



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.14

УДК 539.3

НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТЫХ ПЛАСТИН

С.О. Папков

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 11 марта 2019 г.
Принята: 14 ноября 2019 г.
Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

пластина, аналитическое решение, бесконечная система линейных уравнений, собственные частоты колебаний.

АННОТАЦИЯ

Точные решения задач колебаний и устойчивости в механике деформируемого твердого тела встречаются достаточно редко. Для прямоугольных толстых пластин точные решения задачи об установившихся колебаниях построены в форме тригонометрических рядов лишь для случая, когда противоположные стороны пластины являются шарнирно-опертыми. Дискуссия о возможности построения точных решений в иных случаях граничных условий продолжается до настоящего времени. Как правило, приближенное решение строится в аналитической форме на основе вариационного подхода. Заметим, что при возрастании частоты колебаний приходится увеличивать и число базисных функций, вовлекаемых в решение, что делает неэффективным использование подобных решений для описания структурного элемента в рамках таких методов, как Continuous Element Method, Spectral Element Method и Dynamic Stiffness Method.

В представленной статье на основе метода суперпозиции впервые получены аналитические решения для свободных колебаний толстых ортотропных пластин. Для построения общего решения уравнений колебаний предлагается использовать модифицированный тригонометрический базис, с помощью которого оказывается возможным свести краевую задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены случаи практически важных граничных условий для полностью свободных и полностью зажатых сторон пластины.

Представленные аналитические решения для полностью свободных и полностью зажатых сторон пластины позволяют описать структурный элемент в виде толстой ортотропной пластины с помощью матрицы динамической жесткости. В свою очередь, это позволяет использовать данные элементы для моделирования более сложных структур. Полученные результаты могут также применяться при проектировании конструкций, разработке новых устройств и оптимизации их параметров.

© ПНИПУ

© Папков Станислав Олегович – к.ф.-м.н., доц., зав. каф., e-mail: stanislav.papkov@gmail.com,
ID: [0000-0001-8624-0846](https://orcid.org/0000-0001-8624-0846)

Stanislav O. Papkov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Department,
e-mail: stanislav.papkov@gmail.com, ID: [0000-0001-8624-0846](https://orcid.org/0000-0001-8624-0846).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

NEW ANALYTICAL SOLUTIONS FOR VIBRATION PROBLEM OF THICK PLATES

S.O. Papkov

Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019
Accepted: 14 November 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

plate, analytical solution, infinite system of linear equations, natural frequencies.

ABSTRACT

Exact solutions for the vibrations and stability problems in the mechanics of solids are sufficiently rare. For rectangular thick plates, exact solutions in the form of trigonometric series were constructed only for the case when all or two opposite sides of the plate are simply-supported. The discussion about the possibility of constructing exact solutions continues to this day. As a rule, an approximate solution is constructed in the analytical form on the basis of a variational approach. It should be noted, that as frequency increases, the number of basic functions involved in the solution also has to be increased, consequently the solutions of such type are inefficient for describing a structural element within the framework of such methods as the Continuous Element method, the Spectral Element method and the Dynamic Stiffness method.

In the present research, for the first time, the analytical solutions for the vibration problem of thick orthotropic plates are obtained. The modified trigonometric basis is used to construct the general solution for the free vibration problem of the plate in a series, permitting the derivation of an infinite system of linear algebraic equations. Cases of practically important boundary conditions of completely free sides and fully clamped sides are considered.

It should be noted that the presented analytical solutions for FFFF and CCCC boundary allows to completely describe the structural element in the form of a plate by means of a dynamic stiffness matrix and their use for modeling more complex structures, also in the framework of methods such as Continuous Element method, Spectral Element method and Dynamic Stiffness method. The obtained results could also be applied in projecting constructions, in developing new devices and in the optimization of their parameters in projecting of constructions, in developing new devices and in the optimization of their parameters.

© PNRPU

Введение

Пластины широко используются как структурные элементы в дизайне конструкций. Исследованию их статических и динамических характеристик посвящено большое количество публикаций, начиная с ранних работ С.П. Тимошенко [1] и заканчивая современными исследованиями. При этом точные решения задач о колебаниях и устойчивости в механике твердого тела встречаются достаточно редко. Практически большинство известных решений были получены еще на этапе становления теории упругости и выполняют на сегодняшний день роль эталона, с которым сверяются численные и аналитико-численные методы.

В теории толстых пластин Тимошенко, в частности в теории Рейснера–Миндлина [2], даже в случае простейшей прямоугольной области точное аналитическое решение возможно лишь для пластин с двумя противоположными шарнирно-опертыми краями [3–5]. Как правило, приближенное решение для иных граничных условий строится в аналитической форме на основе вариационного подхода [6]. Заметим, что при возрастании частоты колебаний приходится увеличивать и число базисных функций, вовлекаемых в решение, в итоге порядок системы линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов достаточно быстро возрастает. При анализе отдельной пластины данная трудность легко преодолима, однако использование подобных решений для описания структурного элемен-

та в рамках таких методов, как Continuous Element Method [7], Spectral Element Method [8], Dynamic Stiffness Method [9–15], оказывается неэффективным. В связи с этим возникает потребность в получении новых аналитических решений, которые смогли бы обеспечить требуемый компромисс между точностью решения для элемента и эффективностью численной реализации при расчете ансамбля пластин. Преодоление данного ограничения связано с новыми аналитическими решениями для динамических элементов, то есть с разработкой подхода к решению задач колебания и устойчивости теории толстых пластин, позволяющего описать поведение динамического элемента в любом требуемом диапазоне частот. В этом контексте новые решения для структурных элементов дают возможность более эффективного анализа практически значимых задач, в том числе и на основе метода спектральной динамической жесткости.

Вопросам построения эффективных аналитических решений для пластин, которые не имеют заделки в виде шарнирного опирания, посвящено большое количество исследований. Дискуссия о возможности построения точных решений продолжается до сих пор. Так, например, в недавних работах Y. Xing и B. Liu [16, 17] предлагается спорный метод «dual separation of variables», посредством которого авторы строят замкнутое аналитическое решение задачи о колебаниях полностью защемленной толстой прямоугольной пластины.

В относительно недавних работах для анализа свободных колебаний прямоугольных пластин Миндлина используются как аналитические, так и численные подходы. Среди этих работ можно отметить работы D.J. Gorman [18, 19], в которых на основе метода суперпозиции строятся аналитические решения для пластин Миндлина с различными граничными условиями, в том числе для пластин с упругой заделкой. В работе Liew и др. [6] получены собственные частоты колебаний на основе pb-2-метода Релея–Ритца; Cheung и Zhou [20] использовали в качестве базиса метода Релея–Ритца статические балочные функции, Saha и др. [21] представили новый класс базисных функций метода Релея–Ритца для пластины со свободными сторонами. В работе [22] для анализа свободных колебаний толстых пластин был предложен DSC-element Method. В работах [23–25] представлена модификация Dynamic Stiffness Method для изотропных толстых пластин, развитая на основе аналитических решений [18].

В данной статье предлагается использовать в качестве базисных функций метода суперпозиции модифицированные тригонометрические функции [26, 27], дающие возможность получить аналитическое решение задачи, описывающее все четыре типа симметрии напряженно-деформированного состояния пластины. Указанный подход впервые позволяет свести исследование задачи о собственных колебаниях толстой ортотропной пластины для случаев полностью заземленных и свободных краев к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений и построить эффективный алгоритм определения собственных частот и форм колебаний пластины.

1. Основные уравнения и общее решение задачи

На рис. 1 представлена прямоугольная пластина $\{(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]\}$ толщиной h . Упругие свойства материала можно описать при помощи технических упругих констант: модулей Юнга E_1 и E_2 вдоль на-

правлений координатных осей x и y , модулей сдвига G_{12} и G_{13} , G_{23} и коэффициентов Пуассона ν_{12} и ν_{21} . Рассмотрим частный случай ортотропии материала, когда $G_{12} = G_{13} = G_{23}$. Согласно принципу Бетти

$$E_2 \nu_{12} = E_1 \nu_{21}$$

материал пластины описывается четырьмя упругими постоянными.

