диск с жестким включением, и [47] – с полностью зафиксированным диском.

Целью данной работы является получение точного решения задачи об упругопластическом деформировании вращающегося полого цилиндра с зафиксированной радиальной компонентой перемещений на внешней границе. Полученное в итоге решение позволит вычислить напряженно-деформированное состояние (НДС) в таком цилиндре в любой момент времени. Также оно позволит выяснить, какое влияние на НДС окажет введение жесткого ограничения на радиальную компоненту вектора перемещений на внешней граничной поверхности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую среду с упругими и пластическими свойствами. Цилиндр ограничен двумя поверхностями $r = a$ и $r = b$ ($b > a$). Граничная поверхность $r = b$ полагается жестко зафиксированной, $r = a$ – свободной. Положим, что такой цилиндр вращается с угловой скоростью $\omega(t)$. В начальный момент времени $\omega(0) = 0$. В дальнейшем скорость вращения постепенно увеличивается до значения $\omega = \omega_{\max}$. После достижения этого значения скорость начинает плавно снижаться вплоть до полной остановки вращения. В цилиндрической системе координат r, θ, z для изотропного материала получим одномерный процесс деформирования относительно координаты r . Для общности приведем ее к безразмерному виду:

$$\beta = \frac{r}{b}; \quad \delta = \frac{a}{b}; \quad 0 < \delta \leq \beta \leq 1.$$

Деформации в материале будем считать малыми и состоящими из упругих $e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{zz}$ и пластических $p_{rr}, p_{\theta\theta}, p_{zz}$. Ненулевыми компонентами деформаций в нашем случае будут только компоненты d_{rr} и $d_{\theta\theta}$ тензора полных деформаций:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}; \quad d_{\theta\theta} = e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta};$$

$$d_{zz} = e_{zz} + p_{zz} = 0, \quad (1)$$

где $u = u_r / b$ – безразмерные перемещения.

Напряжения в деформируемом слое обуславливаются упругими деформациями в соответствии с законом Гука:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\theta\theta} + \nu e_{zz});$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}); \quad (2)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + \nu e_{\theta\theta} + (1-\nu)e_{zz}),$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; σ_y – предел текучести.

Соотношения, обратные к (2), имеют вид

$$e_{rr} = \frac{\sigma_y}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{zz}); \quad e_{\theta\theta} = \frac{\sigma_y}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{zz});$$

$$e_{zz} = \frac{\sigma_y}{E} (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}). \quad (3)$$

Будем считать угловое ускорение достаточно малым, чтобы можно было пренебречь силой инерции, определяемой вращательным ускорением. Это позволяет оставаться в рамках одномерности. В таком случае единственное уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega \beta; \quad \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_y} \geq 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность материала.

Для учета пластических свойств деформируемого слоя воспользуемся теорией пластического течения. Для задания поверхности нагружения возьмем условие пластичности Треска–Сен-Венана, в нашем случае принимающее вид

$$f = \max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|) - 1 = 0. \quad (5)$$

Ассоциированный закон пластического течения запишется в виде

$$dp_{rr} = \lambda \frac{df}{d\sigma_{rr}}; \quad dp_{\theta\theta} = \lambda \frac{df}{d\sigma_{\theta\theta}}; \quad dp_{zz} = \lambda \frac{df}{d\sigma_{zz}}, \quad (6)$$

где λ – положительный коэффициент.

Использование закона (6) вместе с условием (5) приводит к пластической несжимаемости. Из чего следует, что объемная деформация является чисто упругой. Исходя из этого и соотношений (1), (3) получим

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}). \quad (7)$$

2. Построение математической модели

Граничные условия для полого цилиндра с внешней зафиксированной границей запишутся в виде

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Разобьем процесс деформирования на стадии. При росте скорости – упругое деформирование, упругопластическое и полная пластичность. При снижении скорости – упругое деформирование, появление повторного пластического течения. Рассмотрим более подробно данный процесс.

2.1. Упругое деформирование

Из соотношений (1), (2), (4), с учетом равенства нулю пластических деформаций, получим дифференциальное уравнение, решение которого примет вид

$$u = \frac{1}{2} D_1 \beta^2 + \frac{D_2}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{\Omega}{1-\nu} \beta^3, \quad (8)$$

где D_1, D_2 – константы интегрирования. Напряжения примут значения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{D_1 \beta^2 - 2D_2(1-2\nu)}{2\beta^2(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} \beta^2 \Omega, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{D_1 \beta^2 + 2D_2(1-2\nu)}{2\beta^2(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8} \frac{1+2\nu}{1-\nu} \beta^2 \Omega; \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (9)$$

Для текущих граничных условий константы интегрирования D_1, D_2 рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{1-2\nu+(3-2\nu)\delta^4}{4(1-\nu)\delta^2+1-2\nu} \Omega; \\ D_2 &= \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{1-(3-2\nu)\delta^2}{8(1-\nu)\delta^2+1-2\nu} \delta^2 \Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Полученное упругое решение (8)–(10) справедливо для скоростей $\Omega < \Omega_1$. Выход на поверхность нагружения может происходить как на внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$, так и на внешней $\beta = 1$. Найдем значения скоростей, при которых это происходит. На внутренней границе напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, на внешней – $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Условие пластичности (5) на внутренней поверхности примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1,$$

а на внешней

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1; \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1.$$

Используя полученные условия пластичности и упругое решение (9), (10), получим следующие скорости начала пластического течения:

$$\begin{aligned} \Omega_1^i &= 4 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\delta^2+1-2\nu}{(1-\delta^2)^2}; \\ \Omega_1^o &= 4 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\delta^2+1-2\nu}{(1-\delta^2)(1-2\nu+\delta^2(3-2\nu))}. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнив их, приходим к выводу, что при $\delta = \sqrt{\nu/(2-\nu)}$ пластическое течение начнется одновременно на двух граничных поверхностях (рис. 1). При больших значениях δ – на внешней граничной поверхности. При меньших – на внутренней. Отметим, что при $\delta > 1/\sqrt{3}$ пластическое течение всегда будет начинаться на внешней границе.

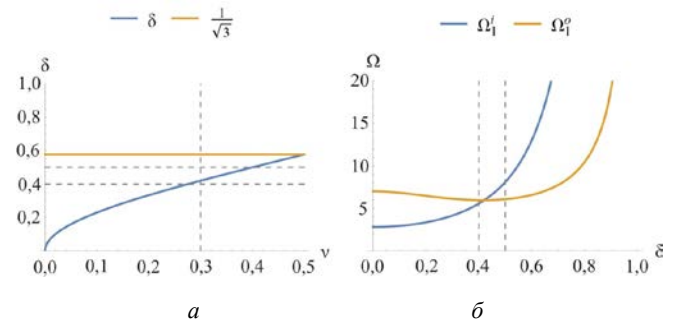


Рис. 1. Условие начала пластического течения: a – зависимость между δ и ν , при которых пластическое течение начнется на внутренней границе (ниже графика), на внешней – (выше графика); b – зависимость скорости начала пластического течения на внутренней и внешней граничных поверхностях от значения δ при $\nu = 0,3$

Fig. 1. The condition for the start of plastic flow: a – the relationship between δ and ν , under which the plastic flow begins on the inner boundary (below the graph), on the outer (above the graph); b – the dependence of the velocity of the start of plastic flow on the inner and outer boundary surfaces on the value δ at $\nu = 0.3$

2.2. Упругопластическое деформирование

При скорости вращения $\Omega = \Omega_1$ в цилиндре выполняется условие пластичности Треска (5) на внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$. Вследствие этого появляется область пластического течения, которую обозначим как I. Напряжения в области I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$) удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. В оставшейся части цилиндра ($\beta_1 \leq \beta \leq 1$) продолжается процесс упругого деформирования.

С увеличением скорости вращения до $\Omega = \Omega_2$ на внешней граничной поверхности $\beta = 1$ выполняется условие пластичности (5) и зарождаются две области пластического течения, которые обозначим как II и III. Область II ($\beta_2 \leq \beta < \beta_3$) соответствует грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, а область III ($\beta_3 \leq \beta \leq 1$) – ребру $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. В цилиндре по-прежнему сохраняется область упругого деформирования ($\beta_1 < \beta < \beta_2$).

При достижении скорости вращения $\Omega = \Omega_3$ упругопластические границы β_1 и β_2 совмещаются между собой и упругая область исчезает. Так как области I и II принадлежат к одной грани призмы Треска, они сливаются вместе. Получившуюся область обозначим как II. При дальнейшем увеличении скорости вращения, вплоть до $\Omega = \Omega_{max}$, граница β_3 будет постепенно продвигаться в направлении внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$. Рассмотрим каждую область.

