

Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 4. С. 191-200. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.18

Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Zh.M. Non-stationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 191-200. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.18



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.18

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ СВЯЗАННАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Д.А. Шляхин, Ж.М. Даулетмуратова

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 24 сентября 2019 г.
Принята: 13 ноября 2019 г.
Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

круглая пластина, классическая теория термоупругости, нестационарное температурное воздействие, биортогональные конечные интегральные преобразования.

АННОТАЦИЯ

Построено новое замкнутое решение осесимметричной динамической задачи классической (СТЕ) теории термоупругости для жестко закрепленной круглой изотропной пластины в случае изменения температуры на ее лицевых поверхностях (граничные условия 1-го рода).

Математическая формулировка рассматриваемой задачи включает линейные уравнения теплопроводности и равновесия в пространственной постановке, в предположении, что в исследуемых конструкциях можно пренебречь их инерционными упругими характеристиками.

При построении общего решения связанных несамосопряженных уравнений используется математический аппарат разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований: Ханкеля по радиальной координате и биортогонального преобразования (КИП) по аксиальной переменной. На каждом этапе исследования выполняется процедура приведения граничных условий к виду, позволяющему применить соответствующее преобразование.

Особенностью данного решения является применение КИП, основанного на многокомпонентном соотношении собственных векторов-функций двух однородных краевых задач. Важным моментом в процедуре структурного алгоритма является выделение сопряженного оператора, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики. Данное преобразование является наиболее эффективным методом исследования подобных краевых задач.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние и характер распределения температурного поля в жестко закрепленной круглой изотропной пластине при произвольном по времени внешнем температурном воздействии. Численный анализ прочностных характеристик бетонной конструкции показывает, что в период действия нестационарной нагрузки наблюдаются максимальные значения механических напряжений. В дальнейшем, при постоянной температурном режиме, в результате прогрева всей пластины перемещения увеличиваются, а напряжения падают.

© ПНИПУ

© Шляхин Дмитрий Аверкиевич – д.т.н., доц., зав. каф., e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru, ID: 0000-0003-0926-7388
Даулетмуратова Жанна Маратовна – инж., ID: 0000-0001-7028-0130

Dmitry A. Shlyakhin – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department,
e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru, ID: 0000-0003-0926-7388
Zhanna M. Dauletmuratova – Engineer, ID: 0000-0001-7028-0130



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

NON-STATIONARY COUPLED AXISYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A RIGIDLY FIXED ROUND PLATE

D.A. Shlyakhin, Zh.M. Dauletmuratova

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 24 September 2018
Accepted: 13 November 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

powder material, bidirectional compression, rubber springs, Mooney-Rivlin model, Modified Drucker-Prager Cap model, numerical simulation.

ABSTRACT

A new closed solution is constructed for the axisymmetric dynamic problem of the classical (CTE) theory of thermoelasticity for a rigidly fixed circular isotropic plate in the case of a temperature change on its face surfaces (boundary conditions of the first kind).

The mathematical formulation of the problem under consideration includes linear equations of thermal conductivity and equilibrium in a spatial setting, assuming that their inertial elastic characteristics can be neglected in the structures under study.

In constructing a general solution of related non-self-conjugate equations, we use the mathematical apparatus of separation of variables in the form of finite integral transformations i.e. Hankel along the radial coordinate and biorthogonal transformation (FIT) with respect to the axial variable. At each stage of the investigation, a procedure is performed to reduce the boundary conditions to a form that allows the corresponding transformation to be applied.

A particular feature of this solution is the application of a FIT based on a multicomponent relation of the eigenvector functions of two homogeneous boundary value problems. An important point in the procedure of the structural algorithm is the separation of the adjoint operator, without which it is impossible to solve non-self-adjoint linear problems of mathematical physics. This transformation is the most effective method for studying similar boundary value problems.

The calculated design relationships make it possible to determine the stress-strain state and the character of the distribution of the temperature field in a rigidly fixed circular isotropic plate for an arbitrary external temperature effect with respect to time. Numerical analysis of the strength characteristics of the concrete structure shows that during the period of the unsteady load the maximum values of mechanical stresses are observed. Later, at a constant temperature regime, as a result of heating the entire plate, the displacements increase and the stresses fall.

© PNRPU

Введение

При проектировании конструкций различного назначения возникает необходимость исследования их работы в условиях неравномерного нестационарного нагрева [1–3]. Данное воздействие сопровождается возникновением тепловых деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать в случае всестороннего анализа прочностных характеристик упругих систем конечных размеров. В настоящее время разработаны различные теории термоупругости (СТЕ, ГНП–ГНП, LS) [4, 5], позволяющие решить данную проблему с различной степенью точности.