Следуя теории толстых пластин Рейснера–Миндлина [1, 4], компоненты вектора смещений можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u^0(x, y, t) + z\varphi_x^0(x, y, t), \\ V(x, y, z, t) &= v^0(x, y, t) + z\varphi_y^0(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$W(x, y, z, t) = w^0(x, y, t)$$

Теория Миндлина предполагает, что элемент пластины смещается в прямолинейном направлении относительно срединной поверхности пластины, но, в отличие от классической теории пластин, это направление не является обязательно перпендикулярным к срединной поверхности. Данное предположение приводит к двум дополнительным степеням свободы относительно углов поворота, в силу чего углы поворота φ_x^0 и φ_y^0 могут рассматриваться как независимые функции.

Как известно, силовые характеристики (моменты, сдвиговые силы) могут быть выражены в форме

$$\begin{aligned} M_x &= D_1 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \varphi_y^0}{\partial y}; \quad M_y = D_{12} \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} + D_2 \frac{\partial \varphi_y^0}{\partial y}; \\ M_{xy} &= D_{66} \left(\frac{\partial \varphi_x^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y^0}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$Q_x = A_{44} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} + \varphi_x^0 \right); \quad Q_y = A_{55} \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} + \varphi_y^0 \right),$$

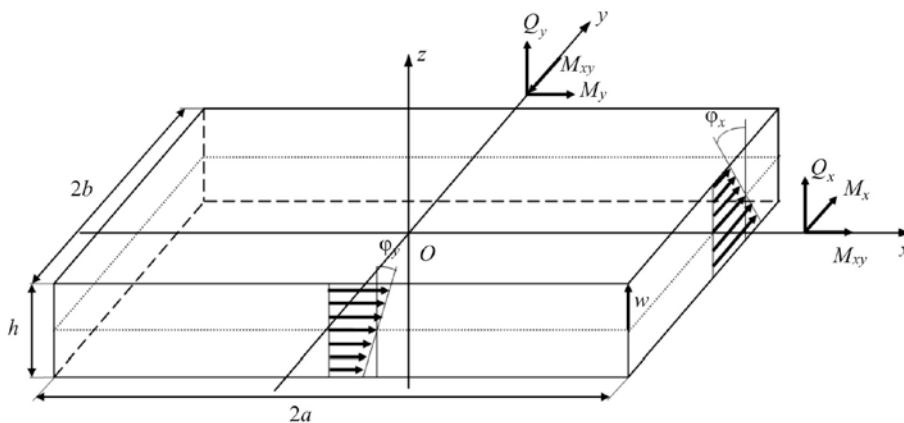


Рис. 1. Координатная система и обозначения для смещений и сил

Fig. 1. Coordinate system, forces and displacements of a plate element

где κ – коэффициент сдвига; $D_1, D_2, D_{12}, D_{66}, A_{44}$ и A_{55} – упругие константы, связанные с техническими константами следующим образом:

$$D_1 = \frac{h^3 E_1}{12(1-\nu_1 \nu_2)}; D_2 = \frac{h^3 E_2}{12(1-\nu_1 \nu_2)}; D_{12} = \frac{h^3 \nu_1 E_2}{12(1-\nu_1 \nu_2)};$$

$$D_{66} = \frac{h^3 G_{12}}{12}; A_{44} = \kappa h G_{13}; A_{55} = \kappa h G_{23}.$$

Уравнения свободных колебаний пластины

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \frac{d^2 \varphi_x^0}{dt^2},$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{d^2 \varphi_y^0}{dt^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{d^2 w^0}{dt^2}$$

в случае гармонических колебаний $\varphi_x^0(x, y, t) = \varphi_x(x, y)e^{i\omega t}$, $\varphi_y^0(x, y, t) = \varphi_y(x, y)e^{i\omega t}$ и $w^0(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$ принимают вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + k_6 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \tilde{k} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} - k_4 \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \varphi_x \right) + \Omega_h^4 \varphi_x = 0,$$

$$k_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + k_6 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \tilde{k} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} - k_5 \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \varphi_y \right) + \Omega_h^4 \varphi_y = 0, \quad (4)$$

$$k_4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + k_5 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \Omega^4 W = 0,$$

где $\Omega^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D_1}$, $\Omega_h^4 = \frac{h^2}{12} \Omega^4$ – частотные параметры; $k_2 = \frac{D_2}{D_1}$, $k_4 = \frac{A_{44}}{D_1}$, $k_5 = \frac{A_{55}}{D_1}$, $k_6 = \frac{D_{66}}{D_1}$, $\tilde{k} = \frac{D_{66} + D_{12}}{D_1}$.

Общее решение уравнения колебаний строится в виде ряда частных решений с неопределенными коэффициентами согласно методу суперпозиции. Здесь предлагается следовать подходу, который был развит в теории тонких пластин [26–28]. В частности, для толстой пластины общее решение уравнений (4) может быть представлено в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат:

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \sum_{k,j=0}^1 \begin{pmatrix} W_{kj} \\ \varphi_{x,kj} \\ \varphi_{y,kj} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где W_{00} является четной по обеим координатам; W_{01} – четная по x и нечетная по y и т.п.

Используя стандартную технику разделения переменных, общее решение уравнений колебаний (4) для каждого случая симметрии можно записать в форме суммы двух рядов Фурье с неопределенными коэффициентами.

Действительно, пусть члены первого ряда (тригонометрического по координате x) имеют вид

$$W_{kj}^{(1)} = A H_j(\rho y) T_k(\alpha x), \quad \varphi_{x,kj}^{(1)} = B H_j(\rho y) T_k'(\alpha x), \quad (6)$$

$$\varphi_{y,kj}^{(1)} = C H_j'(\rho y) T_k(\alpha x),$$

где α – некоторая константа разделения, обеспечивающая полноту решения на границе пластины, а тригонометрические и гиперболические функции в зависимости от четности имеют вид

$$H_0 = \text{ch}(z), \quad H_1 = \text{sh}(z), \quad T_0 = \cos(z), \quad T_1 = \sin(z).$$

Подстановка (6) в систему (4) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно A, B и C :

$$\begin{cases} \alpha k_4 A - (k_6 p^2 - \alpha^2 - k_4 + \Omega_h^4) B - \alpha p \tilde{k} C = 0, \\ p k_5 A + \alpha p \tilde{k} B - (k_2 p^2 - k_6 \alpha^2 - k_5 + \Omega_h^4) C = 0, \\ (k_5 p^2 - k_4 \alpha^2 + \Omega^4) A - \alpha k_4 B + p k_5 C = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для существования ненулевого решения (7) необходимо, чтобы определитель данной системы был равен нулю:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha k_4 & k_6 p^2 - \alpha^2 - k_4 + \Omega_h^4 & \alpha p \tilde{k} \\ p k_5 & -\alpha p \tilde{k} & k_2 p^2 - k_6 \alpha^2 - k_5 + \Omega_h^4 \\ k_5 p^2 - k_4 \alpha^2 + \Omega^4 & \alpha k_4 & -p k_5 \end{pmatrix} = 0, \quad (8)$$

что дает характеристическое уравнение для определения коэффициентов p :

$$c_0 p^6 + c_1 p^4 + c_2 p^2 + c_3 = 0, \quad (9)$$

где

$$c_0 = k_2 k_5 k_6,$$

$$c_1 = \alpha^2 \left(k_5 (\tilde{k}^2 - k_6^2) - k_2 (k_5 + k_4 k_6) \right) + \Omega_h^4 k_5 (k_2 + k_6) + \Omega^4 k_2 k_6 - k_2 k_4 k_5,$$

$$c_2 = \alpha^4 \left(k_4 (k_2 + k_6 - \tilde{k}^2) + k_5 k_6 \right) + \alpha^2 \left(\Omega^4 (\tilde{k}^2 - k_6^2) - k_5 \Omega_h^4 (1 + k_6) - k_2 (\Omega^4 + k_4 \Omega_h^4) \right) + k_4 \left(2k_5 (k_6 + \tilde{k}) - k_6 \Omega_h^4 \right) + \Omega^4 (\Omega_h^4 (k_2 + k_6) - k_2 k_4) + k_5 (\Omega_h^4 (\Omega_h^4 - k_4) - k_6 \Omega^4),$$

$$c_3 = -\alpha^6 k_4 k_6 + \alpha^4 \left(-k_4 k_5 + k_6 \Omega^4 + k_4 \Omega_h^4 (1 + k_6) \right) + \alpha^2 \left(\Omega^4 (k_5 + k_4 k_6 - \Omega_h^4) \right) + \Omega_h^4 (k_4 k_5 - k_6 \Omega^4 - k_4 \Omega_h^4) + \Omega^4 (\Omega_h^4 - k_4) (\Omega_h^4 - k_5).$$