Упругая область. Полученное ранее упругое решение (8), (9) остается справедливым, однако значение констант интегрирования D_1, D_2 необходимо определять из условий на новых границах упругой области. При $\Omega_1 \leq \Omega < \Omega_2$ это границы $\beta = \beta_1$ и $\beta = 1$. Затем при $\Omega_2 \leq \Omega < \Omega_3$ это границы $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$.

Область I

Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1.$$

С помощью данного условия и уравнения (4), получим

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{1}{2}\beta^2\Omega + \ln\beta; \quad \sigma_{\theta\theta} = 1 + \sigma_{rr}, \quad (12)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Используя ассоциированный закон пластического течения (6), найдем

$$p_{rr} = -p_{\theta\theta}; \quad p_{zz} = 0.$$

Из (1) следует, что $e_{zz} = 0$. В результате осевое напряжение σ_{zz} определяется так же, как и в случае упругости:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \quad (13)$$

Подставив полученные напряжения (12), (13) в (7), получим дифференциальное уравнение для перемещений

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_y}{E}(1+\nu)(1-2\nu)(1+2C_1 - \beta^2\Omega + 2\ln\beta),$$

решение которого имеет вид

$$u = \frac{\sigma_y}{E}(1+\nu)(1-2\nu)C_1\beta + \frac{C_2}{\beta} - \frac{1}{4}\frac{\sigma_y}{E}(1+\nu)(1-2\nu)\Omega\beta^3 + \frac{\sigma_y}{E}(1+\nu)(1-2\nu)\beta\ln\beta, \quad (14)$$

где C_2 – константа интегрирования.

Пластические деформации можно найти из (1), с учетом (3), (12), (13), (14):

$$p_{rr} = -\frac{C_2}{\beta^2} + \frac{\sigma_y}{E}(1-\nu^2) - \frac{1}{4}\frac{\sigma_y}{E}(1+\nu)(1-2\nu)\Omega\beta^2; \\ p_{\theta\theta} = -p_{rr}; \quad p_{zz} = 0. \quad (15)$$

Область II

Область II соответствует той же грани призмы Треска, что и область I. Соответственно, решения (12)–(15) справедливы и для области II с той поправкой, что константы интегрирования C_1, C_2 заменятся на C_3, C_4 .

Область III

Напряжения в этой области соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Условие пластичности (5) примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1; \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1.$$

С помощью данного условия и уравнения (4) получим значения напряжений

$$\sigma_{rr} = C_5 - \frac{1}{2}\beta^2\Omega + \ln\beta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 1 + \sigma_{rr}, \quad (16)$$

где C_5 – константа интегрирования.

Подставив полученные напряжения (16) в (7), получим дифференциальное уравнение для перемещений

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)\left(2 + 3C_5 - \frac{3}{2}\beta^2\Omega + 3\ln\beta\right),$$

решение которого имеет вид

$$u = \frac{3}{2}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)C_5\beta + \frac{C_6}{\beta} - \frac{3}{8}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)\Omega\beta^3 + \frac{1}{4}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)(1+6\ln\beta)\beta, \quad (17)$$

где C_6 – константа интегрирования.

Пластические деформации находятся из (1), (3), (16), (17):

$$p_{rr} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)C_5 - \frac{C_6}{\beta^2} + \frac{1}{4}\frac{\sigma_y}{E}(7-6\nu+2(1-2\nu)\ln\beta) - \frac{5}{8}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)\Omega\beta^2; \\ p_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)C_5 + \frac{C_6}{\beta^2} - \frac{1}{4}\frac{\sigma_y}{E}(3-2\nu-2(1-2\nu)\ln\beta) + \frac{1}{8}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)\Omega\beta^2; \\ p_{zz} = -p_{rr} - p_{\theta\theta} = -\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)C_5 - \frac{\sigma_y}{E}(1-\nu+(1-2\nu)\ln\beta) + \frac{1}{2}\frac{\sigma_y}{E}(1-2\nu)\Omega\beta^2. \quad (18)$$

2.3. Разгрузка

После достижения значения $\Omega = \Omega_{\max}$ скорость вращения начинает уменьшаться. Это приводит к уменьшению напряжений и, соответственно, упругому деформированию цилиндрического слоя. На процесс упругости оказывают влияние накопленные пластически деформации. Обозначим их как

$$\hat{p}_{rr} = p_{rr}(\Omega_{\max}); \quad \hat{p}_{\theta\theta} = p_{\theta\theta}(\Omega_{\max}); \quad \hat{p}_{zz} = p_{zz}(\Omega_{\max}).$$

Преобразуя уравнение равновесия (4) с учетом (1), получим уравнение равновесия в перемещениях для стадии разгрузки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u = -\frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \Omega \beta + \hat{p};$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\beta} \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\hat{p}_{rr} - \hat{p}_{\theta\theta}) + \frac{\partial \hat{p}_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta} \right).$$

В общем случае решение данного неоднородного уравнения примет вид

$$u = B_1 \beta + \frac{B_2}{\beta} + \frac{1}{2} \beta \int \hat{p} d\beta - \frac{1}{2\beta} \int \beta^2 \hat{p} d\beta - \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \beta^3 \Omega,$$

где B_1, B_2 – константы интегрирования.

Рассмотрим области с накопленными пластическими деформациями.

Область I

$$u = B_1 \beta + \frac{B_2}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} (\Omega - (1-2\nu)\Omega_{\max}) \times \times \beta^3 - \frac{1}{2} \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)(1-2 \ln \beta)}{E} \beta.$$

Область II

$$u = B_3 \beta + \frac{B_4}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{\sigma_y (1-2\nu)}{E(1-\nu)} ((1+\nu)\Omega + 2(1-2\nu)\Omega_{\max}) \times \times \beta^3 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_y (1-2\nu)(1-2 \ln \beta)}{E} \beta.$$

2.4. Повторное пластическое течение

При дальнейшем снижении скорости вращения в цилиндре появляются области повторного пластического течения. В таких областях пластические деформации будут состоять из накопленных ($\hat{p}_{rr}, \hat{p}_{\theta\theta}, \hat{p}_{zz}$) и вторичных ($s_{rr}, s_{\theta\theta}, s_{zz}$) пластических деформаций:

$$p_{rr} = \hat{p}_{rr} + s_{rr}; \quad p_{\theta\theta} = \hat{p}_{\theta\theta} + s_{\theta\theta}; \quad p_{zz} = \hat{p}_{zz} + s_{zz}.$$

После снижения скорости вращения до значения $\Omega = \Omega_4$ в цилиндре на внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$ зарождается область повторного пластического

течения. Обозначим эту область III $\delta \leq \beta \leq \beta_4$. Ей соответствует грань призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$. В оставшейся части цилиндрического слоя ($\beta_4 < \beta \leq \beta_3$ и $\beta_3 < \beta \leq 1$) продолжается упругое деформирование.

При уменьшении скорости вращения до $\Omega = \Omega_5$ зарождаются две пластические области на внешней граничной поверхности $\beta = 1$. Обозначим их IV и V. Область IV ($\beta_5 \leq \beta < \beta_6$) соответствует грань призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$, а область V ($\beta_6 \leq \beta \leq 1$) – ребро призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$. Упругая область, соответственно, будет занимать оставшуюся часть деформируемого слоя ($\beta_4 < \beta \leq \beta_3$ и $\beta_3 < \beta < \beta_5$).

При дальнейшем уменьшении скорости, вплоть до $\Omega = 0$, границы областей повторного пластического течения постепенно продвигаются внутрь деформируемого слоя в направлении поверхности $\beta = \beta_3$. Рассмотрим подробнее получившиеся области повторного пластического течения.

Область III

Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1. \quad (19)$$

Из данного условия и уравнения (4) получим

$$\sigma_{rr} = A_1 - \frac{1}{2} \beta^2 \Omega - \ln \beta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - 1, \quad (20)$$

где A_1 – константа интегрирования.

Используя ассоциированный закон пластического течения (6), найдем

$$s_{rr} = -s_{\theta\theta}; \quad s_{zz} = 0. \quad (21)$$

Учитывая накопленные в этой области пластические деформации (15), получим $p_{zz} = 0$. Из (1) следует $e_{zz} = 0$. В результате осевое напряжение σ_{zz} определяется так же, как и в случае первичного пластического течения (13). Подставив напряжения (13), (20) в (7), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} (2A_1 - \beta^2 \Omega - 2 \ln \beta - 1),$$

решение которого имеет вид

$$u = \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} A_1 \beta + \frac{A_2}{\beta} - \frac{1}{4} \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} \Omega \beta^3 - \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} \beta \ln \beta, \quad (22)$$

где A_2 – константа интегрирования.