Математическая формулировка рассматриваемых начально-краевых задач в линейной постановке включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения и теплопроводности. Проблема их интегрирования и построение общего решения приводит, как правило при проведении практических расчетов, к исследованию только уравнения теплопроводности без учета деформирования упругой системы [5–9]. Другой подход связан с анализом задач термоупругости в несвязанной постановке. При этом расчетная схема конструкции представляется в виде тонкостенных [10–14] или бесконечно длинных тел [15–21].

В связанной постановке замкнутые решения динамических задач термоупругости представлены в немно-

гих работах. В частности, исследование [22] выполнено при использовании классической (СТЕ) теории термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы с помощью обобщенного метода конечных интегральных преобразований [23], с учетом заданной на поверхностях элементов плотности тепловых потоков (граничные условия 2-го рода) [8]. В работах [24, 25], также при использовании СТЕ-теории, построены решения для конечного изотропного цилиндра с мембранным закреплением его торцевых поверхностей. Расчетные соотношения представлены в виде спектральных разложений по биортогональной системе собственных функций несамосопряженного пучка дифференциальных операторов [26]. Исследование [27] проведено в рамках гиперболической (ГНП) теории термоупругости и позволяет провести анализ частотного уравнения, а также форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом волноводе. В [28] получены представления для перемещений и температуры в гармонической ГНП – термоупругой волны для волновода с проникающей для тепла стенкой.

В настоящей работе объектом исследования является жестко закрепленная круглая изотропная пластина при нестационарном осесимметричном температурном воздействии на ее лицевые поверхности (граничные условия 1-го рода). Численные результаты расчета данной задачи в несвязанной постановке [29] позволяют

сделать вывод, что упругие инерционные характеристики диска необходимо учитывать в очень тонких конструкциях ($\frac{h^*}{b} \leq 0,01$, h^*, b – толщина и радиус пластины)

при действии высокочастотной нагрузки. При этом недостатком такого подхода в организации итерационного процесса является аппроксимация сложных расчетных соотношений более простыми приближенными функциями. В данном исследовании для решения этой проблемы исходные несамосопряженные расчетные соотношения классической теории термоупругости включают уравнения равновесия в предположении, что для рассматриваемой конструкции выполняется условие $\frac{h^*}{b} > 0,01$.

Построенное решение связанной задачи позволяет при неравномерном нагреве тела учесть влияние деформаций, а также скорости изменения его объема (скорость дилатации) на характер распределения температурного поля и напряженно-деформированное состояние.

1. Постановка задачи

Пусть круглая жестко закрепленная пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega : \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$. На ее торцевых поверхностях задана температура, величина которой зависит от радиальной координаты r_* и времени t_* : при $z = 0$ $\omega_1^*(r_*, t_*)$, при $z = h^*$ $\omega_2^*(r_*, t_*)$ (рис. 1).

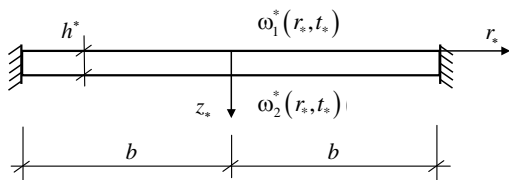


Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Calculation scheme

В общем случае линейные дифференциальные осесимметричные уравнения равновесия и теплопроводности классической (СТЕ) теории термодинамики, начально-краевые условия для однородной упругой изотропной среды в цилиндрической системе координат и безразмерной форме имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} &= 0, & (1) \\ a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \\ \nabla \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial t} - a_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= 0; \end{aligned}$$

$$r = 1 \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0, \quad (2)$$

$$r = 0 \quad U(0, z, t) < \infty, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad T(0, z, t) < \infty; \quad (3)$$

$$z = 0, h \quad a_4 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \{\omega_1, \omega_2\} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$T(r, 0, t) = \omega_1, \quad T(r, h, t) = \omega_2; \quad t = 0 \quad T(r, z, 0) = 0. \quad (5)$$

В равенствах (1)–(5) используются следующие обозначения: $a_1 = a_2(1 - 2\nu)$, $a_2 = 0,5(1 - \nu)^{-1}$, $a_3 = a_5 k \frac{\gamma T_0}{L}$,

$$a_4 = \nu(1 - \nu)^{-1}, \quad a_5 = \frac{\gamma(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)}, \quad \gamma = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \alpha_t,$$

$$\{U, W, r, z, h\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*\} / b, \quad \{T, \omega_1, \omega_2\} =$$

$$= a_5 \{T^*, \omega_1^*, \omega_2^*\}, \quad t = t_* \frac{k}{b^2}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, \quad U^*(r_*, z_*, t_*),$$

$W^*(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты вектора перемещений; T^*, T_0 – изменение температуры и абсолютная температура начального состояния тела; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; α_t, k, L – коэффициенты линейного теплового расширения, температуропроводности и теплопроводности материала.