Характеристическое уравнение (9) является бикубическим и допускает точное решение по формулам Кордано [29]:

$$p_1(\alpha) = \sqrt{\xi_5^+ + \xi_5^- - \frac{c_1}{3c_0}};$$

$$p_{2,3}(\alpha) = \sqrt{-\frac{\xi^+ + \xi^-}{2} - \frac{c_1}{3c_0} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(\xi^+ - \xi^-)}, \quad (10)$$

где

$$\xi^\pm = \sqrt[3]{r_p \pm \sqrt{r_p^2 + s_p^3}};$$

$$r_p = \frac{c_1 c_2}{6c_0^2} - \frac{c_3}{2c_0} - \frac{c_1^3}{27c_0^3}; \quad s_p = \frac{c_2}{3c_0} - \frac{c_1^2}{9c_0^2}. \quad (11)$$

Тогда нетривиальное решение системы (7) можно найти для каждой ветви $l = 1, 2, 3$ корней уравнения (9) в форме

$$A_l(\alpha) = \frac{\tilde{k}k_5 p_l^2 - k_4(k_2 p_l^2 - k_6 \alpha^2 - k_5 + \Omega_h^4)}{p_l(\tilde{k}k_5 p_l^2 - \tilde{k}k_4 \alpha^2 + k_4 k_5 + \tilde{k}\Omega^4)},$$

$$B_l(\alpha) = \frac{k_5^2 p_l^2 + (k_2 p_l^2 - k_6 \alpha^2 - k_5 + \Omega_h^4)(k_5 p_l^2 - k_4 \alpha^2 + \Omega^4)}{\alpha p_l(\tilde{k}k_5 p_l^2 - \tilde{k}k_4 \alpha^2 + k_4 k_5 + \tilde{k}\Omega^4)}, \quad (12)$$

$$C_l(\alpha) = 1.$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$, частное решение (6) будет зависеть лишь от координаты y :

$$W_{kj}^{(1)} = AH_j(p_0 y); \quad \Phi_{x,kj}^{(1)} = 0; \quad \Phi_{y,kj}^{(1)} = H'_j(p_0 y),$$

что приводит к характеристическому уравнению вида

$$k_2 k_5 p_0^4 + (k_2 \Omega^4 + k_5 \Omega_h^4) p_0^2 + \Omega^4 (\Omega_h^4 - k_5) = 0, \quad (13)$$

корни которого имеют вид

$$p_{l,0} = \sqrt{\frac{-(\Omega^4 k_2 + \Omega_h^4 k_5) \pm \sqrt{(\Omega^4 k_2 + \Omega_h^4 k_5)^2 + 4k_2 k_5^2 \Omega^4}}{2k_2 k_5}}, \quad (14)$$

где $l = 0$ соответствует знаку «+» и $l = 1$ соответствует знаку «-».

При этом

$$A_{l,0} = \frac{k_5 p_{l,0}}{k_5 p_{l,0}^2 + \Omega^4}. \quad (15)$$

Аналогичным образом строится часть решения в форме тригонометрического ряда по координате y . Действительно, решение в форме

$$W_{kj}^{(2)} = E H_k(qx) T_j(\beta y),$$

$$\Phi_{x,kj}^{(2)} = F H'_k(qx) T_j(\beta y), \quad (16)$$

$$\Phi_{y,kj}^{(2)} = G H_k(qx) T'_j(\beta y)$$

приводит после подстановки в систему дифференциальных уравнений (4) к равенствам

$$\begin{cases} qk_4 E + (q^2 - k_6 \beta^2 - k_4 + \Omega_h^4) F + q\beta \tilde{k} G = 0, \\ \beta k_5 E + q\beta \tilde{k} F - (k_6 q^2 - k_2 \beta^2 - k_5 + \Omega_h^4) G = 0, \\ (k_4 q^2 - k_5 \beta^2 + \Omega^4) E - qk_4 F - \beta k_5 G = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Определитель системы (17) дает характеристическое уравнение для определения q следующего вида:

$$d_0 q^6 + d_1 q^4 + d_2 q^2 + d_3 = 0, \quad (18)$$

где

$$d_0 = k_4 k_6,$$

$$d_1 = \beta^2 (k_4 (\tilde{k}^2 - k_6^2 - k_2) - k_5 k_6) + \Omega_h^4 k_4 (1 + k_6) + \Omega^4 k_6 - k_4 k_5,$$

$$d_2 = \beta^4 (k_5 (k_2 + k_6^2 - \tilde{k}^2) + k_2 k_4 k_6) + \beta^2 (2k_4 k_5 (k_6 + \tilde{k}) - \Omega^4 (k_2 + k_6^2 - \tilde{k}^2) -$$

$$-\Omega_h^4 (k_2 k_4 + k_5 + k_4 k_6 + k_5 k_6)) +$$

$$+ \Omega^4 (\Omega_h^4 (1 + k_6) - k_5 - k_4 k_6) + k_4 \Omega_h^4 (\Omega_h^4 - k_5),$$

$$d_3 = -\beta^6 k_2 k_5 k_6 + \beta^4 (-k_2 k_4 k_5 + k_2 k_6 \Omega^4 + k_5 \Omega_h^4 (k_2 + k_6)) +$$

$$+ \beta^2 (\Omega^4 (k_2 k_4 + k_5 k_6 - k_2 \Omega_h^4) +$$

$$+ \Omega_h^4 (k_4 k_5 - k_6 \Omega^4 - k_5 \Omega_h^4)) + \Omega^4 (\Omega_h^4 - k_4) (\Omega_h^4 - k_5).$$

Полагая $F = 1$ в системе (17), неопределенные коэффициенты (16) находятся в форме

$$E_l(\beta) = \frac{\tilde{k}k_4 q_l^2 - k_5 (q_l^2 - k_6 \beta^2 - k_4 + \Omega_h^4)}{q_l (\tilde{k}k_4 q_l^2 - \tilde{k}k_5 \beta^2 + k_4 k_5 + \tilde{k}\Omega^4)}, \quad (19)$$

$$G_l(\alpha) = \frac{k_4^2 q_l^2 + (q_l^2 - k_6 \beta^2 - k_4 + \Omega_h^4) (k_4 q_l^2 - k_5 \beta^2 + \Omega^4)}{q_l \beta (\tilde{k}k_4 q_l^2 - \tilde{k}k_5 \beta^2 + k_4 k_5 + \tilde{k}\Omega^4)}.$$

Аналогично (13)–(15) строится частное решение для случая $\beta = 0$.

Как уже было отмечено ранее, константы разделения α и β могут быть выбраны произвольным образом, главное условие данного выбора заключается в полноте тригонометрических рядов по системе функций $\{T_k(\alpha x)\}$ и $\{T_j(\beta y)\}$ соответственно на границах пластины $x = \pm a$ и $y = \pm b$. Например, данные константы можно выбрать в виде, соответствующем классическим рядам Фурье для четной составляющей:

$$\alpha_{n,k} = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{k}{2} \right) = \begin{cases} \frac{\pi n}{a}, & k = 0, \\ \frac{\pi(2n-1)}{2a}, & k = 1; \end{cases}$$

$$\beta_{n,j} = \frac{\pi}{b} \left(n - \frac{j}{2} \right) = \begin{cases} \frac{\pi n}{b}, & j = 0, \\ \frac{\pi(2n-1)}{2b}, & j = 1, \end{cases} \quad (20)$$

или, наоборот, чтобы нечетная составляющая имела вид классического ряда Фурье:

$$\alpha_{n-1/2,k} = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{k+1}{2} \right) = \begin{cases} \frac{\pi(2n-1)}{2a}, & k = 0, \\ \frac{\pi n}{a}, & k = 1; \end{cases}$$

$$\beta_{n-1/2,j} = \frac{\pi}{b} \left(n - \frac{j+1}{2} \right) = \begin{cases} \frac{\pi(2n-1)}{2b}, & j=0, \\ \frac{\pi n}{b}, & j=1. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что для полноты представления решения по системе функций $\{T_k(\alpha_{n,k}x)\}$ и $\{T_j(\beta_{n,j}y)\}$ необходимо учитывать для четной составляющей общего решения частные решения, соответствующие $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. В то же время для представления по системе $\{T_k(\alpha_{n-1/2,k}x)\}$ и $\{T_j(\beta_{n-1/2,j}y)\}$ этого делать не нужно.