Используя (1), (3), (15), (20), (21), (22), получим

$$p_{rr} = -\frac{A_2}{\beta^2} - \frac{\sigma_y}{E} (1-\nu^2) - \frac{1}{4} \frac{\sigma_y (1+\nu)(1-2\nu)}{E} \Omega \beta^2;$$

$$p_{\theta\theta} = -p_{rr}; \quad p_{zz} = 0. \quad (23)$$

Область IV

Область IV соответствует той же грани призмы Треска, что и область III. Соответственно, для нее справедливо то же условие пластичности (19). Так же справедливо (20) с заменой A_1 на A_3 . Однако накопленные пластические деформации принимают другие значения (18). Что в свою очередь, с учетом (21), приводит к следующей зависимости:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \frac{E}{\sigma_y} \hat{p}_{zz}. \quad (24)$$

Подставив (20), (24) в (7), получим дифференциальное уравнение в перемещениях:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_y}{E} (1+\nu)(1-2\nu) \times \\ \times (2A_3 - \Omega\beta^2 - 2\ln\beta - 1) - (1-2\nu) \hat{p}_{zz},$$

решение которого при накопленных пластических деформациях (18) имеет вид

$$u = \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu)(1+\nu) A_3 \beta + \frac{A_4}{\beta} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) \times \\ \times (1-2(1+4\nu)\ln\beta) \beta - \frac{1}{8} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) \times \\ \times (2(1+\nu)\Omega + (1-2\nu)\Omega_{\max}) \beta^3 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu)^2 C_5 \beta, \quad (25)$$

где A_4 – константа интегрирования.

Из (1), (3), (20), (24), (25) можно найти пластические деформации:

$$p_{rr} = -\frac{A_4}{\beta^2} - \frac{1}{4} \frac{\sigma_y}{E} (1+6\nu-8\nu^2-2(1-2\nu)(C_5-\ln\beta)) - \\ - \frac{1}{8} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu)(2(1+\nu)\Omega + (3-2\nu)\Omega_{\max}) \beta^2; \\ p_{\theta\theta} = -p_{rr}; \quad p_{zz} = \hat{p}_{zz} = -\frac{\sigma_y}{E} (1-\nu - (\ln\beta + C_5)(1-2\nu)) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) \beta^2 \Omega_{\max}. \quad (26)$$

Область V

Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1; \quad \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1. \quad (27)$$

По аналогии с областью III первичного пластического течения получим следующие значения напряжений:

$$\sigma_{rr} = A_5 - \frac{1}{2} \beta^2 \Omega - \ln\beta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1 \quad (28)$$

и перемещений

$$u = \frac{3}{2} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) A_5 \beta + \frac{A_6}{\beta} - \\ - \frac{3}{8} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^3 - \frac{1}{4} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu)(1+6\ln\beta) \beta, \quad (29)$$

где A_5, A_6 – константы интегрирования.

Из уравнений (1), (3), (28), (29) можно найти пластические деформации:

$$p_{rr} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) A_5 - \frac{A_6}{\beta^2} - \\ - \frac{1}{4} \frac{\sigma_y}{E} (7-6\nu+2(1-2\nu)\ln\beta) - \frac{5}{8} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^2; \\ p_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) A_5 + \frac{A_6}{\beta^2} + \\ + \frac{1}{4} \frac{\sigma_y}{E} (3-2\nu-2(1-2\nu)\ln\beta) + \frac{1}{8} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^2, \\ p_{zz} = -p_{rr} - p_{\theta\theta} = -\frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) A_5 + \\ + \frac{\sigma_y}{E} (1-\nu + (1-2\nu)\ln\beta) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_y}{E} (1-2\nu) \Omega \beta^2. \quad (30)$$

3. Случай начала пластического течения на внутренней границе

Рассмотрим следующие физические и геометрические параметры цилиндра:

$$\delta = 0,4; \quad \nu = 0,3; \quad \sigma_y = 250 \text{ МПа}; \\ E = 21 \text{ ГПа}; \quad \Omega_{\max} = 13.$$

Для текущих параметров $\delta < \sqrt{\nu/(2-\nu)}$. Следовательно, пластическое течение впервые начнется на внутренней граничной поверхности (см. рис. 1). Из (11) получим $\Omega_1 = 50/9$.

На внутренней граничной поверхности зарождается пластическая область I. Для нахождения значений постоянных интегрирования для двух областей решим следующую систему уравнений:

$$\sigma_{rr}^I(\delta) = 0; \quad u^{el}(1) = 0; \\ u^I(\beta_1) = u^{el}(\beta_1); \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{el}(\beta_1),$$

где u^I, σ_{rr}^I – перемещения и напряжения для области I; u^{el}, σ_{rr}^{el} – перемещения и напряжения для упругой области. Далее верхний индекс будет использоваться для обозначения области.

Из данной системы уравнений можно найти значения констант интегрирования D_1, D_2, C_1, C_2 . Для нахождения значений β_1 и Ω_2 , при которых появятся пластические области II и III, решим добавочные уравнения

$$\sigma_{\theta\theta}^{el}(\beta_1) - \sigma_{rr}^{el}(\beta_1) = 1; \quad \sigma_{\theta\theta}^{el}(1) - \sigma_{rr}^{el}(1) = 1.$$

Решая второе уравнение при найденных константах интегрирования, получим

$$\Omega_2 = 4 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{(1-2\nu) \left(1 + 2\beta_1^2 \ln \frac{\beta_1}{\delta} \right) + \beta_1^2}{(1-2\nu)(1+\beta_1^4) + 2\beta_1^2(1-\delta^2(1-\nu))}. \quad (31)$$

Подставив полученную скорость в первое уравнение, получим

$$(1-2\nu)(1+\beta_1^2) \ln \frac{\beta_1}{\delta} - \nu(1-\beta_1^2) + 2(1-\nu)\delta^2 = 0. \quad (32)$$

В связи с нелинейностью данного уравнения по β_1 для его решения будем использовать численный метод Ньютона. В итоге искомые величины примут значения

$$\beta_1 = 0,42; \quad \Omega_2 = 5,95. \quad (33)$$

Далее, при $\Omega > \Omega_2$ в цилиндре присутствуют три области пластического течения и одна – упругого деформирования. К неизвестным добавятся четыре константы интегрирования C_3, C_4, C_5, C_6 и две границы β_2, β_3 . Для определения всех неизвестных воспользуемся системой уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^I(\delta) = 0; \quad u^{III}(1) = 0; \\ \beta = \beta_1: \quad u^I = u^{el}; \quad \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{el}; \quad \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{rr}^{el} = 1; \\ \beta = \beta_2: \quad u^{el} = u^{II}; \quad \sigma_{rr}^{el} = \sigma_{rr}^{II}; \quad \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{rr}^{el} = 1; \\ \beta = \beta_3: \quad u^{II} = u^{III}; \quad \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{III}; \quad \sigma_{zz}^{II} = \sigma_{zz}^{III}. \end{aligned} \quad (34)$$

Для нахождения момента Ω_3 , когда произойдет схлопывание областей I и II, данных уравнений недостаточно, даже при введении дополнительного условия $\beta_1 = \beta_2$. Чтобы найти этот момент, сначала рассмотрим случай, когда $\Omega > \Omega_3$. В этом случае в цилиндре остаются только две области пластического течения II и III и, соответственно, пять неизвестных $C_3, C_4, C_5, C_6, \beta_3$. Итоговая система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{II}(\delta) = 0; \quad u^{III}(1) = 0; \quad u^{II}(\beta_3) = u^{III}(\beta_3); \\ \sigma_{rr}^{II}(\beta_3) = \sigma_{rr}^{III}(\beta_3); \quad \sigma_{zz}^{II}(\beta_3) = \sigma_{zz}^{III}(\beta_3). \end{aligned}$$

Из первых четырех уравнений найдем значения констант. Подставив найденные константы в пятое уравнение, можно найти зависимость между скоростью вращения и положением границы:

$$\Omega = 2 \frac{1-\nu + (1-2\nu)(\log \beta_3 - \log \delta)}{(1-2\nu)(\beta_3^2 - \delta^2)}. \quad (35)$$

В момент $\Omega = \Omega_3$ на поверхности $\beta = \beta_1 = \beta_2$ необратимые деформации равны нулю. Подставив в уравнение для пластических деформаций (15) найденные зна-

