Микишанина Е.А. Краевые задачи для неоднородных систем полигармонических уравнений с приложениями в теории тонких оболочек и пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 4. С. 136-144. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.13

Mikishanina E.A. Boundary value problems for systems of inhomogeneous polyharmonic equations with applications in the theory of thin shells and plates. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 136-144. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.13

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2019
PNRPU MECHANICS BULLETIN
http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.13
УДК 519.635

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

Е.А. Микишанина

Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 13 марта 2019 г.
Принята: 02 декабря 2019 г.
Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

система, полигармоническое уравнение, краевая задача, граничные условия, дискретизация, тождество Грина, численный алгоритм, тонкая пластина, изгиб, изгибающая нагрузка.

АННОТАЦИЯ

Ряд задач теории упругости, теории гетерогенных сред, теории тонких оболочек и пластин сводится к решению краевых задач для систем неоднородных полигармонических уравнений. В работе предложен численный алгоритм решения систем полигармонических уравнений вида

$$\begin{cases}\Delta^n u(x,y)=v(x,y),\\ \Delta^m v(x,y)=0\end{cases}$$

в односвязных областях с кусочно-гладким контуром с заданными граничными условиями. Рассмотрены два случая, когда функция $v(x,y)$ является известной полигармонической функцией и когда функция $v(x,y)$ является также искомой полигармонической функцией. Граничные условия могут иметь вид, аналогичный условиям Дирихле, условиям Неймана, а могут иметь смешанный вид, когда на одной части границы заданы условия типа Дирихле, а на другой – условия типа Неймана. На основе многократного применения оператора Лапласа и метода граничных элементов, в основе которого лежит интегральное тождество Грина, заданная система сведена к системе интегральных тождеств. После аппроксимации границы вписанным N-угольником и дискретизации системы интегральных тожеств последняя сведена к системе линейных алгебраических уравнений, которую удобно представить в виде системы матричных уравнений. Существование и единственность решения следует из существования единственного решения системы линейных алгебраических уравнений. Особое внимание уделено приложению построенного алгоритма к решению задач об изгибе тонких пластин, причем изгибающая нагрузка может быть известной функцией, а может быть неизвестной полигармонической функцией произвольного порядка с заданными граничными условиями. Решена задача об изгибе тонкой пластинки эллиптической формы с известной нагрузкой на поверхности, а также задача об изгибе тонкой квадратной пластинки с неизвестной нагрузкой, являющейся решением гармонического уравнения с заданными граничными условиями. Построены линии уровня и приведены формы изогнутых пластинок.

© Микишанина Евгения Арифжановна – к.ф.-м.н., доц., e-mail: evaeva_84@mail.ru, iD: 0000-0003-4408-1888.

Evgeniya A. Mikishanina – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: evaeva_84@mail.ru, iD: 0000-0003-4408-1888.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF INHOMOGENEOUS POLYHARMONIC EQUATIONS WITH APPLICATIONS IN THE THEORY OF THIN SHELLS AND PLATES

E.A. Mikishanina

Chuvash State University named after I.N. Ulianov, Cheboksary, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 13 March 2019
Accepted: 02 December 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

system, polyharmonic equation, boundary value problem, boundary conditions, discretization, Green's identity, numerical algorithm, thin plate, bending, bending load.

ABSTRACT

A number of problems in the theory of elasticity, the theory of heterogeneous media, the theory of thin shells and plates is reduced to solving boundary value problems for systems of inhomogeneous polyharmonic equations. The paper proposes a numerical algorithm for solving systems of polyharmonic equations of the form

$$\begin{cases} \Delta^n u(x,y) = v(x,y), \\ \Delta^m v(x,y) = 0 \end{cases}$$

in single-connected and multi-connected areas with a piecewise smooth contour with specified boundary conditions. Two cases are considered when the function is a known polyharmonic function and when the function is also the desired polyharmonic function. The boundary conditions can have the form similar to Dirichlet conditions, Neiman conditions, and can have a mixed form when on one part of the boundary conditions of the Dirichlet type are given, and on the other – hand, the conditions of the Neiman type. On the basis of multiple applications of the Laplace operator and the boundary element method, which is based on the green integral identity, the given system is reduced to a system of integral identities. After approximating the boundary by an inscribed n-gon and discretizing the system of integral identities, the latter is reduced to a system of linear algebraic equations, which is conveniently represented as a system of matrix equations. The existence and uniqueness of the solution follows from the existence of a unique solution of a system of linear algebraic equations. Special attention is paid to the application of the algorithm to the solution of problems on the bending of thin plates, and the bending load can be a known function, and can be an unknown polyharmonic function of an arbitrary order with given boundary conditions. The problem of bending a thin plate of elliptic shape with a known load on the surface is solved, as well as the problem of bending a thin square plate with an unknown load, which is the solution of a harmonic equation with given boundary conditions. The level lines are constructed and the forms of curved plates are given.

Введение

Исследование проблем механики, теории оболочек и пластин, теории гетерогенных сред предполагает решение краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. В пространственном случае зачастую возникает сложность в постановке граничных условий, поэтому ограничимся рассмотрением плоских задач.