Суммируя построенные частные решения с некоторыми неопределенными коэффициентами X_{ln} и Y_{ln} , получаем общее решение (4) по системе $\{T_k(\alpha_{n,k}x)\}$ и $\{T_j(\beta_{n,j}y)\}$:

$$W_{kj} = \delta_{k0} (X_{10}A_{1,0k}H_j(p_{1,0k}y) + X_{20}A_{2,0k}H_j(p_{2,0k}y)) + \delta_{j0} (Y_{10}E_{1,0j}H_k(q_{1,0j}x) + Y_{20}E_{2,0j}H_k(q_{2,0j}x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln}A_{l,nk}H_j(p_{l,nk}y)T_k(\alpha_{nk}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln}E_{l,nj}H_k(q_{l,nj}x)T_j(\beta_{nj}y); \quad (22)$$

$$\varphi_{x,kj} = \delta_{j0} (Y_{10}H'_k(q_{1,0j}x) + Y_{20}H'_k(q_{2,0j}x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln}B_{l,nk}H_j(p_{l,nk}y)T'_k(\alpha_{nk}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln}H'_k(q_{l,nj}x)T_j(\beta_{nj}y), \quad (23)$$

$$\varphi_{y,kj} = \delta_{k0} (X_{10}H'_j(p_{1,0k}y) + X_{20}H'_j(p_{2,0k}y)) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln}H'_j(p_{l,nk}y)T_k(\alpha_{nk}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln}G_{l,nj}H_k(q_{l,nj}x)T'_j(\beta_{nj}y), \quad (24)$$

где δ_{mn} – символ Кронекера.

И по системе функций $\{T_k(\alpha_{n-1/2,k}x)\}$ и $\{T_j(\beta_{n-1/2,j}y)\}$

$$W_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln}A_{l,nk}H_j(\tilde{p}_{l,nk}y)T_k(\alpha_{n-1/2,k}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln}E_{l,nj}H_k(\tilde{q}_{l,nj}x)T_j(\beta_{n-1/2,j}y), \quad (25)$$

$$\varphi_{x,kj} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln}B_{l,nk}H_j(\tilde{p}_{l,nk}y)T'_k(\alpha_{n-1/2,k}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln}H'_k(\tilde{q}_{l,nj}x)T_j(\beta_{n-1/2,j}y), \quad (26)$$

$$\varphi_{y,kj} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln}H'_j(\tilde{p}_{l,nk}y)T_k(\alpha_{n-1/2,k}x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln}G_{l,nj}H_k(\tilde{q}_{l,nj}x)T'_j(\beta_{n-1/2,j}y), \quad (27)$$

где $\tilde{p}_{l,nk}$ и $\tilde{q}_{l,nj}$ – корни характеристических уравнений (9) и (18), соответствующие константам разделения (21).

2. Решение в случае защемленной пластины

Условия полного защемления сторон пластины

$$x = \pm a: W = \varphi_x = \varphi_y = 0 \text{ и } y = \pm b: W = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (28)$$

можно выполнить, опираясь на любое из представленных выше решений. Однако форма решения (25)–(27) позволяет выполнить четыре условия из (28) точно, в то время как решение (22)–(24) – только два. Действительно, для (25)–(27) можно увидеть, что любого типа симметрии

$$T_k(\alpha_{n-1/2,k}a) = T_j(\beta_{n-1/2,j}b) = 0,$$

тогда, если неизвестные коэффициенты $X_{ln}H_j(\tilde{p}_{l,nk}b) = x_{ln}$ и $Y_{ln}H_k(\tilde{q}_{l,nj}a) = y_{ln}$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{A_{3,nk}B_{1,nk} - A_{1,nk}B_{3,nk}}{A_{2,nk}B_{3,nk} - A_{3,nk}B_{2,nk}} x_{1n}, \\ x_{3n} &= \frac{A_{1,nk}B_{2,nk} - A_{2,nk}B_{1,nk}}{A_{2,nk}B_{3,nk} - A_{3,nk}B_{2,nk}} x_{1n}, \\ y_{2n} &= \frac{E_{3,nj}G_{1,nj} - E_{1,nj}G_{3,nj}}{E_{2,nj}G_{3,nj} - E_{3,nj}G_{2,nj}} y_{1n}, \\ y_{3n} &= \frac{E_{1,nj}G_{2,nj} - E_{2,nj}G_{1,nj}}{E_{2,nj}G_{3,nj} - E_{3,nj}G_{2,nj}} y_{1n}, \end{aligned} \quad (29)$$

формулы (25)–(27) дают

$$W(\pm a, y) = W(x, \pm b) = \varphi_y(\pm a, y) = \varphi_x(x, \pm b) = 0.$$

Оставшиеся два краевых условия приводят к двум функциональным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varphi_{x,kj}(\pm a, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 x_{ln}B_{l,nk} \frac{H_j(\tilde{p}_{l,nk}y)}{H_j(\tilde{p}_{l,nk}b)} (-1)^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 y_{ln} \text{Cth}_k(\tilde{q}_{l,nj}a) T_j(\beta_{n-1/2,j}y) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{y,kj}(x, \pm b) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 x_{ln} \text{Cth}_j(\tilde{p}_{l,nk}b) T_k(\alpha_{n-1/2,k}x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 y_{ln}G_{l,nj} \frac{H_k(\tilde{q}_{l,nj}x)}{H_k(\tilde{q}_{l,nj}a)} (-1)^n = 0, \end{aligned}$$

где $\text{Cth}_j(z) = \frac{H'_j(z)}{H_j(z)}$.

Используя разложение гиперболических функций по тригонометрической системе [30]

$$\frac{H_k(qx)}{H_k(qa)} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \alpha_{m-1/2,k} T_k(\alpha_{m-1/2,k} x)}{\alpha_{m-1/2,k}^2 + q^2},$$

$$\frac{H_j(py)}{H_j(pb)} = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \beta_{m-1/2,j} T_j(\beta_{m-1/2,j} y)}{\beta_{m-1/2,j}^2 + p^2}$$

и тождество, возникающее из теоремы Виета для корней характеристических уравнений

$$k_5 k_2 (\alpha_{m-1/2,k}^2 + \tilde{q}_{1,nj}^2) (\alpha_{m-1/2,k}^2 + \tilde{q}_{2,nj}^2) (\alpha_{m-1/2,k}^2 + \tilde{q}_{3,nj}^2) = k_4 (\beta_{n-1/2,j}^2 + \tilde{p}_{1,mk}^2) (\beta_{n-1/2,j}^2 + \tilde{p}_{2,mk}^2) (\beta_{n-1/2,j}^2 + \tilde{p}_{3,mk}^2),$$

получаем из равенств (30) бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} x_m^c &= \frac{2\alpha_{m-1/2,k}}{\Delta_{1m}^c} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m-1/2,k}^2 \xi_n^x + \eta_n^x}{(\beta_{n-1/2,j}^2 + \tilde{p}_{1,mk}^2)(\beta_{n-1/2,j}^2 + \tilde{p}_{2,mk}^2)(\beta_{n-1/2,j}^2 + \tilde{p}_{3,mk}^2)} y_n^c, \\ y_m^c &= \frac{2\beta_{m-1/2,j}}{\Delta_{2m}^c} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{m-1/2,j}^2 \xi_n^y + \eta_n^y}{(\alpha_{n-1/2,k}^2 + \tilde{q}_{1,mj}^2)(\alpha_{n-1/2,k}^2 + \tilde{q}_{2,mj}^2)(\alpha_{n-1/2,k}^2 + \tilde{q}_{3,mj}^2)} x_n^c, \end{aligned} \quad (31)$$