чения констант и скорости (35) и приравняв его нулю, получим биквадратное уравнение. Его решение можно записать в виде $\beta^2 = a \pm \sqrt{b}$. Так как нас интересует момент, когда пластические деформации равны нулю только в одной точке, данное уравнение распишется на два: $b = 0$ и $\beta^2 = a$. Они примут вид

$$\begin{aligned} (1-2\nu)(\beta_3^4(W - (1-2\nu)) - \beta_3^2 + \\ + (1-2\nu)\delta^2\beta_3^2 + 6(\beta_3^2 \log \delta - \delta^2 \log \beta_3)) + \\ + 3W - \delta^2(5-4\nu) = 2W^{-1}(1-\nu)(1-\nu^2)(\beta_3^2 - \delta^2)^2; \\ \beta_1^2 = \beta_2^2 = W^{-1}(1-\nu)(\beta_3^2 - \delta^2); \\ W = 1-\nu + (1-2\nu)(\log \beta_3 - \log \delta). \end{aligned} \quad (36)$$

Из (35), (36) получим следующие значения:

$$\Omega_3 = 7,6894; \quad \beta_1 = \beta_2 = 0,6746; \quad \beta_3 = 0,9106.$$

Подставив в (35) значение $\Omega = \Omega_{\max}$, получим следующее положение границы:

$$\Omega_{\max} = 13; \quad \beta_3 = 0,721.$$

На (рис. 2) представлены распределение напряжений в указанные моменты, итоговые пластические деформации и движение границ областей пластического течения.

После достижения максимального значения скорость вращения начинает постепенно уменьшаться. При этом в цилиндрическом слое присутствуют две области упругого деформирования I и II, разделенные граничной поверхностью β_3 . Она не меняет своего положения. Найдем значение скорости вращения, при которой появятся области повторного пластического течения. Для этого разрешим условия пластичности на внутренней (19) и внешней (27) граничных поверхностях. В итоге получим

$$\begin{aligned} \Omega_4^i = \Omega_{\max} - 8 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\delta^2 + 1 - 2\nu}{(1-\delta^2)^2}; \\ \Omega_4^o = \Omega_{\max} - 8 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\delta^2 + 1 - 2\nu}{(1-\delta^2)(1-2\nu + \delta^2(3-2\nu))}. \end{aligned} \quad (37)$$

Сравнив полученные формулы с (14), получим $\Omega_4^i = \Omega_{\max} - 2\Omega_1^i$ и $\Omega_4^o = \Omega_{\max} - 2\Omega_1^o$. Из этого можно сделать вывод, что повторное пластическое течение впервые начнется на той же граничной поверхности, на которой началось первичное пластическое течение. Из соотношений (37) также можно найти минимальное значение Ω_{\max} , при котором появится область повторного пластического течения. В нашем случае это $\Omega_{\max} > 100/9 \approx 11,1111$. При $\Omega_{\max} = 13$ повторное пластическое течение начнется в момент $\Omega_4 = 1,8889$.

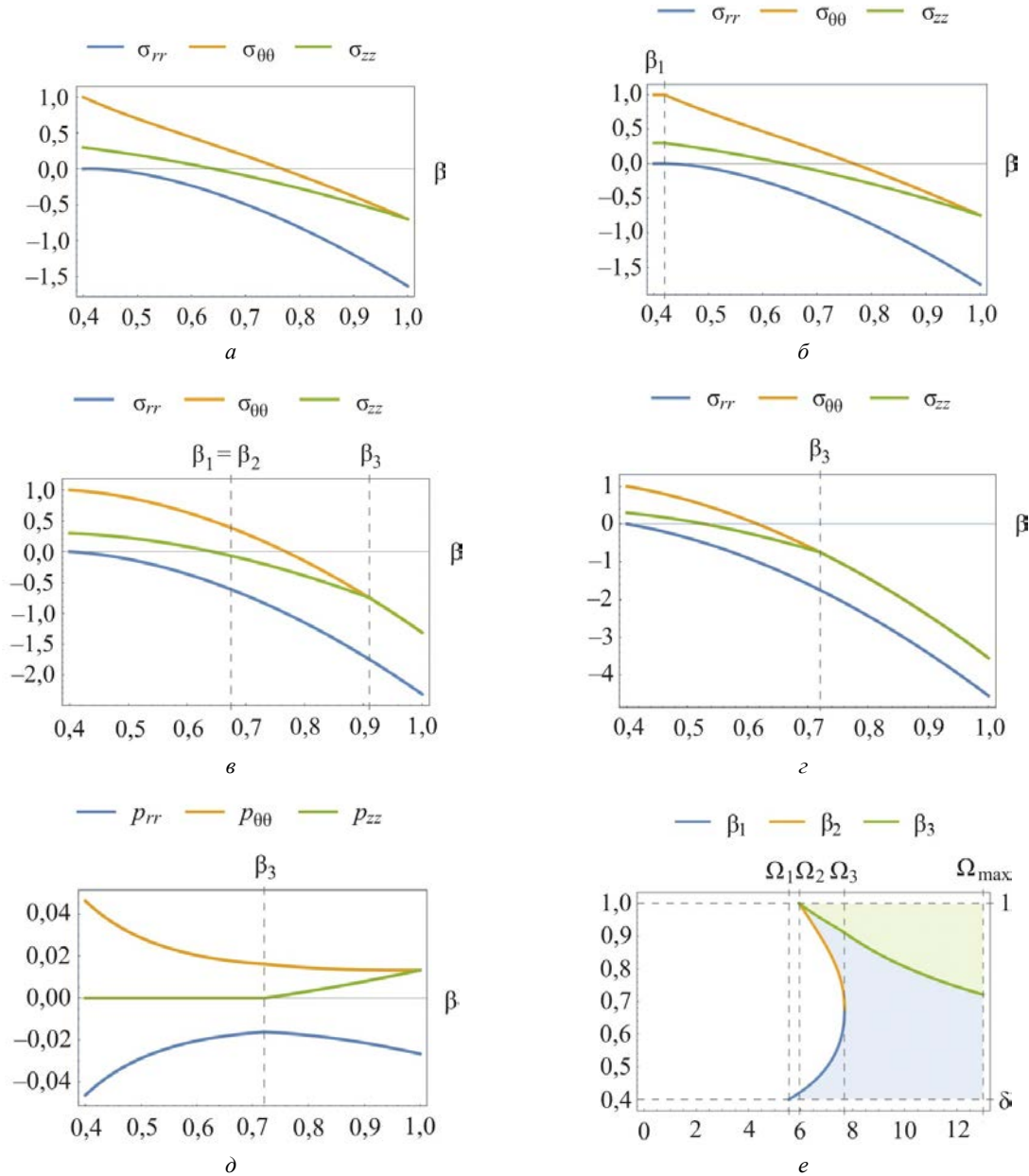


Рис. 2. НДС цилиндра при росте скорости вращения Ω : a – напряжения при $\Omega = \Omega_1$; b – напряжения при $\Omega = \Omega_2$; c – напряжения при $\Omega = \Omega_3$; d – напряжения при $\Omega = \Omega_{\max}$; e – пластические деформации при $\Omega = \Omega_{\max}$; f – развитие областей пластического течения

Fig. 2. Stress-strain state of the cylinder with increasing angular speed Ω : a – stresses at $\Omega = \Omega_1$; b – stresses at $\Omega = \Omega_2$; c – stresses at $\Omega = \Omega_3$; d – stresses at $\Omega = \Omega_{\max}$; e – plastic strains at $\Omega = \Omega_{\max}$; f – evolution of primary plastic regions

При $\Omega < \Omega_4$ в цилиндрическом слое находятся одна область пластического течения и две области упругого деформирования. Следовательно, имеется семь неизвестных $B_1, B_2, B_3, B_4, A_1, A_2, \beta_4$. Составим следующую систему уравнений для их нахождения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}'''(\delta) = 0; \quad u'(1) = 0; \\ \beta = \beta_4: \quad u''' = u'; \quad \sigma_{rr}''' = \sigma_{rr}'; \quad \sigma_{rr}' - \sigma_{\theta\theta}' = 1; \quad (38) \\ \beta = \beta_3: \quad u' = u''; \quad \sigma_{rr}' = \sigma_{rr}'' \end{aligned}$$

Для нахождения скорости Ω_5 , при которой на внешней граничной поверхности $\beta = 1$ зародятся две

области повторного пластического течения IV и V, введем дополнительное уравнение

$$\sigma_{rr}''(1) - \sigma_{\theta\theta}''(1) = 1.$$

Из данного уравнения найдем значение Ω_5 :

$$\Omega_5 = \Omega_{\max} - 8 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{(1-2\nu) \left(1 + 2\beta_4^2 \ln \frac{\beta_4}{\delta} \right) + \beta_4^2}{(1+2\beta_4^4) + 2\beta_4^2 (1-\delta^2(1-\nu))}.$$