Ряд задач механики сплошной среды сводится непосредственно к системам эллиптического типа (системам полигармонических уравнений), например задача об изгибе тонкой пластины. В плоской теории упругости исследование изгиба пластин связано с решением дифференциального уравнения Софи Жермен для функции прогиба

$$\Delta^2 u = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

где D – цилиндрическая жесткость пластинки в области T, которая задает форму пластинки. Если нагрузка $q(x,y)$ является полигармонической порядка m (она может быть как заданной, так и неизвестной), то решение задачи сведется к решению системы полигармонических уравнений

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \dfrac{q}{D}, \\ \Delta^m q = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Граничные условия будут задаваться в зависимости от способа закрепления кромки и вида функции нагрузки на границе.

Задачи определения напряженного состояния водонасыщенной упругопористой среды [13], определения контуров обводнения области от источника [14] также сводятся к системе полигармонических уравнений.

Исследование изгиба достаточно пологих упругих оболочек предполагает решение системы

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi - Eh\Delta w = 0, \\ \Delta^2 w + \dfrac{1}{D}\Delta\varphi = \dfrac{1}{D} q, \end{cases} \tag{3}$$

где E – модуль Юнга; D – цилиндрическая жесткость; h – толщина пластины; $\varphi(x,y)$ – функция напряжений; $w(x,y)$ – нормальное перемещение точек срединной плоскости; $q(x,y)$ – распределенная нагрузка, действующая по нормали.

Подробное решение дифференциальных уравнений эллиптического типа представлено в монографии И.Н. Векуа [3] и трудах современных авторов [5, 9, 11, 12, 22, 23, 29]. Например, монография F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, G. Sweers [23], как и монография Векуа, охватывает линейные и нелинейные эллиптические краевые задачи более высокого порядка в ограниченных областях. В этой работе формулируются краевые задачи для систем полигармонических уравнений и анализируется существование и единственность их решений в функциональном пространстве. Во всех перечисленных работах приведены аналитические решения поставленных краевых задач в некоторых, достаточно простых, областях. В работах [11–12] решались различные системы дифференциальных уравнений, в том числе и эллиптического типа, в классе почти-периодических функций с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье. В этих работах задачи решались в областях, представляющих собой одно-, многослойные полосы и полуплоскости. Использование этих методов, например, в многосвязных областях с произвольной границей довольно затруднительно. Применение аналитических методов вообще возможно лишь в областях специального вида.

Поэтому имеет смысл применить прямые численные методы, которые бы позволили рассчитать искомую функцию в односвязной или многосвязной (в зависимости от условия задачи) области произвольной формы с непрерывной кусочно-гладкой и несамопересекающейся границей ∂T.

В настоящее время для численного решения краевых задач для полигармонических уравнений чаще используют метод конечных элементов [30], который требует использования всех точек области, что при вычислении, например, производных от искомых функций приводит к существенным погрешностям. При решении системы полигармонических уравнений этот метод довольно трудоемок, как и метод виртуальных элементов [28], предложенный авторами [20] для решения именно полигармонических уравнений, так как требует четкого разбиения области на элементы определенной формы. В последние годы для решения узкого спектра задач также используется метод Монте-Карло [24], в основе которого так же, как в конечно-разностных схемах, лежит метод сеток, который снова требует использования внутренних точек области. При использовании этого метода требуется решение дополнительной трудоемкой задачи: составить систему уравнений, отражающих взаимосвязи между погрешностями и значениями, что, в свою очередь, усложняет процесс решения исходной задачи. Поэтому с точки зрения простоты и эффективности метод граничных элементов выигрывает.

В работе [5] методом прямого численного разложения полигармонического уравнения краевая задача была сведена к системе линейных уравнений, в результате был разработан простой численный алгоритм вычислений полигармонических функций. В основе этого алгоритма лежит метод линейных граничных элементов [1, 2], который является одним из эффективных методов для решения указанного класса задач. Серия численных результатов подтверждает эффективность и высокую точность вычислений.

Ниже дается обобщение численных методов [7, 17] на системы линейных дифференциальных уравнений специального вида (аналог задачи Пуассона с известной правой частью или системы полигармонических уравнений):

$$\begin{cases} \Delta^n u(x,y) = v(x,y), \\ \Delta^m v(x,y) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Граничные условия определяются особенностями моделируемого сценария.

В данной работе построен четкий алгоритм решения системы полигармонических уравнений специального вида (4). Ранее уже делалась попытка сформулировать краевые задачи для полигармонических систем [27]. Однако четкий алгоритм сформулирован не был. Автор попытался восполнить данный пробел, сформулировать строгий алгоритм для решения системы (4) и продемонстрировать этот алгоритм при решении задачи об изгибе тонкой пластины эллиптической и прямоугольной формы.

Система уравнений (4) является упрощенной, но численный алгоритм может быть применим для системы линейных уравнений произвольного порядка.

Рассматриваются два случая: 1) $u(x,y)$ является искомой полигармонической функцией порядка n, непрерывной вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, $v(x,y)$ является заданной полигармонической функцией порядка m также непрерывной вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно в области $\overline{T} = T \cup \partial T$; 2) $u(x,y)$ является искомой полигармонической функцией порядка n, непрерывной вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, $v(x,y)$ также является искомой полигармонической функцией порядка m, непрерывной вместо со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно в области $\overline{T} = T \cup \partial T$. Ссылаясь на результаты Векуа, мы оставляем в стороне теоремы существования и единственности решения и основное внимание обращаем на построение численного алгоритма и его применение при решении некоторых задач теории тонких оболочек и пластин.