$(m = 1, 2, \dots)$

где

$$x_m^c = \frac{(-1)^m k_2 k_5}{A_{2,mk} B_{3,mk} - A_{3,mk} B_{2,mk}} x_{1m},$$

$$y_m^c = \frac{(-1)^m k_4}{E_{2,mj} G_{3,mj} - E_{3,mj} G_{2,mj}} y_{1m},$$

$$\xi_n^x = G_{1,nj} E_{2,nj} G_{3,nj} (\tilde{q}_{3,nj}^2 - \tilde{q}_{1,nj}^2) + G_{1,nj} E_{3,nj} G_{2,nj} (\tilde{q}_{1,nj}^2 - \tilde{q}_{2,nj}^2) + G_{2,nj} E_{1,nj} G_{3,nj} (\tilde{q}_{2,nj}^2 - \tilde{q}_{3,nj}^2),$$

$$\eta_n^x = G_{1,nj} E_{2,nj} G_{3,nj} \tilde{q}_{2,nj}^2 (\tilde{q}_{3,nj}^2 - \tilde{q}_{1,nj}^2) + G_{1,nj} E_{3,nj} G_{2,nj} \tilde{q}_{3,nj}^2 \times (\tilde{q}_{1,nj}^2 - \tilde{q}_{2,nj}^2) + G_{2,nj} E_{1,nj} G_{3,nj} \tilde{q}_{1,nj}^2 (\tilde{q}_{2,nj}^2 - \tilde{q}_{3,nj}^2),$$

$$\xi_n^y = B_{1,nj} A_{2,nj} B_{3,nj} (\tilde{p}_{3,nk}^2 - \tilde{p}_{1,nk}^2) + B_{1,nj} A_{3,nj} B_{2,nj} (\tilde{p}_{1,nk}^2 - \tilde{p}_{2,nk}^2) + B_{2,nj} A_{1,nj} B_{3,nj} (\tilde{p}_{2,nk}^2 - \tilde{p}_{3,nk}^2),$$

$$\eta_n^y = B_{1,nj} A_{2,nj} B_{3,nj} \tilde{p}_{2,nk}^2 (\tilde{p}_{3,nk}^2 - \tilde{p}_{1,nk}^2) + B_{1,nj} A_{3,nj} B_{2,nj} \tilde{p}_{3,nk}^2 \times (\tilde{p}_{1,nk}^2 - \tilde{p}_{2,nk}^2) + B_{2,nj} A_{1,nj} B_{3,nj} \tilde{p}_{1,nk}^2 (\tilde{p}_{2,nk}^2 - \tilde{p}_{3,nk}^2),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1m}^c / a &= (A_{2,mk} B_{3,mk} - A_{3,mk} B_{2,mk}) \text{Cth}_j(\tilde{p}_{1,nk} b) + \\ &+ (A_{3,mk} B_{1,mk} - A_{1,mk} B_{3,mk}) \text{Cth}_j(\tilde{p}_{2,nk} b) + \\ &+ (A_{1,mk} B_{2,mk} - A_{2,mk} B_{1,mk}) \text{Cth}_j(\tilde{p}_{3,nk} b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2m}^c / b &= (E_{2,mj} G_{3,mj} - E_{3,mj} G_{2,mj}) \text{Cth}_k(\tilde{q}_{1,nj} a) + \\ &+ (E_{3,mj} G_{1,mj} - E_{1,mj} G_{3,mj}) \text{Cth}_k(\tilde{q}_{2,nj} a) + \\ &+ (E_{1,mj} G_{2,mj} - E_{2,mj} G_{1,mj}) \text{Cth}_k(\tilde{q}_{3,nj} a). \end{aligned}$$

3. Решение в случае свободных краев пластины

Как известно, в случае полностью свободных краев толстой пластины краевые условия принимают следующий вид:

$$x = \pm a: \quad M_x = M_{xy} = Q_x = 0$$

и (32)

$$y = \pm b: \quad M_y = M_{xy} = Q_y = 0.$$

Вычисляя по формулам (2) силовые характеристики пластины на основе общего решения (22)–(24), можно получить

$$\begin{aligned} -\frac{M_{x,kj}}{D_1} &= k^* \delta_{k0} (X_{10} p_{1,0k} H_j(p_{1,0k} y) + X_{20} p_{2,0k} H_j(p_{2,0k} y)) + \\ &+ \delta_{j0} (Y_{10} q_{1,0j} H_k(q_{1,0j} x) + Y_{20} q_{1,0j} H_k(q_{2,0j} x)) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln} (k^* p_{l,nk} - \alpha_{nk} B_{l,nk}) H_j(p_{l,nk} y) T_k(\alpha_{nk} x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln} (q_{l,nj} - k^* \beta_{nj} G_{l,nj}) H_k(q_{l,nj} x) T_j(\beta_{nj} y); \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} -\frac{M_{y,kj}}{D_1} &= k_2 \delta_{k0} (X_{10} p_{1,0k} H_j(p_{1,0k} y) + X_{20} p_{2,0k} H_j(p_{2,0k} y)) + \\ &+ \delta_{j0} k^* (Y_{10} q_{1,0j} H_k(q_{1,0j} x) + Y_{20} q_{1,0j} H_k(q_{2,0j} x)) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln} (k_2 p_{l,nk} - k^* \alpha_{nk} B_{l,nk}) H_j(p_{l,nk} y) T_k(\alpha_{nk} x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln} (k^* q_{l,nj} - k_2 \beta_{nj} G_{l,nj}) H_k(q_{l,nj} x) T_j(\beta_{nj} y); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} -\frac{M_{xy,kj}}{D_1} &= k_6 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln} (\alpha_{nk} + p_{l,nk} B_{l,nk}) H'_j(p_{l,nk} y) \times \\ &\times T'_k(\alpha_{nk} x) + k_6 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln} (\beta_{nj} + q_{l,nj} G_{l,nj}) \times \\ &\times H'_k(q_{l,nj} x) T'_j(\beta_{nj} y); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{x,kj}}{D_1} &= k_4 \delta_{j0} (Y_{10} (q_{1,0j} E_{1,0j} - 1) H'_k(q_{1,0j} x) + \\ &+ Y_{20} (q_{2,0j} E_{2,0j} - 1) H'_k(q_{2,0j} x)) + \\ &+ k_4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln} (\alpha_{nk} A_{l,nk} - B_{l,nk}) H_j(p_{l,nk} y) T'_k(\alpha_{nk} x) + \\ &+ k_4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln} (q_{l,nj} E_{l,nj} - 1) H'_k(q_{l,nj} x) T_j(\beta_{nj} y); \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{y,kj}}{D_1} &= k_5 \delta_{k0} (X_{10} (p_{1,0k} A_{1,0k} - 1) H'_j(p_{1,0k} y) + \\ &+ X_{20} (p_{2,0k} A_{2,0k} - 1) H'_j(p_{2,0k} y)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ k_5 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 X_{ln} (p_{l,nk} A_{l,nk} - 1) H'_j(p_{l,nk} y) T_k(\alpha_{nk} x) + \\
 &+ k_5 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 Y_{ln} (\beta_{nj} E_{l,nj} - G_{l,nj}) H_k(q_{l,nj} x) T'_j(\beta_{nj} y), \quad (37)
 \end{aligned}$$

где $k^* = \tilde{k} - k_6$.