Сравним его с (31), заметим, что $\Omega_5 = \Omega_{\max} - 2\Omega_2$, если заменить β_4 на β_1 . Подставив полученную скорость в условие пластичности в системе (38), получим

$$(1-2\nu)(1+\beta_4^2)\ln\frac{\beta_4}{\delta}-\nu(1-\beta_4^2)+2(1-\nu)\delta^2=0. \quad (39)$$

Как видим, полученное уравнение полностью совпадает с (32), только в качестве неизвестной стоит β_4 . Соответственно, при решении получаем то же положение упругопластической границы:

$$\beta_4 = 0,42; \quad \Omega_5 = \Omega_{\max} - 2\Omega_2 = 1,1. \quad (40)$$

При $\Omega < \Omega_5$ добавятся неизвестные $A_3, A_4, A_5, A_6, \beta_5, \beta_6$. Для их нахождения внесем следующие изменения в систему (38):

$$\begin{aligned} u^V(1) &= 0; \\ \beta = \beta_5: \quad u^{II} &= u^{IV}; \quad \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{IV}; \quad \sigma_{rr}^{II} - \sigma_{\theta\theta}^{II} = 1; \\ \beta = \beta_6: \quad u^{IV} &= u^V; \quad \sigma_{rr}^{IV} = \sigma_{rr}^V; \quad \sigma_{\theta\theta}^{IV} = \sigma_{zz}^{IV}. \end{aligned} \quad (41)$$

Из получившейся системы найдем положения границ при условии $\Omega = 0$:

$$\beta_4 = 0,4545; \quad \beta_5 = 0,9329; \quad \beta_6 = 0,9691. \quad (42)$$

На (рис. 3) представлены распределение напряжений в указанные моменты, итоговые пластические деформации, движение границ областей пластического течения, а также распределения перемещений в цилиндре при разных скоростях вращения.

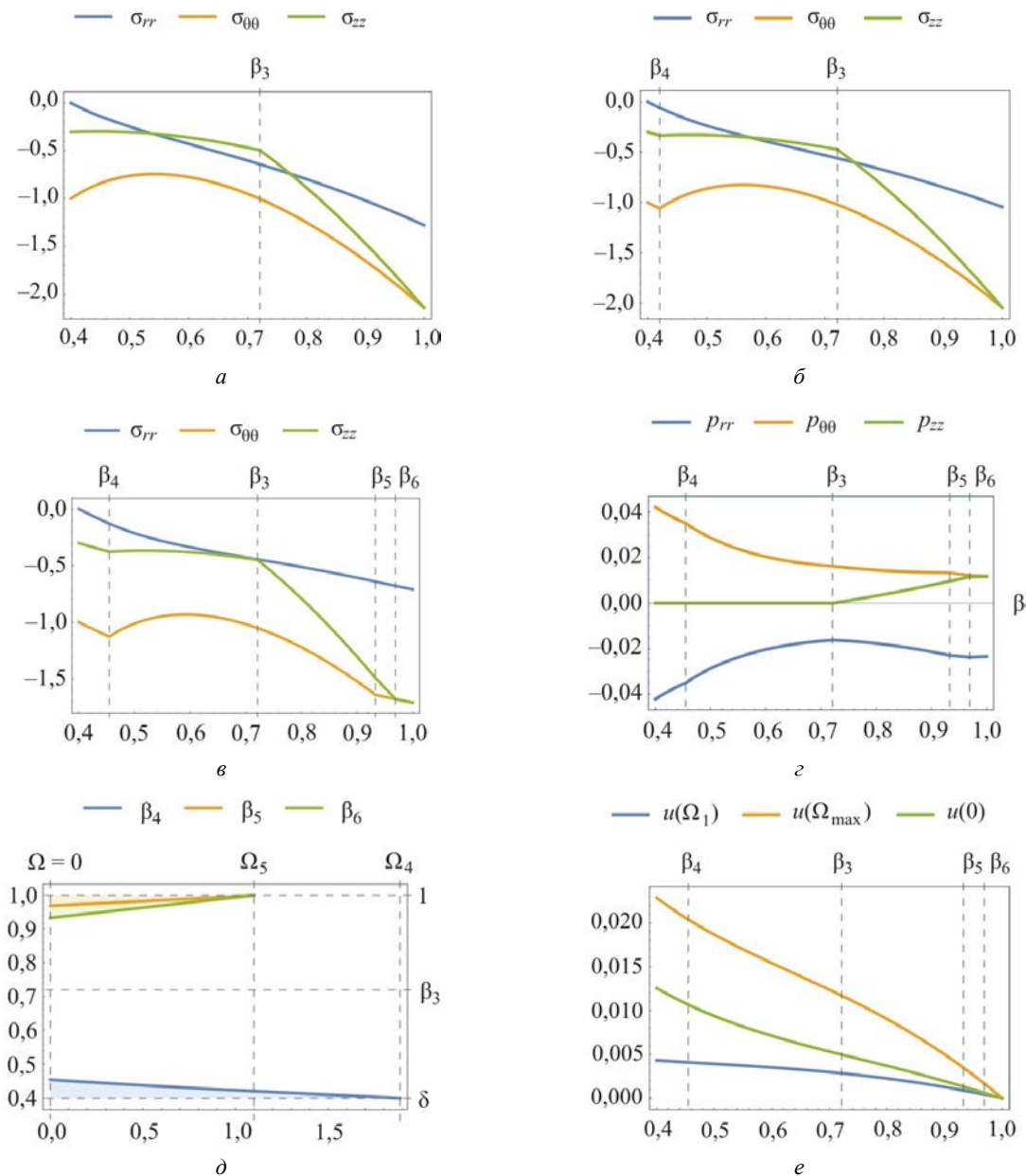


Рис. 3. НДС цилиндра при снижении скорости вращения Ω : a – напряжения при $\Omega = \Omega_4$; b – напряжения при $\Omega = \Omega_5$; c – напряжения при $\Omega = 0$; d – пластические деформации при $\Omega = 0$; e – развитие областей пластического течения; f – перемещения при разных Ω

Fig. 3. Stress-strain state of the cylinder with decreasing angular speed: a – stresses at $\Omega = \Omega_4$; b – stresses at $\Omega = \Omega_5$; c – stresses at $\Omega = 0$; d – plastic strains at $\Omega = 0$; e – evolution of secondary plastic regions; f – displacement at different Ω

4. Случай начала пластического течения на внешней границе

Рассмотрим по аналогии случай, когда пластическое течение начинается впервые на внешней граничной поверхности. Для этого возьмем следующие параметры:

$$\delta = 0,5; \quad \nu = 0,3; \quad \sigma_y = 250 \text{ МПа};$$

$$E = 21 \text{ ГПа}; \quad \Omega_{\max} = 18.$$

При таких параметрах, согласно (11), пластическое течение впервые начнется при скорости $\Omega_1 = 91/15 \approx 6,0667$. Система уравнений для получения значения констант и нахождения положения границ областей будет выглядеть схоже с системой (34), за исключением уравнений для области I и границы β_1 .

По аналогии с (31) аналитически вывели зависимость Ω_2 от значений β_2 и β_3 (в связи с ее громоздкостью не будем приводить ее здесь). В итоге получили следующие параметры, при которых пластическое течение начинается на внутренней граничной поверхности:

$$\Omega_2 = 7,7602; \quad \beta_2 = 0,8075; \quad \beta_3 = 0,922. \quad (43)$$

По аналогии с предыдущим случаем получим

$$\Omega_3 = 8,3845; \quad \beta_1 = \beta_2 = 0,6461; \quad \beta_3 = 0,8985 \quad (44)$$

и

$$\Omega_{\max} = 18; \quad \beta_3 = 0,6934.$$

При снижении скорости вращения момент начала повторного пластического течения определяется по формулам (37). В нашем случае это $\Omega_4 = 88/15 \approx 5,8667$. Для дальнейшего решения используются системы (38), (41), только без уравнений для области III и границы β_4 . Также удастся вывести аналитическую зависимость скорости вращения, при которой начинается повторное пластическое течение на внутренней границе. Сравнив полученную формулу с формулой для Ω_2 , получим $\Omega_5 = \Omega_{\max} - 2\Omega_2$, если заменить β_4, β_5 на β_2, β_3 . В итоге получим

$$\Omega_5 = \Omega_{\max} - 2\Omega_2 = 2,4796; \quad \beta_5 = 0,8075; \quad \beta_6 = 0,922. \quad (45)$$

Можно заметить, что, как и в предыдущем случае, положения границ областей в момент начала повторного пластического течения на другой стороне цилиндра (40), (45) совпадают с таковыми при первичном пластическом течении (33), (43).