1. Аппроксимация границы области и интеграла по границе

Ограничимся рассмотрением односвязной области произвольной формы с непрерывной кусочно-гладкой и несамопересекающейся границей ∂T. Данный алгоритм можно обобщить на случай многосвязной области. Границу аппроксимируют вписанным многоугольником с N сторонами (элементами), угловые точки называют узлами (рис. 1). Количество узлов равно N. Если на границе есть угловые точки, то они совмещаются с узлами. Граничные условия удовлетворяются в средних (контрольных) точках элементов.

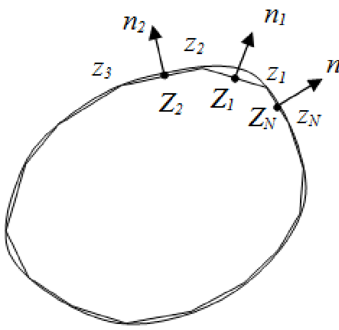

Рис. 1. Аппроксимация области вписанным многоугольником

Fig.1. Approximation of a region by an inscribed polygon

Пронумеруем узловые и контрольные точки $z_j=(x_j,y_j)\left(j=\overline{1,N}\right)$, причем $z_{N+1}=z_1$, и $Z_k=\left(X_k,Y_k\right)\left(k=\overline{1,N}\right)$, тогда геометрические характеристики границы в контрольных точках, таких как контрольная точка, длина элементов, координаты дуговой абсциссы и внешняя нормаль к контуру ∂T, определяются в виде

$$Z_k=\frac{z_{k+1}+z_k}{2},\quad h_k=\left|z_{k+1}-z_k\right|,$$
$$S_k=\sum_{m=1}^{k}h_m-\frac{h_k}{2},$$
$$n_k=\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k},-\frac{x_{k+1}-x_k}{h_k}\right). \qquad (5)$$

Рассмотрим две функции $u(z)$ и $g(z,z')$, $z,z'\in\partial T$ – первая функция непрерывна на границе, в то время как функция $g(z,z')$ может иметь в точке z_k интегрируемую особенность. Интеграл от произведения двух функций по контуру определяется по формуле о среднем, допускающей ошибку порядка $O\left(\max_m(h_m)\right)$:

$$J\left(Z_k\right)=\oint_{\partial T}u\left(z'\right)g\left(Z_k,z'\right)ds\left(z'\right)\approx$$
$$\approx\sum_{m=1}^{N}u\left(Z_m\right)\int_{h_m}g\left(Z_k,z'\right)ds\left(z'\right). \qquad (6)$$

Приближенное значение интеграла может быть записано в виде произведения матриц

$$\mathbf{J}=\mathbf{MU}. \qquad (7)$$

Компонентами матрицы $\mathbf{M}$ являются интегралы по элементам h_m: $M_{km}=\int_{h_m}g(Z_k,s)ds.$

Воспользовавшись интегральными представлениями [17], полигармоническое уравнение $\Delta^n u=0$ с учетом представления (6) можно представить в виде системы линейных интегральных уравнений [8]:

$$\varepsilon u_j+\sum_{p=0}^{n-j-1}\oint_{\partial T}u_{j+p}H_p ds-$$
$$-\sum_{p=0}^{n-j-1}\oint_{\partial T}q_{j+p}G_p ds=0,\quad \left(j=\overline{0,n-1}\right), \qquad (8)$$

где

$$u_j=\Delta^j u,\ q_j=\frac{\partial u_j}{\partial n},\ \Delta^p G_p\left(r\right)=G\left(r\right),\ H_p=\frac{\partial G_p}{\partial n}, \qquad (9)$$

r – расстояние от фиксированной точки z до переменной точки z' на гладкой границе. Поскольку в контрольной точке Z_k контур гладкий, то множитель $\varepsilon=1/2$; во внутренней точке $\varepsilon=1$. Третье уравнение в (9) есть обыкновенное дифференциальное уравнение вида $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dG_j(r)}{dr}\right)^j=G\left(r\right)$. Решением является функция [10]:

$$G_j=\frac{1}{2\pi}\frac{r^{2j}}{4^j(j!)^2}\left(\ln\frac{1}{r}+\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{m}\right).$$

2. Дискретизация уравнений (8)

Пользуясь приближенным представлением (6) или (7), можно записать уравнение (8) в виде линейной системы дискретных значений функции $u_j\left(Z_k\right)$ и нормальной производной $q_j\left(Z_k\right)=\mathbf{n}_k\Delta u_j\left(Z_k\right)$ в контрольных точках:

$$\frac{1}{2}u_j\left(Z_k\right)+\sum_{p=0}^{n-j-1}\sum_{m=1}^{N}\left(u_{j+p}\left(Z_m\right)\int_{h_m}H_p\left(Z_k,z'\right)ds\left(z'\right)-\right.$$
$$\left.-q_{j+p}\left(Z_m\right)\int_{h_m}G_p\left(Z_k,z'\right)ds\left(z'\right)\right)=0$$

или в виде n матричных уравнений

$$\frac{1}{2}\mathbf{U}_j+\sum_{p=0}^{n-j-1}\left(\mathbf{H}_p\mathbf{U}_{j+p}-\mathbf{G}_p\mathbf{Q}_{j+p}\right)=0,\quad \left(j=\overline{0,n-1}\right). \qquad (10)$$

Равенство (10) представляет n уравнений относительно N компонент $U_{j,k}$ и $Q_{j,k}$, $\left(k=\overline{1,N}\right)$, которые являются элементами матриц $\mathbf{U}_j$ и $\mathbf{Q}_j$ и определяются как $U_{j,k}=u_j\left(Z_k\right)$, $Q_{j,k}=q_j\left(Z_k\right)$, элементы матриц $\mathbf{H}_p$

и $\mathbf{G}_p$ определяются как значения интегралов $H_{p,km} = \int_{h_m} H_p(Z_k, z')ds(z')$ и $G_{p,km} = \int_{h_m} G_p(Z_k, z')ds(z')$ соответственно.