Учитывая, что для используемой тригонометрической системы функций верно тождество

$$T'_k(\alpha_{n,k} a) = T'_j(\beta_{n,j} b) = 0,$$

можно увидеть, что из шести краевых условий (32) четыре условия выполняются точно, если неизвестные коэффициенты связаны соотношениями

$$Y_{10} H'_k(q_{1,0j} a) = -Y_{20} H'_k(q_{2,0j} a) = \frac{k_4 q_{1,0j}^2 + \Omega^4}{k_4 (q_{1,0j}^2 - q_{2,0j}^2)} a y_0^F, \quad (38)$$

$$X_{10} H'_j(p_{1,0k} b) = -X_{20} H'_j(p_{2,0k} b) = \frac{k_5 p_{1,0k}^2 + \Omega^4}{k_5 (p_{1,0k}^2 - p_{2,0k}^2)} b x_0^F, \quad (39)$$

$$Y_{ln} H'_k(q_{l,nj} a) = a(-1)^{n+j} \tilde{T}_{nl} y_n^F, \quad (40)$$

$$X_{ln} H'_j(p_{l,nk} b) = b(-1)^{n+k} \tilde{S}_{nl} x_n^F \quad (l = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots), \quad (41)$$

где \tilde{T}_{nl} и \tilde{S}_{nl} – алгебраические дополнения к элементам $(1, l)$ матриц

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_{1,nj} E_{1,nj} - 1 & q_{2,nj} E_{2,nj} - 1 & q_{3,nj} E_{3,nj} - 1 \\ \beta_{nj} + q_{1,nj} G_{1,nj} & \beta_{nj} + q_{2,nj} G_{2,nj} & \beta_{nj} + q_{3,nj} G_{3,nj} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{1,nk} A_{1,nk} - 1 & p_{2,nk} A_{2,nk} - 1 & p_{3,nk} A_{3,nk} - 1 \\ \alpha_{nk} + p_{1,nk} B_{1,nk} & \alpha_{nk} + p_{2,nk} B_{2,nk} & \alpha_{nk} + p_{3,nk} B_{3,nk} \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся два краевых условия на моменты M_x и M_y выполняются из решения бесконечной системы относительно неизвестных x_n^F, y_n^F :

$$\begin{aligned}
 \delta_{k0} x_0^F &= -\frac{\delta_{k0} k^*}{\Delta_{10}^F} \left(\delta_{j0} y_0^F + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \left(1 - \frac{k_2 \beta_{nj} G_{l,nj}}{k^* q_{l,nj}} \right) y_n^F \right), \\
 \delta_{j0} y_0^F &= -\frac{\delta_{j0} k^*}{\Delta_{20}^F} \left(\delta_{k0} x_0^F + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \left(1 - \frac{\alpha_{nk} B_{l,nk}}{k^* p_{l,nk}} \right) x_n^F \right), \\
 x_m^F &= -\frac{2\delta_{j0} k^* \alpha_{mk}^2 (k_4 (q_{10j}^2 + q_{20j}^2) + \Omega^4) + k_4 q_{10j}^2 q_{20j}^2}{\Delta_{1m}^F k_4 (\alpha_{mk}^2 + q_{10j}^2)(\alpha_{mk}^2 + q_{20j}^2)} y_0^F - \\
 &\quad - \frac{2}{\Delta_{1m}^F} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \frac{q_{l,nj} (k^* q_{l,nj} - k_2 \beta_{nj} G_{l,nj})}{\alpha_{mk}^2 + q_{l,nj}^2} y_n^F, \\
 y_m^F &= -\frac{2\delta_{k0} k^* \beta_{mj}^2 (k_5 (p_{10k}^2 + p_{20k}^2) + \Omega^4) + k_5 p_{10k}^2 p_{20k}^2}{\Delta_{2m}^F k_5 (\beta_{mj}^2 + p_{10k}^2)(\beta_{mj}^2 + p_{20k}^2)} x_0^F -
 \end{aligned}$$

$$- \frac{2}{\Delta_{2m}^F} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \frac{p_{l,nk} (k^* p_{l,nk} - \alpha_{nk} B_{l,nk})}{\beta_{mj}^2 + p_{l,nk}^2} x_n^F, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (42)$$

где $\text{Th}_k(z) = \frac{H_k(z)}{H'_k(z)}$,

$$\begin{aligned}
 \Delta_{10}^F &= \frac{k_2 b}{k_5 (p_{10k}^2 - p_{20k}^2)} \times \\
 &\times (p_{10k} (k_5 p_{10k}^2 + \Omega^4) \text{Th}_j(p_{10k} b) - \\
 &- p_{20k} (k_5 p_{20k}^2 + \Omega^4) \text{Th}_j(p_{20k} b)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{20}^F &= \frac{a}{k_4 (q_{10j}^2 - q_{20j}^2)} (q_{10j} (k_4 q_{10j}^2 + \Omega^4) \text{Th}_k(q_{10j} a) - \\
 &- q_{20j} (k_4 q_{20j}^2 + \Omega^4) \text{Th}_k(q_{20j} a)),
 \end{aligned}$$

$$\Delta_{1m}^F = b \sum_{l=1}^3 (k_2 p_{l,nk} - k^* \alpha_{nk} B_{l,nk}) \tilde{S}_{ml} \text{Th}_j(p_{l,nk} b),$$

$$\Delta_{2m}^F = a \sum_{l=1}^3 (q_{l,nj} - k^* \beta_{mj} G_{l,nj}) \tilde{T}_{ml} \text{Th}_k(q_{l,nj} a).$$

4. Численные результаты

Нетривиальные решения однородных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (31) и (42) позволяют выполнить условия полного защемления (28) и свободных краев пластины (32). Наиболее часто используемым методом для отыскания приближенного решения и собственных частот является метод редукции, когда в бесконечной системе удерживают первые N уравнений и неизвестных, отбрасывая остальные. При этом определитель редуцированной системы служит дисперсионным уравнением для определения собственных частот.

В табл. 1 представлена сходимость метода при отыскании собственной частоты для удлиненной толстой изотропной пластины в случае свободных краев. Можно заметить, что удержание в расчетах $N = 16$ первых слагаемых в представлении решения (22)–(24) позволяет достичь сходимости метода. При этом полученные результаты находятся в отличном соответствии с известными в литературе [18] значениями собственных частот. Аналогичная картина наблюдается и для других комбинаций параметров задачи, в том числе и для ортотропного материала.

Заметим, что согласно представленному подходу уравнения свободных колебаний (3) выполняются по построению. Качество полученного приближенного решения определяется точностью выполнения однородных граничных условий. При этом из трех граничных условий на каждой из сторон пластины два условия оказываются выполненными по построению. В частности, для защемленной пластины на сторонах $x = \pm a$ форма решения (25)–(27), такова, что $W = \varphi_y = 0$, а на

сторонах $y = \pm b$ получаем $W = \varphi_x = 0$. Аналогично для пластины со свободными краями: на сторонах $x = \pm a$ форма решения (22)-(24) приводит к тому, что $M_{xy} = Q_x = 0$, на сторонах $y = \pm b$ получаем $M_{xy} = Q_y = 0$. Таким образом, на каждой стороне пластины выполняется лишь по одному краевому условию из решения бесконечной системы, соответственно, в угловой точке будут выполнены точно все краевые условия, кроме двух условий, выполнение которых обеспечивает решение соответствующей бесконечной системы. В табл. 2 представлено выполнение однородных краевых условий для пластины со свободными краями $M_x(a, y) = 0$ при увеличении порядка редуцированной системы N (для второго условия $M_y(x, b) = 0$ – ситуация схожая). Можно увидеть, что с увеличением N качество выполнения однородных условий улучшается, в том числе и в угловой точке. Конечно, точно выполнить условие в угловой точке без исследования асимптотики неизвестных в бесконечной системе не представляется возможным, тем не менее численный анализ показывает, что все поставленные краевые условия выполняются с удовлетворительной точностью.