При дальнейшем уменьшении скорости для описания среды будем использовать систему (38), (41). Однако при скорости Ω_6 произойдет переход области IV через границу β_3 и она разобьется на две подобласти: IV и VI. Область VI будет идентична области III повторного пластического течения, только с заменой ко-

эффициентов интегрирования с A_1, A_2 на A_7, A_8 . Это произойдет при следующих значениях:

$$\Omega_6 = 1,3294; \quad \beta_4 = 0,5992; \quad \beta_5 = \beta_3 = 0,6934; \quad \beta_6 = 0,9004.$$

Для продолжения расчета в системы (38), (41) внесем изменения:

$$\beta = \beta_5: \quad u^I = u^{VI}; \quad \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{VI}; \quad \sigma_{rr}^I - \sigma_{\theta\theta}^I = 1; \quad (46)$$

$$\beta = \beta_3: \quad u^{VI} = u^{IV}; \quad \sigma_{rr}^{VI} = \sigma_{rr}^{IV}.$$

При дальнейшем уменьшении скорости произойдет слияние областей III и VI. Для нахождения этого момента воспользуемся теми же соображениями, что и ранее для случая первичного пластического течения. Системы уравнений (38), (41), (46) преобразуются к виду

$$\sigma_{rr}^{III}(\delta) = 0; \quad u^V(1) = 0;$$

$$\beta = \beta_3: \quad u^{VI} = u^{IV}; \quad \sigma_{rr}^{VI} = \sigma_{rr}^{IV}; \quad (47)$$

$$\beta = \beta_6: \quad u^{IV} = u^V; \quad \sigma_{rr}^{IV} = \sigma_{rr}^V; \quad \sigma_{\theta\theta}^{IV} = \sigma_{\theta\theta}^{IV}.$$

Найдя из первых шести уравнений значения констант и подставив их в последнее уравнение, выразим скорость через положения границ:

$$\Omega = \Omega_{\max} - 4 \frac{1 - \nu + (1 - 2\nu)(\log \beta_5 - \log \delta)}{(1 - 2\nu)(\beta_5^2 - \delta^2)}.$$

Сравнив полученное выражение с (35), получим $\Omega_7 = \Omega_{\max} - 2\Omega_3$, если заменить β_5 на β_3 . Выполняя те же преобразования, что и ранее – только вместо равенства нулю пластические деформации должны равняться остаточным пластическим деформациям $p_{rr}^{VI} = p_{rr}^I$, – получим те же уравнения (36), только с заменой β_1, β_2 на β_4, β_5 и β_3 на β_6 . Заметим, что сама граница β_3 не входит в полученные уравнения. Из этих уравнений получим

$$\Omega_7 = \Omega_{\max} - 2\Omega_3 = 1,231; \quad \beta_4 = \beta_5 = 0,6461; \quad \beta_6 = 0,8985.$$

При остановке вращения граница между оставшимися двумя областями принимает положение $\beta_6 = 0,8734$. На (рис. 4) представлены графики распределения напряжений и пластических деформаций, характеризующие ключевые стадии процесса.

На основе полученных результатов можно составить следующие зависимости, которые с учетом ранее введенного обозначения для скорости вращения (4) примут вид

$$\Omega_r = \Omega_{\max} - 2\Omega_l; \quad \omega_r^2 = \omega_{\max}^2 - 2\omega_l^2; \quad \beta_r = \beta_l, \quad (47)$$

где Ω_r, ω_r – скорости вращения на стадии разгрузки (уменьшения скорости вращения); Ω_l, ω_l – скорости вращения на стадии нагрузки (увеличения скорости вращения); β_r, β_l – положения границ имеющихся пластических областей на стадиях разгрузки и нагрузки соответственно.

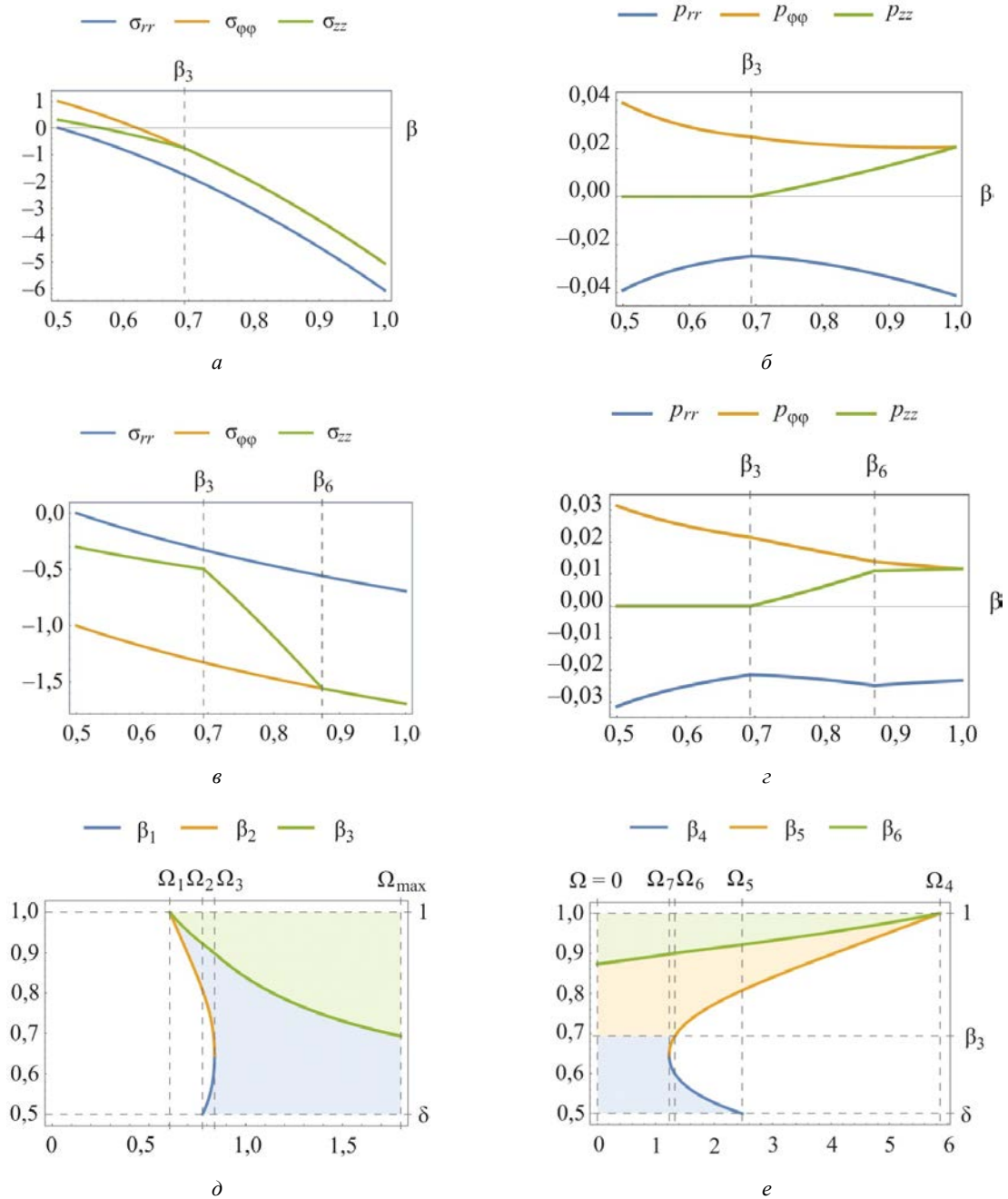


Рис. 4. НДС цилиндра при начале течения с внешней границы: *a* – напряжения при $\Omega = \Omega_{max}$; *b* – пластические деформации при $\Omega = \Omega_{max}$; *c* – напряжения при $\Omega = 0$; *d* – пластические деформации при $\Omega = 0$; *e* – движение границ при увеличении Ω ; *f* – движение границ при уменьшении Ω

Fig.4. Stress-strain state of the cylinder with plastic flow first started at outer border: *a* – stresses at $\Omega = \Omega_{max}$; *b* – plastic strains at $\Omega = \Omega_{max}$; *c* – stresses at $\Omega = 0$; *d* – plastic strains at $\Omega = 0$; *e* – evolution of primary plastic regions; *f* – evolution of secondary plastic regions

Полученное соотношение (47) говорит о том, что мы можем на основе данных, полученных на стадии увеличения скорости вращения, проанализировать поведение цилиндрической среды на стадии уменьшения скорости вращения. А именно: где и какие области пластического течения образуются. Это позволяет, зная скорость, при которой впервые появляется пластическое течение в цилиндре, найти такое максимальное значение скорости, при которой при разгрузке в теле не

возникнет повторного пластического течения. Либо в конструкциях, работающих на критических скоростях, позволяет определить границу, до которой можно опускать скорость вращения, чтобы не происходило излишнее пластическое деформирование металла.