3. Краевые задачи

1-й тип. Пусть функция $v(z)$ непрерывно дифференцируема m раз в замкнутой области $\overline{T}$ и является известной полигармонической функцией порядка m. Тогда второе уравнение системы (4) удовлетворяется тождественно. Применяя m раз оператор Лапласа, получаем одно полигармоническое уравнение порядка $m+n$:

$$\Delta^{m+n}u = 0\,. \tag{11}$$

В соответствии с формулой (10) уравнение (11) записывается в виде системы матричных уравнений

$$\frac{1}{2}\mathbf{U}_j + \sum_{p=0}^{n+m-j-1}\left(\mathbf{H}_p\mathbf{U}_{j+p} - \mathbf{G}_p\mathbf{Q}_{j+p}\right) = 0,$$
$$\left(j = \overline{0, n+m-1}\right). \tag{12}$$

Компонентами матриц и векторов являются значения соответствующих функций в N контрольных точках, найденных, как указано в предыдущем пункте.

2-й тип. Функция $u(z)$ является искомой полигармонической функцией порядка n, непрерывной вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, $v(z)$ также является искомой полигармонической функцией порядка m, непрерывной вместо со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно в области $\overline{T} = T \cup \partial T$. Она определяется из второго уравнения системы (4) с m граничными условиями. Если представить это уравнение в виде системы (12), то для его решения необходимо задать дополнительно mN значений в контрольных точках.

Применив к первому уравнению системы оператор Лапласа m раз, снова придем к полигармоническому уравнению $(m+n)$-го порядка, которое также может быть представлено в виде системы уравнений (9). Таким образом, из системы уравнений (12) можно одновременно найти значения искомых функций u_j и v_j в контрольных точках.

Значение функции $v(z)$ в произвольной внутренней точке области находится из равенства (9) при $\varepsilon = 1$.

4. Граничные условия

В обоих случаях решение сводится к решению уравнения (11), для которого необходимо определить $(m+n)$ граничных условий. Они могут быть следующего вида:

1) $u\big|_{\partial T} = u_0(s), \quad \Delta u\big|_{\partial T} = u_1(s), \quad \ldots,$
$\Delta^{n+m-1}u\big|_{\partial T} = u_{n+m-1}(s),$
s – дуговая координата на границе;

2) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial T} = q_0(s), \quad \left.\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|_{\partial T} = q_1(s), \quad \ldots,$
$\left.\frac{\partial \Delta^{n+m-1}u}{\partial n}\right|_{\partial T} = q_{n+m-1}(s);$

3) смешанные условия, когда на одной части границы заданы u_j , а на другой q_j.

Приведенные граничные условия аналогичны условиям Дирихле и Неймана.

Например, в случае решения задачи об изгибе пластины, жестко защемленной по краям, моделируемой дифференциальным уравнением (1), краевые условия имеют смешанный тип [18]:

$$u\big|_{\partial T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial T} = 0.$$

Так как граница пластины и нормаль жестко фиксированы, то первое граничное условие показывает отсутствие прогиба на границе, второе граничное условие показывает отсутствие изменения положения края пластины от своего первоначального [16].

При переходе к системе уравнений (12) будут определены $(n+m)N$ значений $U_{j,k}$, или $Q_{j,k}$, или частично $U_{j,k}$ и $Q_{j,k}$. Для задачи *1-го типа* достаточно задать nN значений в контрольных точках, дополнительные mN условий могут быть найдены из заданной функции $v(x,y)$ в области T и, следовательно, на границе ∂T :

$$u_{n+l} = \Delta^{n+l}u = \Delta^l v, \quad q_{n+l} = \frac{\partial\left(\Delta^l v\right)}{\partial n}, \quad l = (0, m-1).$$

Для задач *2-го типа* nN значений в контрольных точках определяются из граничных условий для первого уравнения системы (4), а оставшиеся mN значений – из граничных условий для второго уравнения этой системы.

5. Оценка точности численного алгоритма

Оценить точность данного численного алгоритма возможно, оценив погрешность вычислений. Значение искомой функции $u(z)$ в каждой внутренней точке области T определяется формулой (8) при $\varepsilon = 1$.