Таблица 1

Сходимость метода редукции при отыскании собственных частот толстой пластины $\nu = 0,333, \kappa = 0,8601, h/a = 0,1, b/a = 3$ со свободными краями

Table 1

Convergence of the reduction method for the fundamental natural frequency of a rectangular completely free isotropic Mindlin plate with $\nu = 0,333, \kappa = 0,8601, h/a = 0,1, b/a = 3$

Метод	Ω_j				
	1	2	3	4	5
$N = 4$	0,7673	1,0252	1,2781	1,4904	1,8021
$N = 8$	0,7670	1,0248	1,2778	1,4902	1,7910
$N = 16$	0,7670	1,0248	1,2776	1,4902	1,7909
[18]	0,7657	1,0140	1,2715	1,4715	1,7741

Таблица 2

Сходимость в выполнении однородных краевых условий для первой собственной частоты $\Omega = 0,7657$ при $\nu = 0,333, \kappa = 0,8601, h/a = 0,1, b/a = 3$

Table 2

Convergence test of fulfilling FFFF boundary conditions for first natural frequency $\Omega = 0,7657$ with $\nu = 0,333, \kappa = 0,8601, h/a = 0,1, b/a = 3$

$\frac{y}{b}$	$M_x(a, y) / M_{\max}$		
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$
0,0	0,0457	0,0028	0,0003
0,2	-0,0217	0,0004	-0,0002
0,4	0,0119	-0,0006	0,0001
0,6	-0,0894	-0,0015	-0,0005
0,8	-0,1119	0,0112	-0,0008
1,0	0,1243	-0,0226	-0,0012

В табл. 3 представлена сходимость метода для пластины с защемленными краями в сравнении с результатами [22]. Так же как и для пластины со свободными краями, удержание в бесконечной системе первых $N = 8$ уравнений и неизвестных позволяет получить удовлетворительную точность решения. Полученные решения практически совпадают с данными [22].

Таблица 3

Сходимость метода редукции при отыскании собственных частот толстой квадратной пластины $\nu = 0,3, \kappa = 5/6, h/a = 0,1$ с защемленными краями

Table 3

Convergence of the reduction method for the fundamental natural frequency of a square clamped isotropic Mindlin plate with $\nu = 0,3, \kappa = 5/6, h/a = 0,1$

Метод	Ω_j				
	1	2	3	4	5
$N = 4$	0,9086	1,2546	1,2546	1,4850	1,6112
$N = 8$	0,9084	1,2543	1,2543	1,4847	1,6109
$N = 16$	0,9083	1,2542	1,2542	1,4847	1,6108
[22]	0,9077	1,2537	1,2537	1,4843	1,6108

Разработанный в статье подход дает возможность построить собственные формы колебаний пластины. На рис. 2 представлены собственные формы толстой квадратной пластины $h/a = 0,1$ со следующими параметрами: $\kappa = 0,8601, E_1 = 60,7$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 12$ ГПа, $\nu_{12} = 0,23, \nu_{21} = 0,094$ в случае защемленных и свободных краев пластины.

Заключение

Полученные асимптотические точные решения задач теории упругости для колебаний толстых пластин имеют самостоятельное теоретическое значение, так как впервые удается получить эффективное аналитическое решение поставленных задач. Практическое значение представленных задач состоит в том, что высокочастотные колебания перечисленных выше объектов встречаются в различных прикладных задачах технического характера. В частности, пластинки прямоугольной формы представляют особый интерес в микро- и наноэлектронике, в задачах строительной механики, при моделировании технических систем, в геофизике и др. Данные решения могут быть использованы для параметрической оптимизации, анализа устойчивости к вибрации технических систем.

В частности, данные решения могут служить основой для развития Dynamic Stiffness Method применительно к ансамблям толстых ортотропных пластин и найти свое коммерческое применение при разработке программных комплексов на основе DSM для моделирования сложных технических систем в таких отраслях, как судостроение, авиастроение, автомобилестроение.

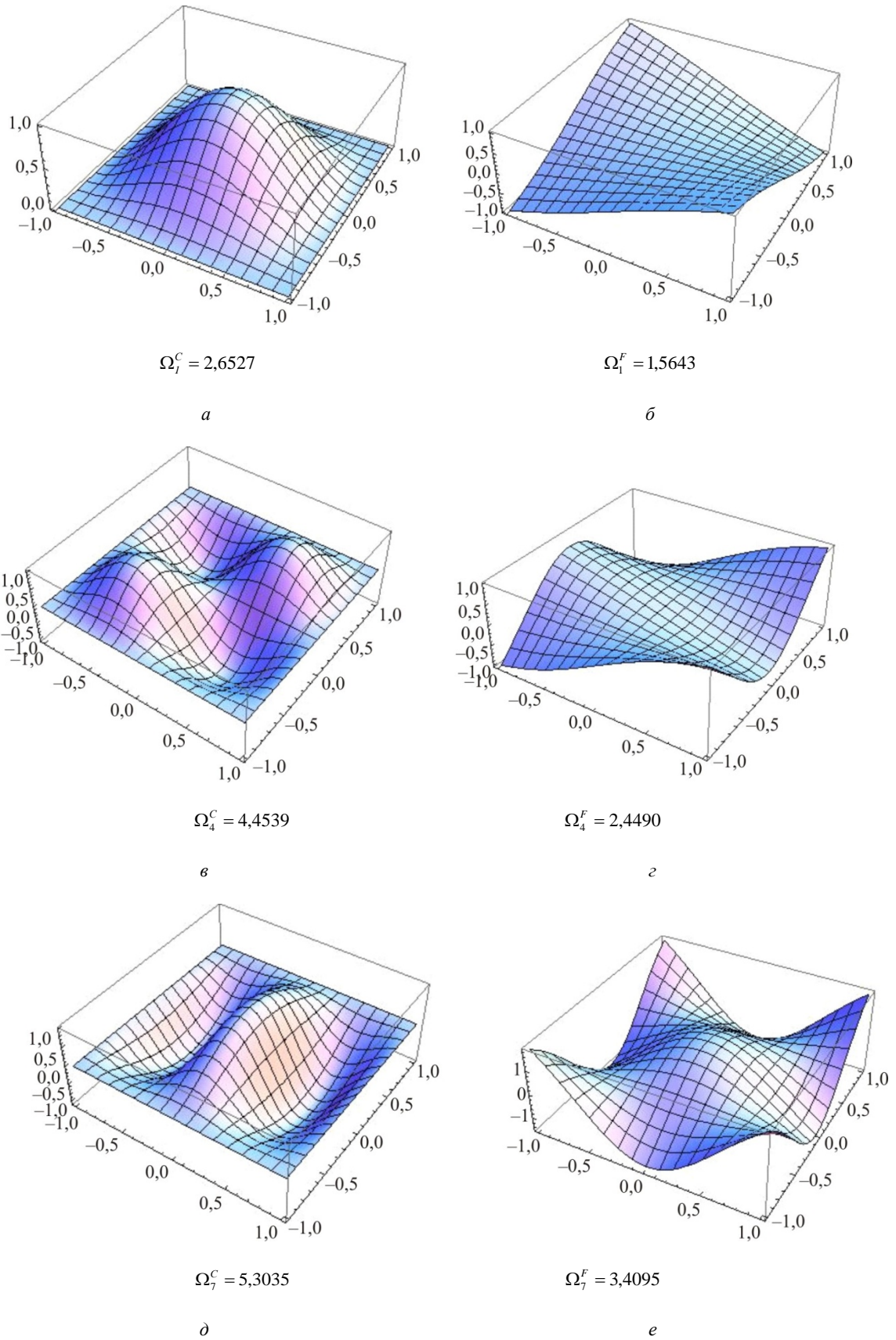


Рис. 2. Собственные формы колебаний толстой ортотропной пластины: *a, c, e* – полностью защемленная пластина; *b, d, f* – пластина со свободными краями

Fig. 2. The natural modes of a thick orthotropic plate: *a, c, e* – fully clamped plate; *b, d, f* – completely free plate

Благодарность

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополя в рамках научного проекта № 18-41-920001\18.