Однако данная зависимость (47) может не выполняться для других граничных условий. Что можно увидеть, например, в работах [21, 22] для сплошного цилиндра.

Также следует отметить, что добавление граничных условий на перемещения сильно увеличивает значение скоростей вращения, при которых начинается пластическое течение. Так, в работе [38] для полого цилиндра со свободными концами скорости, при которых пластическое течение появится и распространится на всю деформируемую среду, составляют $\Omega_1 = 1,1859$ и $\Omega_3 = 2,9384$ соответственно. Из той же работы [38] для полого цилиндра с закрепленными концами получим $\Omega_1 = 1,2609$ и $\Omega_3 = 3,8717$. По формулам (11), (36) для полого цилиндра с жестким внешним покрытием с закрепленными концами для тех же параметров среды получили $\Omega_1 = 3,342$ и $\Omega_3 = 8,5139$. С практической точки зрения это означает, что добавление ограничения на перемещения значительно повысит ресурс эксплуатируемой детали. В данном случае добавление жесткого ограничения на внешнюю граничную поверхность позволяет увеличить значение критической скорости вращения ω_1 чуть более чем в полтора раза.

Выводы

Найдено точное аналитическое решение определяющей системы уравнений для задачи вращения полого цилиндра с жестким внешним покрытием.

Библиографический список

1. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Высшая школа, 1979. – 318 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 576 с.
5. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
6. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One. 2nd Edition. – New York: McGraw Hill, 1950. – 572 p.
7. Chakrabarty J. Theory of Plasticity: Third Edition. – Elsevier, 2005. – 896 p. DOI: 10.1016/C2009-0-05774-2
8. Sadd M.H. Elasticity: theory, applications, and numerics. – Elsevier, 2014. – 582 p. DOI: 10.1016/C2012-0-06981-5
9. Timoshenko S. Theory of elasticity. – New York: McGraw Hill, 2010. – 567 p.
10. Zenkour A.M. Analytical solutions for rotating exponentially-graded annular disks with various boundary conditions // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2005. – Vol. 05. – No. 04. – P. 557–77. DOI: 10.1142/S0219455405001726
11. Eraslan A.N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // Acta Mechanica. – 2006. – Vol. 181. – No. 1. – P. 43–63.
12. Akis T., Eraslan A.N. The stress response and onset of yield of rotating FGM hollow shafts // Acta Mechanica. – 2006. – Vol. 187. – No. 1. – P. 169–187.

Найдена зависимость для критической скорости вращения, при которой начинается пластическое течение. Установлено, что в зависимости от толщины цилиндра и коэффициента Пуассона пластическое течение может начаться как на внутренней, так и на внешней поверхности цилиндра.

Получены аналитические выражения для скоростей вращения, при которых появляются новые пластические области. Установлена зависимость между скоростями зарождения повторного и первичного пластического течения. Найдено значение максимальной скорости вращения, достаточное для полного перехода цилиндра в состояние повторного пластического течения.

Установлено, что добавление жесткого ограничения на внешнюю поверхность позволяет в полтора раза повысить значение критической скорости, при которой впервые появится пластическое течение.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.

Acknowledgment

The work was carried out within the framework of the state task No. 075-00414-19-00

13. Sburlati R. Analytical elastic solutions for pressurized hollow cylinders with internal functionally graded coatings // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94. – No. 12. – P. 3592–3600.

14. Zenkour A.M., Elsibai K.A., Mashat D.S. Elastic and viscoelastic solutions to rotating functionally graded hollow and solid cylinders // Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – Vol. 29. – No. 12. – P. 1601–1616. DOI: 10.1007/s10483-008-1208-x

15. Horgan C.O., Saccomandi G. Large deformations of a rotating solid cylinder for non-gaussian isotropic, incompressible hyperelastic materials // J. Appl. Mech. – 2000. – Vol. 68. – No. 1. – P. 115–117. DOI: 10.1115/1.1349418

16. Bagheri A., Taghizadeh D., Darijani H. On the behavior of rotating thick-walled cylinders made of hyperelastic materials // Meccanica. – 2016. – Vol. 51. – No. 3. – P. 673–692. DOI: 10.1007/s11012-015-0233-x

17. Chadwick P., Creasy C.F.M., Hart V.G. The deformation of rubber cylinders and tubes by rotation // The ANZIAM Journal. – 1977. – Vol. 20. – No. 1. – P. 62–96. DOI: 10.1017/S033427000001454

18. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Оценка предельной скорости вращения искривленных металлокомпозитных дисков в условиях ползучести // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. – 2010. – № 2 (66). – С. 102–111.

19. Прокудин А.Н., Фирсов С.В. Расчет ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2018. – № 1 (35). – С. 63–73.

20. Банщикова И.А. Напряженно-деформированное состояние и длительность до разрушения вращающихся дисков при ползучести // Вестник Пермского национального исследо-

вательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 20–32. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.02

21. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В. Расчет напряжений, деформаций и перемещений во вращающемся диске в условиях ползучести // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2019. – № 1 (39). – С. 84–93. DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.011

22. Hodge P.G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder // International Journal of Mechanical Sciences. – 1962. – Vol. 4. – No. 6. – P. 465–476. DOI: 10.1016/S0020-7403(62)80008-3

23. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP. – 1984. – Bd. 35. – Nr. 5. – S. 601–617. DOI: 10.1007/BF00952107

24. Ивлев Д.Д. Три дискуссии по механике // Вестн. СамГУ. – 2007. – Т. 54, № 4. – С. 115–123.

25. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // International Journal of Engineering Science. – 1997. – Vol. 35. – No. 3. – P. 253–267. DOI: 10.1016/S0020-7225(96)00085-7

26. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1998. – Bd. 78. – Nr. 2. – S. 75–86. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V

27. Gamer U., Lance R.H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // Acta Mechanica. – 1983. – Vol. 50. – No. 1–2. – P. 1–8. DOI: 10.1007/BF01170437

28. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // Tech. Mech. – 1991. – No. 12. – P. 119–124.

29. Mack W. Rotating Elastic-plastic tube with free ends // International Journal of Solids and Structures. – 1991. – Vol. 27. – No. 11. – P. 1461–1476. DOI: 10.1016/0020-7683(91)90042-E

30. Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1999. – Vol. 79. – No. 4. – P. 281–88. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V.

31. Aleksandrova N. Exact Deformation Analysis of a Solid Rotating Elastic-Perfectly Plastic Disk // International Journal of Mechanical Sciences. – 2014. – Vol. 88. – P. 55–60. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.07.003

32. Eraslan A.N. On the linearly hardening rotating solid shaft // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2003. – Vol. 22. – No. 2. – P. 295–307. DOI: 10.1016/S0997-7538(02)00002-5

33. Eraslan A.N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // Acta Mechanica. – 2004. – Vol. 168. – No. 3–4. – P. 129–144. DOI: 10.1007/s00707-004-0088-z

34. Akis T., Eraslan A.N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress // Arch Appl Mech. – 2007. – Vol. 77. – No. 10. – P. 745–765. DOI: 10.1007/s00419-007-0123-3

35. Argeso H., Eraslan A.N. A Computational study on functionally graded rotating solid shafts // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. – 2007. – Vol. 8. – No. 6. – P. 391–399. DOI: 10.1080/15502280701577842

36. Eraslan A.N., Arslan E. Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts // Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences. – 2007. – Vol. 31. – No. 5. – P. 273–287.

37. Nejad M.Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // International Journal of Engineering Science. – 2015. – Vol. 86. – P. 26–43. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2014.10.002

38. Прокудин А.Н., Фирсов С.В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневост. мат. журн. – 2018. – Т. 18, № 2. – С. 242–260.

39. Yuan R., Qian L., Gu K. Method of rotating autofrettage and analysis of stress for thick-walled cylinder Nanjing Li Gong Daxue Xuebao // Journal of Nanjing University of Science and Technology. – 1997. – Vol. 21. – No. 1. – P. 13–16.