Абсолютное значение разности интегралов в (8), вычисленных по контуру ∂T области T и по границе L вписанной многоугольной области D, рассчитываем следующим образом:

$$\left|\sum_{p=0}^{n-j-1}\oint_{\partial T}\left(q_{j+p}G_p - u_{j+p}H_p\right)ds - \sum_{p=0}^{n-j-1}\oint_{L}\left(q_{j+p}G_p - u_{j+p}H_p\right)ds\right|.$$

По теореме о дивергенции [19], справедлива следующая оценка:

$$\left|\sum_{p=0}^{n-j-1}\oint_{\partial T}\left(q_{j+p}G_p-u_{j+p}H_p\right)ds-\right.$$
$$\left.-\sum_{p=0}^{n-j-1}\oint_{L}\left(q_{j+p}G_p-u_{j+p}H_p\right)ds\right|\le$$
$$\le\sum_{p=0}^{n-j-1}\left|\iint_{T}\left(\Delta u_{j+p}G_p-u_{j+p}\,\Delta G_p\right)d\tau-\right.$$
$$\left.-\iint_{D}\left(\Delta u_{j+p}G_p-u_{j+p}\,\Delta G_p\right)d\tau\right|\le$$
$$\le\sum_{p=0}^{n-j-1}\iint_{T-D}\left|\left(\Delta u_{j+p}G_p-u_{j+p}\,\Delta G_p\right)\right|d\tau\le$$
$$\le\sum_{p=0}^{n-j-1}M_p\cdot\sigma\le nM\sigma, \qquad (13)$$

где σ – площадь области $T-D$; M_p – наибольшее значение модуля $\left|\left(\Delta u_{j+p}G_p-u_{j+p}\,\Delta G_p\right)\right|$ в этой области; $M=\max\limits_p M_p$. Таким образом, погрешность прямо пропорциональна площади σ. Оценим ее.

Представим площадь области между контуром и вписанной многоугольной областью σ в виде $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{N}\sigma_i$, где σ_i – площадь *i*-го сегмента между границей и *i*-й хордой, $i=\overline{1,N}$.

Введем с центром в контрольной точке каждой *i*-й хорды локальную систему координат так, что ось Os совмещена с хордой, $s\in\left[-h_i/2,\ h_i/2\right]$. Тогда разложение некоторой функции $f(s)$ в окрестности нуля в ряд Тейлора имеет вид

$$f(s)=f(0)+f'(0)s+f''(0)\frac{s^2}{2}+$$
$$+f'''(0)\frac{s^3}{6}+f''''(0)\frac{s^4}{24}+\ldots \qquad (14)$$

Отсюда производная определится следующим образом:

$$f'(0)=\frac{f(h_i/2)-f(-h_i/2)}{h_i}+O(h_i^2)\,. \qquad (15)$$

Площадь сегмента σ_i как площадь некоторой криволинейной трапеции, образованной кривой $\gamma_i(s)$ и хордой, с учетом (14) и (15) рассчитывается так:

$$\sigma_i=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\gamma_i(s)ds=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\gamma_i(0)ds+\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\gamma_i'(0)sds+$$
$$+\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\gamma_i''(0)\frac{s^2}{2}ds+\ldots=\gamma_i(0)h_i+O(h_i^3).$$

Тогда

$$\sigma\le p\cdot\max_i\left(\gamma_i(0)\right)+O\left(h^2\right),$$

где $h=p/N$, p – периметр вписанного многоугольника. Таким образом, расположение контрольной точки в середине хорды при вычислении интегралов типа (6) допускает ошибку $O(h^2)$. С другой стороны, с учетом условия Гельдера

$$\left|\sigma_i\right|=\left|\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\gamma_i(s)ds\right|\le\max_{s\in[-h_i/2,\,h_i/2]}|\gamma_i(s)|\,h_i\le A_ih^{\lambda+1},$$

где A_i – постоянная Гельдера; $0<\lambda\le 1$ – показатель Гельдера. Для непрерывно дифференцируемых функций $\gamma_i(s)$ можно считать $\lambda=1$.

Для площади σ справедлива следующая оценка:

$$\left|\sigma\right|=\left|\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right|\le\sum_{i=1}^{N}\left|\sigma_i\right|\le ANh^2\approx O\left(\frac{p}{N}\right),$$

где $A=\max\limits_i A_i$. Из (13) понятно, что погрешность прямо пропорциональна площади σ. При неограниченном увеличении количества узлов $N\to\infty$ площадь $\sigma\to 0$, следовательно, погрешность также стремится к нулю, и возрастает точность предлагаемого численного метода.

6. Численные примеры

Пример 1. Рассмотрим тонкую пластину толщиной 0,003 м эллиптической формы с полуосями $a=1,\,b=0,6$ м в недеформированном состоянии на плоскости Oxy, края которой жестко закреплены. На поверхности пластины распределена безразмерная линейная внешняя нагрузка

$$q=100(1+x).$$

Рассчитаем функцию изгиба.

Решаем уравнение

$$\Delta^2u=q$$

в области $T=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{0.36}\le 1\right\}$, если на контуре пластины ∂T граничные условия имеют вид

$$u\big|_{\partial T}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial T}=0\,.$$

Применяя описанный выше алгоритм, переходим к системе матричных уравнений

$$\begin{cases} \left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_1-\mathbf{G}_0\mathbf{Q}_1-\mathbf{G}_1\mathbf{Q}_2=-\mathbf{H}_1\mathbf{U}_2, \\ \mathbf{H}_1\mathbf{U}_1-\mathbf{G}_1\mathbf{Q}_1-\mathbf{G}_2\mathbf{Q}_2=-\mathbf{H}_2\mathbf{U}_2, \\ \mathbf{G}_0\mathbf{Q}_2=\left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_2. \end{cases}$$

Форма прогиба пластины представлена на рис. 2, линии уровня на рис. 3.