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с
2. Mindlin R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates // *ASME Journal Applied Mechanics*. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.
3. Xiang Y., Wei G.W. Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin plates // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – Vol. 41. – P. 279–294.
4. Leissa A.W. Free vibration of rectangular plates // *Journal of Sound and Vibration*. – 1973. – Vol. 26–31. – P. 257–293.
5. Xiang Y. Vibration of rectangular Mindlin plates resting on non-homogenous elastic foundations // *Int. J. Mech. Sci.* – 2003. – Vol. 45. – P. 1229–1244.
6. Vibration of Mindlin plates / K.M. Liew, Y.Xiang, C.M. Wang, S. Kitipornchai // Elsevier Science. – 1998. – 412 p.
7. Casimir J.B., Kevorkian S., Vinh T. The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements: application to Kirchhoff's plate continuous elements // *Journal of Sound and Vibration*. – 2005. – Vol. 287. – P. 571–589.
8. Lee U., Lee J. Spectral-element method of Levy-type plates subjected to dynamic loads // *J. of Eng. Mech.* – 1999. – Feb. – P. 243–247.
9. Williams F.W., Wittrick W. H. Exact buckling and frequency calculations surveyed // *J. of Str. Eng. ASCE*. – 1983. – Vol. 109. – P. 169–187.
10. Boscolo M., Banerjee J.R. Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory // *Computers & Structures*. – 2011. – Vol. 189. – P. 395–410.
11. Liu X., Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies. Part I: Theory // *Computers & Structures*. – 2015. – Vol. 132. – P. 1274–1287.
12. Liu X., Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies. Part II: Applications // *Computers & Structures*. – 2015. – Vol. 132. – P. 1288–1302.
13. Liu X., Banerjee J.R. A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2017. – Vol. 87. – P. 136–160.
14. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case / J.R. Banerjee, S.O. Papkov, X. Liu, D. Kennedy // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 342. – P. 177–199.
15. Liu X., Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies. Part I: Theory // *Computers & Structures*. – 2015. – Vol. 132. – P. 1274–1287.
16. Xing Y., Liu B. Closed form solutions for free vibrations of rectangular Mindlin plates // *Acta Mech. Sin.* – 2009. – Vol. 25. – P. 689–698.

Acknowledgment

The reported study was funded by RFBR and Government of the Sevastopol according to the research project № 18-41-920001

17. Xing Y., Liu B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plate // *Composite Structures*. – 2009. – Vol. 89. – P. 567–574.
18. Gorman D.J. Free vibration analysis of Mindlin plates with uniform elastic edge support by the superposition method // *Journal of Sound and Vibration*. – 1997. – Vol. 207. – No. 3. – P. 335–350.
19. Gorman D.J. Accurate free vibration analysis of point supported Mindlin plates by the superposition method // *Journal of Sound and Vibration*. – 1999. – Vol. 219. – No. 2. – P. 265–277.
20. Chung J.H., Zhou D. Vibration of moderately thick rectangular plates in terms of a set of static Timoshenko beam functions // *Computers & Structures*. – 2000. – Vol. 78(6). – P. 757–768.
21. Saha K.N., Kar R.C., Datta P.K. Free vibration analysis of rectangular Mindlin plates with elastic restraints uniformly distributed along the edges // *Journal of Sound and Vibration*. – 1996. – Vol. 192 (4). – P. 885–902.
22. Xiang Y., Lai S.K., Zhou L. DSC-element method for free vibration analysis of rectangular Mindlin plates // *Int. J. of Mech. Science*. – 2010. – Vol. 52. – P. 548–560.
23. Kolarevic N., Nefovska-Danilovic M., Petronijevic M. Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular Mindlin plate assemblies // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 359. – P. 84–106.
24. Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies / Part I: Theory / M. Nefovska-Danilovic, N. Kolarevic, M. Marjanovic', M. Petronijevic // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 159. – P. 728–744.
25. Free vibration study of sandwich plates using a family of novel shear deformable dynamic stiffness elements: limitations and comparison with the finite element solutions / M. Marjanovic, N. Kolarevic, M. Nefovska-Danilovic, M. Petronijevic // *Thin-Walled Structures*. – 2016. – Vol. 107. – P. 678–694.
26. Papkov S.O. A new method for analytical solution of in-plane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – Vol. 369. – P. 228–245.
27. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 339. – P. 342–358.
28. Papkov S.O. Vibrations of a Rectangular Orthotropic Plate with Free Edges: Analysis and Solution of an Infinite System // *Acoustical Physics*. – 2015. – Vol. 61(2). – P. 136–143.
29. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. – U.S. Government Printing Office Washington, D.C., 1964.
30. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука. Глав.ред. физ.-мат. лит., 1981. – 800 с.

References

1. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i obo-lochki [Theory of Plates and Shells]*, Moscow, Nauka, 1966. 635 p.
2. Mindlin R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *ASME Journal Applied Mechanics* 1951, vol.18, pp. 31-38.
3. Xiang Y., Wei G.W. Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin plates. *Int. J. Solids Struct.*, 2004, 41, pp. 279-294.
4. Leissa A.W. Free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 26-31, pp. 257- 293.
5. Xiang Y. Vibration of rectangular Mindlin plates resting on non-homogenous elastic foundations, *Int. J. Mech. Sci.*, 2003, 45, pp. 1229-1244.
6. Liew K.M., Xiang Y., Wang C.M., Kitipornchai S. Vibration of Mindlin plates. *Elsevier science*, 1998, 412 p.
7. Casimir J.B., Kevorkian S., Vinh T. The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements: application to Kirchhoff's plate continuous elements. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 287, pp. 571-589
8. Lee U., Lee J. Spectral-element method of Levy-type plates subjected to dynamic loads. *J. of Eng. Mech.*, 1999, pp. 243-247.
9. Williams F.W., Wittrick W. H. Exact buckling and frequency calculations surveyed. *J. of Str. Eng. ASCE.*, 1983, no. 09, pp. 169-187.
10. Boscolo M. and Banerjee J.R. Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory. *Computers & Structures*, 2011, no. 189, pp. 395-410.
11. Liu X. and Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies. Part I: Theory. *Computers & Structures*, 2015, no. 132, pp. 1274-1287.
12. Liu X., Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies. Part II: Applications. *Computers & Structures*, 2015, no. 132, pp. 1288-1302.
13. Liu X., Banerjee J. R. A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, no. 87, pp. 136-160.
14. Banerjee J.R., Papkov S.O., Liu X., Kennedy D. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, no. 342, pp. 177, 199.
15. Liu X., Banerjee J.R. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies. Part I: Theory // *Computers & Structures*, 2015, no. 132, pp. 1274-1287.
16. Xing Y., Liu B. Closed form solutions for free vibrations of rectangular Mindlin plates. *Acta Mech Sin.*, 2009, no. 25, pp. 689-698.
17. Xing Y., Liu B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plate. *Composite Structures*, 2009, no. 89, pp. 567-574.
18. Gorman D. J. Free vibration analysis of Mindlin plates with uniform elastic edge support by the superposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol. 207, no. 3, pp. 335-350.
19. Gorman D. J. Accurate free vibration analysis of point supported Mindlin plates by the superposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 219, no.2, pp. 265-277.
20. Chung J.H., Zhou D. Vibration of moderately thick rectangular plates in terms of a set of static Timoshenko beam functions. *Computers & Structures*, 2000, 78(6), pp. 757-768.
21. Saha K.N., Kar R.C., Datta P.K. Free vibration analysis of rectangular Mindlin plates with elastic restraints uniformly distributed along the edges. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, no. 192 (4), pp. 885-902.
22. Xiang Y., Lai S.K., Zhou L. DSC- element method for free vibration analysis of rectangular Mindlin plates. *Int. J. of Mech. Science*, 2010, no. 52, pp. 548-560.
23. Kolarevic N., Nefovska-Danilovic M., Petronijevic M. Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular Mindlin plate assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 359, pp. 84-106
24. Nefovska-Danilovic M., Kolarevic N., Marjanovic M., Petronijevic M. Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies – Part I: Theory. *Composite Structures*, 2017, 159, pp.728-744.
25. Marjanovic M., Kolarevic N., Nefovska-Danilovic M., Petronijevic M. Free vibration study of sandwich plates using a family of novel shear deformable dynamic stiffness elements: limitations and comparison with the finite element solutions. *Thin-Walled Structures*, 2016, 107, pp. 678-694.
26. Papkov S.O. A new method for analytical solution of in-plane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, no. 369, pp. 228-245.
27. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, no. 339, pp. 342-358.
28. Papkov S.O. Vibrations of a Rectangular Orthotropic Plate with Free Edges: Analysis and Solution of an Infinite System. *Acoustical Physics*, 2015, no. 61(2), pp. 136-143.
29. Abramowitz M. and Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions*, U.S. Government Printing Office Washington, D.C., 1964.
30. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. *Integraly i ryady [Integrals and series]*. Moscow, Nauka, 1985, 800 p.