40. Zare H.R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // Materials & Design. – 2016. – Vol. 105. – P. 366–374. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.05.062

41. Zare H.R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage // International Journal of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol. 124–125. – P. 1–8. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015

42. Kamal S.M. Analysis of Residual Stress in the Rotational Autofrettage of Thick-Walled Disks // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. – 2018. – Vol. 140. – No. 6. – P. 061402–061402–10. DOI: 10.1115/1.4041339

43. Kamal S.M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders- Part I: Theoretical analysis // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. – 2019. – Vol. 141. – No. 5. – P. 051201–051201–11. DOI: 10.1115/1.4043591

44. Güven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion // Z. Angew. Math. Mech. – 1997. – Vol. 77. – No. 9. – P. 714–716. DOI: 10.1002/zamm.19970770912

45. Güven U. Elastic-plastic stress distribution in a rotating hyperbolic disk with rigid inclusion // International Journal of Mechanical Sciences. – 1998. – Vol. 40. – No. 1. – P. 97–109. DOI: 10.1016/S0020-7403(97)00036-2

46. Güven U. Elastic-plastic rotating disk with rigid inclusion // Mechanics of Structures and Machines. – 1999. – Vol. 27. – No. 1. – P. 117–128. DOI: 10.1080/08905459908915691

47. Güven U., Parmaksizoğlu C., Altay O. Elastic-plastic rotating annular disk with rigid casing // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1999. – Bd. 79. – Nr. 7. – S. 499–503. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199907)79:7<499::AID-ZAMM499>3.0.CO;2-C

References

1. Tolokonnikov L.A. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Vysshiaia shkola, 1979, 318 p.

2. Rabotnov Iu.N. Polzuchest' elementov konstruksii [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka, 1966, 752 p.

3. Rabotnov Iu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka, 1979, 744 p.

4. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1979, 576 p

5. Lur'e A.I. Nelineinaia teoriia uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 512 p.

6. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One. 2nd Edition. New York, McGraw Hill, 1950, 572 p.

7. Chakrabarty, J. Theory of Plasticity: Third Edition. *Elsevier*, 2005, 896 p. DOI: 10.1016/C2009-0-05774-2
8. Sadd M.H. Elasticity: theory, applications, and numerics. *Elsevier*, 2014, 582 p. DOI: 10.1016/C2012-0-06981-5
9. Timoshenko S. Theory of elasticity. *New York: McGraw Hill*, 2010, 567 p.
10. Zenkour, A.M. Analytical solutions for rotating exponentially-graded annular disks with various boundary conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2005, vol. 05, no. 04, pp. 557-577. DOI: 10.1142/S0219455405001726.
11. Eraslan A.N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems. *Acta Mechanica*, 2006, vol. 181, no. 1. pp. 43-63.
12. Akis T., Eraslan A.N. The stress response and onset of yield of rotating FGM hollow shafts. *Acta Mechanica*, 2006, vol. 187, no. 1, pp. 169-187.
13. Sburlati R. Analytical elastic solutions for pressurized hollow cylinders with internal functionally graded coatings. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, no. 12, pp. 3592-3600.
14. Zenkour, A.M., Elsibai K.A., Mashat D.S. Elastic and Viscoelastic Solutions to Rotating Functionally Graded Hollow and Solid Cylinders. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 29, no. 12, pp. 1601-1616. DOI: 10.1007/s10483-008-1208-x
15. Horgan C.O., Saccomandi G. Large Deformations of a Rotating Solid Cylinder for Non-Gaussian Isotropic, Incompressible Hyperelastic Materials. *J. Appl. Mech.*, 2000, vol. 68, no. 1, pp. 115-117. DOI: 10.1115/1.1349418
16. Bagheri A., Taghizadeh D., Darijani H. On the behavior of rotating thick-walled cylinders made of hyperelastic materials. *Meccanica*, 2016, vol. 51, no. 3, pp. 673-692. DOI: 10.1007/s11012-015-0233-x
17. Chadwick P., Creasy C.F.M., Hart V.G. The deformation of rubber cylinders and tubes by rotation. *The ANZIAM Journal*, 1977, vol. 20, no. 1, pp. 62-96. DOI: 10.1017/S0334270000001454
18. Nemirovskii Iu.V., Iankovskii A.P. Otsenka predel'noi skorosti vrashcheniia iskrivlennykh metallokompozitnykh diskov v usloviakh polzuchesti [Estimation of the limiting rotation speed of curved metal composite discs under creep conditions]. *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin*, 2010, no. 2 (66), pp. 102-111.
19. Prokudin A.N., Firsov S.V. Creep Analysis of Rotating Cylinder with Free Ends. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2018, no 1 (35), pp. 63-73.
20. Banshchikova I.A. The stress-strain state and duration until fracture of rotating disks in creep. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 20-32. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.02
21. Begun A.S., Kovtanuk L.V. Calculation of Stresses, Strains and Displacements in a Rotating Disk under Creep Conditions. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2019, no. 1 (39). pp. 84-93. DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.011
22. Hodge P.G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1962, vol. 4, no. 6, pp. 465-476. DOI: 10.1016/S0020-7403(62)80008-3
23. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP*, 1984, vol. 35, no 5, pp. 601-617. DOI: 10.1007/BF00952107
24. Ivlev D.D. Tri diskussii po mekhaniki [Three discussions on mechanics]. *Vestnik SamGU*, 2007, vol. 54, no 4, pp. 115-123.
25. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends. *International Journal of Engineering Science*, 1997, vol. 35, no. 3. pp. 253-267. DOI: 10.1016/S0020-7225(96)00085-7
26. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1998, vol. 78, no. 2, pp. 75-86. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V
27. Gamer U., Lance R.H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube. *Acta Mechanica*, 1983, vol. 50, no. 1-2. pp. 1-8. DOI: 10.1007/BF01170437
28. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends. *Tech. Mech.*, 1991, no. 12, pp. 119-124.
29. Mack W. Rotating Elastic-plastic tube with free ends. *International Journal of Solids and Structures*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1461-1476. DOI: 10.1016/0020-7683(91)90042-E
30. Rees, D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 79, no. 4, pp. 281-288. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V.
31. Aleksandrova, N. Exact Deformation Analysis of a Solid Rotating Elastic-Perfectly Plastic Disk. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, vol. 88, pp. 55-60. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.07.003
32. Eraslan A.N. On the linearly hardening rotating solid shaft. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2003, vol. 22, no. 2, pp. 295-307. DOI: 10.1016/S0997-7538(02)00002-5
33. Eraslan A.N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts. *Acta Mechanica*, 2004, vol. 168, no. 3-4, pp. 129-144. DOI: 10.1007/s00707-004-0088-z
34. Akis T., Eraslan A.N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress. *Arch Appl Mech.*, 2007, vol. 77, no. 10, pp. 745-765. DOI: 10.1007/s00419-007-0123-3
35. Argeso H., Eraslan A.N. A Computational Study on Functionally Graded Rotating Solid Shafts. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2007, vol. 8, no. 6, pp. 391-399. DOI: 10.1080/15502280701577842
36. Eraslan A.N., Arslan E. Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, 2007, vol. 31, no. 5, pp. 273-287.
37. Nejad, M.Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials. *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 86, pp. 26-43. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2014.10.002.
38. Prokudin A.N., Firsov S.V. Viazkoplasticheskoe techenie vrashchayushchegosia pologo tsilindra [Viscoplastic flow in a rotating hollow cylinder]. *Far Eastern Mathematical Journal*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 242-260.
39. Yuan R., Qian L., Gu K. Method of rotating autofrettage and analysis of stress for thick-walled cylinder. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 1997, vol. 21, no. 1, pp. 13-16.
40. Zare, H. R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders. *Materials & Design*, 2016, vol. 105, pp. 366-374. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.05.062.
41. Zare H.R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, vol. 124-125, pp. 1-8. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015

42. Kamal S.M. Analysis of Residual Stress in the Rotational Autofrettage of Thick-Walled Disks. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, 2018, vol. 140, no. 6. pp. 061402–061402–10. DOI: 10.1115/1.4041339

43. Kamal S.M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders-Part I: Theoretical analysis. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, 2019, vol. 141, no. 5, pp. 051201–051201–11. DOI: 10.1115/1.4043591

44. Güven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1997, vol. 77, no. 9, pp. 714-716. DOI: 10.1002/zamm.19970770912

45. Güven U. Elastic-plastic stress distribution in a rotating hyperbolic disk with rigid inclusion. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1998, vol. 40, no. 1, pp. 97-109. DOI: 10.1016/S0020-7403(97)00036-2

46. Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion. *Mechanics of Structures and Machines*, 1999, vol. 27, no. 1, pp. 117-128. DOI: 10.1080/08905459908915691

47. Güven U., Parmaksizoğlu C., Altay O. Elastic-Plastic Rotating Annular Disk with Rigid Casing. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 79, no. 7, pp. 499-503. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199907)79:7<499::AID-ZAMM499>3.0.CO;2-C