Условия (2) означают жесткое закрепление цилиндрической поверхности пластины и отсутствие передачи тепла. Равенство (3) определяет ограниченность решения в центре пластины, а первые два условия (4) – отсутствие нормальных и касательных напряжений на ее лицевых поверхностях.

Соотношения (1)–(5) представляют собой математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи термоупругости.

2. Построение общего решения

Начально-краевую задачу (1)–(5) решаем методом интегральных преобразований, используя последовательно преобразование Ханкеля [30] с конечными пределами по переменной r и биортогональное конечное преобразование (КИП) [31] по координате z .

Преобразование Ханкеля позволяет удовлетворить только смешанные граничные условия [30]. Поэтому для выполнения данного требования необходимо последнее равенство (2) заменить условием наличия касательных напряжений $N_1(z, t)$ на цилиндрической поверхности пластины:

$$\sigma_{r|z=1} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = N_1. \quad (6)$$

Для решения задачи (1)–(6) вводится новая функция $w(r, z, t)$, связанная с $W(r, z, t)$, соотношением

$$W(r, z, t) = \frac{(1 + \nu)}{E} r^2 N_1(z, t) + W_1(t) + w(r, z, t), \quad (7)$$

Здесь N_1, W_1 – неизвестные функции, выражение которых определяется в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальной компоненты вектора перемещений на цилиндрической поверхности пластины $W(1, z, t) = 0$.

Подстановка (7) в (1)–(6) позволяет получить новую краевую задачу относительно функций U, w, T , в которой дифференциальные уравнения (1) и первое граничное условие (4) становятся неоднородными с правыми частями*:

$$R_1 = -a_2 \frac{2(1+\nu)}{E} r \frac{\partial N_1}{\partial z}, \quad R_2 = -\frac{(1+\nu)}{E} \left(4a_1 + r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) N_1,$$

$$R_3 = a_3 \frac{(1+\nu)}{E} r^2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial z \partial t}, \quad B_1 = -\frac{(1+\nu)}{E} r^2 \frac{\partial N_1}{\partial z}.$$

При этом граничные условия на цилиндрической поверхности принимают вид

$$r=1 \quad U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (8)$$

К краевой задаче относительно U, w, T применяем преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной r , используя следующие трансформанты:

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \\ \{w_H(n, z, t), \varphi_H(n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), T(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr \quad (9)$$

и формулы обращения

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \\ \{w(r, z, t), T(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \varphi_H(n, z, t)\} J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2}, \quad (10)$$

где j_n – положительные нули функции $J_1(j_n)$ ($n = \overline{0, \infty}; j_0 = 0$).

В результате получаем начально-краевую задачу относительно трансформант Ханкеля:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + j_n \varphi_H = R_{1H},$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} = R_{2H},$$

$$-j_n^2 \varphi_H + \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(a_3 j_n u_H + a_3 \frac{\partial w_H}{\partial z} + \varphi_H \right) = R_{3H}; \quad (11)$$

$$z=0, h \quad a_4 j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} = B_{1H} + \{\omega_{1H}, \omega_{2H}\},$$

$$\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0,$$

$$\varphi_H(n, 0, t) = \omega_{1H}, \quad \varphi_H(n, h, t) = \omega_{2H}; \quad (12)$$

$$t=0 \quad \varphi_H(n, z, 0) = 0, \quad (13)$$

где $\{R_{1H}, B_{1H}, \omega_{1H}, \omega_{2H}\} = \int_0^1 \{R_1, B_1, \omega_1, \omega_2\} r J_0(j_n r) dr,$

$$\{R_{2H}, R_{3H}\} = \int_0^1 \{R_2, R_3\} r J_1(j_n r) dr.$$

На следующем этапе решения предварительно производится процедура стандартизации [32] (приведение неоднородных граничных условий (12) к однородным) путем введения новых функций U_H, W_H, L_H , связанных с u_H, w_H, φ_H соотношениями

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \\ w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad (14) \\ \varphi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + L_H(n, z, t),$$

где $\{H_1, H_2\} = \{f_1(z), f_2(z)\} \omega_{1H}(t) + \{f_4(z), f_5(z)\} \omega_{2H} \times \\ \times (t) + \{f_7(z), f_8(z)\} B_{1H|z=0} + \{f_9(z), f_{10}(z)\} B_{1H|z=h}, \\ H_3 = f_3(z) \omega_{1H}(t) + f_6(z) \omega_{2H}(t).$