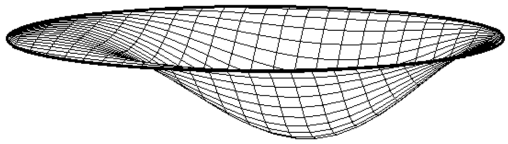

Рис. 2. Форма прогиба эллиптической пластины

Fig.2. The shape of the deflection of elliptical plates

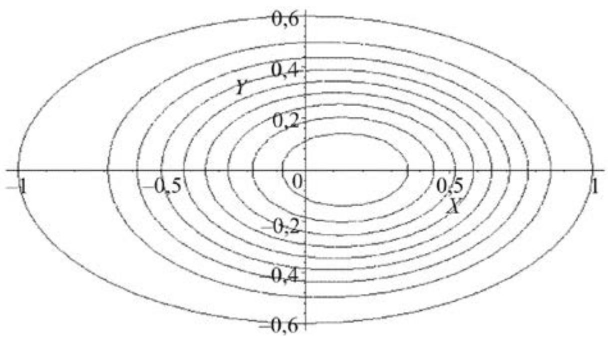

Рис. 3. Линии уровня при изгибе эллиптической пластины

Fig. 3. Level lines when bending an elliptical plate

Пример 2. Рассмотрим тонкую пластину толщиной 0,003 м квадратной формы $T=\{-0,5\le x\le 0,5,\ -0,5\le y\le 0,5\}$ в недеформированном состоянии на плоскости Oxy, края которой жестко закреплены. На поверхности пластины распределена безразмерная внешняя нагрузка, которая удовлетворяет гармоническому уравнению. На границе нагрузка принимает следующие значения:

$$q\big|_{x=\pm0,5}=100(1,25-y^2),$$
$$q\big|_{y=\pm0,5}=100(0,75+x^2).$$

Рассчитать функцию прогиба.

Для численного решения перейдем к полигармоническому уравнению третьего порядка с граничными условиями

$$u\big|_{\partial T}=0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial T}=0,$$

$$\Delta^2 u\big|_{x=\pm0,5}=100(1,25-y^2),$$
$$\Delta^2 u\big|_{y=\pm0,5}=100(0,75+x^2).$$

Решение этого уравнения на границе сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_0\mathbf{Q}_0+\mathbf{G}_1\mathbf{Q}_1+\mathbf{G}_2\mathbf{Q}_2=\left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_0+\mathbf{H}_1\mathbf{U}_1+\mathbf{H}_2\mathbf{U}_2, \\ \mathbf{G}_0\mathbf{Q}_1+\mathbf{G}_1\mathbf{Q}_2=\left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_1+\mathbf{H}_1\mathbf{U}_2, \\ \mathbf{G}_0\mathbf{Q}_2=\left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_2, \end{cases}$$

которую можно свести к простому матричному уравнению

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \hline 0 & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{G}_0 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_0 \\ \hline \mathbf{Q}_1 \\ \hline \mathbf{Q}_2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_0+\mathbf{H}_1\mathbf{U}_1+\mathbf{H}_2\mathbf{U}_2 \\ \hline \left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_1+\mathbf{H}_1\mathbf{U}_2 \\ \hline \left(0.5\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\right)\mathbf{U}_2 \end{array}\right].$$

Результаты построения функции прогиба u представлены на рис.4

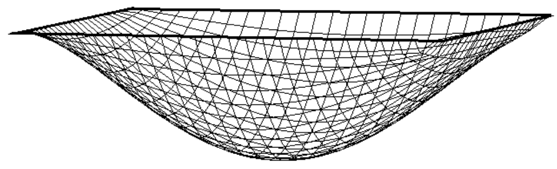

Рис. 4. Форма прогиба квадратной пластины

Fig. 4. Square plate deflection

Заключение

Изложенный численный алгоритм построен для системы упрощенного вида, но может быть применен к широкому классу подобных систем уравнений и представлять теоретический интерес для научных коллективов. В работе решена задача об изгибе тонкой пластины с известной нагрузкой, а также задача об изгибе плиты с неизвестной нагрузкой, удовлетворяющей полигармоническому уравнению.

В современной научной практике часто методом выбора для численного решения, например, задач механики являются конечно-разностные схемы, метод конечных элементов, вариационные методы [4, 6, 15, 20, 25, 26, 30]. Но они учитывают все дискретные точки области. В ряде задач теории упругости требуется вычисление производных. Например, при решении классической задачи теории упругости для функции Эри нахождение напряжений требует численного вычисления производных. В указанных методах необходимо использование не только граничных точек, но и внутренних точек области. В сравнении с ними метод граничных элементов учитывает только точки на границе, что повышает точность расчетов. В работе оценена точность метода, эффективность метода подтверждена в более ранних работах [8, 9, 13, 14] на различных примерах сравнением численных результатов и аналитических решений.

Библиографический список

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

2. Бреббия К., Телес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: Физматлит, 1948. – 296 с.

4. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 282 с.

5. Голушко С.К., Идимешев С.В., Семисалов Б.В. Методы решения краевых задач механики композитных пластин и оболочек / Конструкт.-технол. ин-т вычислит. техн. Сиб. отд-ния РАН. – Новосибирск, 2014. – 131 с.

6. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. О вариационных уравнениях расширенной теории *n*-го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 36–55.

7. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. – 2012. – Т. 52, № 11. – С. 2050–2059.

8. Казакова А.О., Микишанина Е.А., Терентьев А.Г. Математическое моделирование в механике сплошных сред с использованием полигармонических уравнений и их систем // Современные проблемы механики сплошной среды: тез. докл. междунар. конф., посвященной памяти академика Л.И. Седова в связи со стодесятилетием со дня его рождения. – М.: Изд-во Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН, 2017. – С. 116–118.

9. Казакова А.О. Полигармонические уравнения в механике сплошных сред // Математика. Образование. – 2013. – С. 361.

10. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Представления и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений // Мат. журн. – 2010. – Т. 8, № 1 (27). – С. 50–58.

11. Кулагина М.Ф., Микишанина Е.А. Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Мат. замет. СВФУ. – 2015. – Т. 22, № 3. – С. 11–19.

12. Кулагина М.Ф., Микишанина Е.А. О некоторых задачах механики сплошной среды для составных областей // Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций: материалы международ. науч. конф. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – Т. 49. – С. 212–216.

13. Микишанина Е.А., Терентьев А.Г. Об определении напряженного состояния упругопористой среды // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 204–215.

14. Микишанина Е.А. Численное определение контуров обводнения в задачах нестационарной фильтрации // Науч.-техн. вестник Поволжья. – 2017. – № 1. – С. 21–24.

15. Найштут Ю.С. Решение краевых задач теории тонких упругих оболочек методом Неймана // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 6, № 6. – С. 1143–1153.

16. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.

17. Терентьев А.Г. Краевые задачи теории полигармонических уравнений и их численное решение // Инновации в образовательном процессе. – М.: Изд-во МГОУ, 2007. – № 5. – С. 194–199.

18. Терентьев А.Г. Теория упругости с элементами сопротивления материалов и пластичности. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. – 264 с.

19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2008. – Т. III. – 728 с.

20. Antonetti P.F., Manzini G., Verani M. The conforming virtual element method for polyharmonic problems, MOX-Preprint 56/2018.

21. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 35. – No. 4. – P. 371–383.

22. Ciarlet P.G. Mathematical elasticity. Vol. III: Theory of shells, Collection “Studies in Mathematics and it application.” – North-Holland, Amsterdam, 2000. – 659 p.

23. Ganzolla F., Grunau H.-Ch., Sweers G. Polyharmonic boundary value problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer, 2010. – Vol. 1991.

24. Lukinov V.L., Mikhailov G.A. Monte Carlo methods for solving the first boundary value problem for a polyharmonic equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2005. – Vol. 45. – No. 3. – P. 476–489.

25. The mimetic finite difference method for elliptic and parabolic problems with a staggered discretization of diffusion coefficient / K. Lipnikov, G. Manzini, G.D. Moulton, M. Shashkov // Journal of Computational Physics. – 2016. – No. 305. – P. 111–126.

26. MacDonald M., Kulatunga M.P. Finite element analysis of cold-formed steel structurial members with performations subjected to compression loading // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2013. – Vol. 17. – No. 2. – P. 127–139.

27. Mikishanina E.A. Solution of boundary value problems for a system of polyharmonic equations of a special type with applications // J. Phys.: Conf. Ser. 1158 032033. – 2019.

28. Natarajan S, Bordas P.A., Ooi E.T. Virtual and smoothed finite elements: a connection and its application to polygonal/polyhedral finite element methods // Intenational Journal on Numerical Methods in Engineering. – 2015. – No. 104(13). – P. 1173–1199.

29. Skubachevskii A.L. Bondary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // Journal of Phisics: Conf. Series. – 2016. – Vol. 71. – No. 5. – P. 801–812.

30. Zeinikiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.

References

1. Benerdzhi P, Batterfild R. Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh [Boundary element methods in applied Sciences]. *Moscow, Mir*, 1984, 494 p.

2. Brebbiya K., Teles ZH., Vroubell L. Metody granichnyh elementov [Boundary element methods]. *Moscow, Mir*, 1987, 524 p.

3. Vekua I.N. Novye metody resheniia ellipticheskikh uravnenii [New methods for solving elliptic equations]. *Moscow, Fizmatlit*, 1948, 296 p.

4. Vekua I.N. Nekotorye obshchie metody postroeniya razlichnyh variantov teorii obolochek [Some General methods of

constructing various variants of the theory of shells]. *Moscow, Nauka*, 1982, 282 p.

5. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Semisalov B.V. Metody resheniia kraevykh zadach mekhaniki kompozitnykh plastin i obolochek [Methods of solution of boundary value problems in mechanics of composite plates and shells]. *Novosibirsk, izd-vo Konstruktorsko-tekhnologicheskogo instituta vychislitel'noi tekhniki Sibirskogo otdeleniia RAN*, 2014, 131 p.

6. Egorova O.V., ZHavoronok S.I., Kurbatov A.S. On variational equations of the extended theory of the n-th order of elastic shells and their application to some problems of dynamics. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no.2, pp.36-55.

7. Kazakova A.O., Terent'ev A.G. Chislennoe reshenie kraevykh zadach dlia poligarmonicheskogo uravneniia [Numerical solution of boundary value problems for the polyharmonic equation]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics* , 2012, vol. 52, no.11, pp. 2050-2059.

8. Kazakova A.O., Mikishanina E.A., Terent'ev A.G. Matematicheskoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred s ispol'zovaniem poligarmonicheskikh uravnenii i ikh system [Mathematical modeling in continuum mechanics with the use of polyharmonic equations and systems]. *Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoi sredy: tezisy dokladov Mezhdunarod. konf., posviashchennoi pamiati akademika L.I. Sedova v sviazi so stodesiatiletiem so dnia ego rozhdeniia* (Modern problems of continuum mechanics: abstracts of the International Conference dedicated to the memory of academician L. I. Sedov in connection with the one hundred and tenth anniversary of his birth: Proceedings of the International Conference). Moscow, 2017, pp. 116-118.

9. Kazakova A.O. Poligarmonicheskie uravneniya v mekhanike sploshnyh sred [Polyharmonic equations in continuum mechanics]. *Matematika. Obrazovanie*, 2013, pp. 361.

10. Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Predstavleniia i svoistva funktsii Grina zadachi Dirikhle dlia poligarmonicheskikh uravnenii [Representations and properties of the green function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations]. *Matematicheskii zhurnal*, 2010, vol. 8, no. 1 (27), pp. 50-58.

11. Kulagina M.F., Mikishanina E.A. Postroenie pochti-periodicheskikh reshenii nekotorykh sistem differentsial'nykh uravnenii [Construction of almost periodic solutions to some systems of differential equations]. *Matematicheskie zametki SVFU*, 2015, vol. 22, no. 3, pp. 11-19.

12. Kulagina M.F., Mikishanina E.A. O nekotorykh zadachakh mekhaniki sploshnoi sredy dlia sostavnykh oblastei [About some problems of continuum mechanics for composite fields]. *Kraevye zadachi dlia differentsial'nykh uravnenii i analiticheskikh funktsii: materialy Mezhdunarod. nauch. konf.* (Boundary value problems for differential equations and analytic functions: Proceedings of the International Science Conference). *Kazan'*, 2014, vol. 49, pp. 212-216.

13. Mikishanina E.A., Terent'ev A.G. Ob opredelenii napriazhennogo sostoianiia uprugo-poristoi sredy [On the determination of the stress state of an elastic-porous medium]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo universiteta, Seriia fiziko-matematicheskie nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 204-215.

14. Mikishanina E.A. Chislennoe opredelenie konturov obvodneniya v zadachah nestacionarnoj fil'tracii [Numerical determination of the contours of flooding in problems of nonstationary filtration]. *Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzh'ya*, 2017, no. 1, pp. 21-24.

15. Naishtut Iu.S. Reshenie kraevykh zadach teorii tonkikh uprugikh obolochek metodom Neimana [Solution of boundary value problems of the theory of thin elastic shells by the method of Neumann]. *Komp'iuternye issledovaniia i modelirovanie*, 2015, vol. 6, no. 6, pp. 1143-1153.

16. Novozhilov V.V. Teoriia tonkikh obolochek. [Theory of thin shells]. *Leningrad, Sudpromgiz*, 1962, 431 p.

17. Terent'ev A.G. Kraevye zadachi teorii poligarmonicheskikh uravnenii i ikh chislennoe reshenie [Boundary value problems of the theory of polyharmonic equations and their numerical solution]. *Innovatsii v obrazovatel'nom protsesse*, Moscow, Izd-vo MGOU, 2007, no. 5, pp. 194-199.

18. Terent'ev A.G. Teoriya uprugosti s ehlementami soprotivleniya materialov i plastichnosti [Theory of elasticity elements of strength of materials and plasticity]. *Cheboksary, Izd-vo Chuvash. un-ta*, 2016, 264 p.

19. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya [Course of the differential and integral calculus]. *Moscow, Fizmatlit Publ*., 2008, vol. 3, 728 p.

20. Antonetti P.F., Manzini G., Verani M. The conforming virtual element method for polyharmonic problems, MOX-Preprint 56/2018.

21. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells, *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 2014, vol.35, no. 4, pp. 371-383.

22. Ciarlet P.G. Mathematical elasticity. Vol. III: Theory of shells, Collection “Studies in Mathematics and it application.” *North-Holland, Amsterdam*, 2000, 659 p.

23. Ganzolla F., Grunau H.-Ch., Sweers G. Polyharmonic boundary value problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains. In: Lecture Notes in Mathematics, *Berlin, Springer*, 2010, vol. 1991.

24. Lukinov V.L., Mikhailov G.A. Monte Carlo methods for solving the first boundary value problem for a polyharmonic equation, *Computational mathematics and mathematical physics*, 2005, vol. 45, no. 3, pp. 476 – 489.

25. Lipnikov K, Manzini G, Moulton G.D., Shashkov M. The mimetic finite difference method for elliptic and parabolic problems with a staggered discretization of diffusion coefficient, *Journal of Computational Physics*, 2016, no. 305, pp. 111 – 126.

26. MacDonald M., Kulatunga M.P. Finite Element Analysis of Cold-Formed Steel Structurial Members with Performations Subjected to Compression Loading, *Mechanics and Mechanical Engineering*, 2013, vol. 17, no. 2, pp. 127-139.

27. Mikishanina E.A. Solution of boundary value problems for a system of polyharmonic equations of a special type with applications, *Journal of Phisics: conf. series*, 2019, 1158, 032033.

28. Natarajan S, Bordas P.A., Ooi E.T. Virtual and smoothed finite elements: a connection and its application to polygonal/polyhedral finite element methods, *International Journal on Numerical Methods in Engineering*, 2015, no. 104(13), pp. 1173–1199.

29. Skubachevskii A.L. Bondary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications, *Journal of Phisics: conf. series*, 2016, vol. 71, no. 5, pp. 801-812.

30. Zeinikiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. *Oxford, Butterworth-Heinemann*, 2000, 707 p.