Подстановка (14) в (11)–(13) при выполнении условий:

$$z=0, h \quad a_4 j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} = B_{1H} + \{\omega_{1H}, \omega_{2H}\},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 = 0, \quad (15)$$

$$H_3(n, z, t) = \{\omega_{1H}, \omega_{2H}\}$$

позволяет получить начально-краевую задачу относительно функций U_H, W_H, L_H с однородными граничными условиями по переменной z . При этом правые части дифференциальных уравнений (11) и начальные условия (13) относительно функции L_{0H} принимают вид

$$F_{1H} = R_{1H} + j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - j_n H_3, \\ F_{2H} = R_{2H} + a_1 j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial z}, \quad (16)$$

* На основании парности касательных напряжений в точках сопряжения торцевых и цилиндрической поверхностей конструкции принимаем $N_{|z=0, h} = 0$.

$$F_{3H} = R_{3H} + j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[a_3 j_n H_1 + a_3 \frac{\partial H_2}{\partial z} + H_3 \right],$$

$$L_{0H} = -H_{3|t=0}.$$

Начально-краевую задачу (11)–(13) относительно U_H, W_H, L_H решаем, используя структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [31]. Для этого вводим на сегменте $[0, h]$ КИП с неизвестными компонентами собственных векторов-функций ядер преобразований $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z), N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h \left[a_3 j_n U_H(n, z, t) + a_3 \frac{\partial W_H(n, z, t)}{\partial z} + L_H(n, z, t) \right] \times K_3(\lambda_{in}, z) dz, \quad (17)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), L_H(n, z, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \times \{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z)\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (18)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_3(\lambda_{in}, z) N_3(\mu_{in}, z) dz,$$

где λ_{in}, μ_{in} – собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент векторов-функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$).

В результате использования алгоритма КИП [26] получаем счетное множество задач Коши для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\frac{dG_{in}}{dt} + \lambda_{in} G_{in} = F_H; \quad (i = \overline{1, \infty} \quad n = \overline{0, \infty}) \quad (19)$$

$$t = 0 \quad G_{0H}(n, z) = \int_0^h L_{0H} dz,$$

решение которых имеет вид

$$G_{in} = G_{0H} \exp(-\lambda_{in} t) + \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_{in} (\tau - t) d\tau,$$

$$F_H = - \int_0^h (F_{1H} K_1 + F_{2H} K_2 + F_{3H} K_3) dz, \quad (20)$$

а также две системы дифференциальных уравнений и граничные условия относительно неизвестных ядер преобразований:

$$-j_n^2 K_1 + a_1 \frac{d^2 K_1}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_2}{dz} + \lambda_{in} a_3 j_n K_3 = 0,$$

$$-a_1 j_n^2 K_2 + \frac{d^2 K_2}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_1}{dz} - \lambda_{in} a_3 \frac{dK_3}{dz} = 0,$$

$$(\lambda_{in} - j_n^2) K_3 + \frac{d^2 K_3}{dz^2} + j_n K_1 + \frac{dK_2}{dz} = 0; \quad (21)$$

$$z = 0, h \quad (a_2 - a_4) j_n K_2 - a_1 \frac{dK_1}{dz} = 0,$$

$$(a_1 - a_2) j_n K_1 - \frac{dK_2}{dz} = 0, \quad K_3 = 0; \quad (22)$$

$$-j_n^2 N_1 + a_1 \frac{d^2 N_1}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_2}{dz} + j_n N_3 = 0,$$

$$-a_1 j_n^2 N_2 + \frac{d^2 N_2}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_1}{dz} - \frac{dN_3}{dz} = 0,$$

$$-j_n^2 N_3 + \frac{d^2 N_3}{dz^2} + \mu_{in} \left(a_3 j_n N_1 + a_3 \frac{dN_2}{dz} + N_3 \right) = 0; \quad (23)$$

$$z = 0, h \quad a_4 j_n N_1 + \frac{dN_2}{dz} = 0, \quad \frac{dN_1}{dz} - j_n N_2 = 0, \quad N_3 = 0. \quad (24)$$

Задачи для трансформанты (19) G_{in} и сопряженная однородная задача (21), (22) относительно компонент ядра $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z)$ получены в результате применения вырожденного преобразования (17), а соотношения (23), (24) построены путем использования к полученной (сопряженной) задаче (21), (22) аналогичного (17) КИП с компонентами ядра $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$.

Системы (21), (23) приводятся к разрешающим уравнениям 6-го порядка относительно функций $K_1(\lambda_{in}, z), N_1(\mu_{in}, z)$, которые допускают разложение на коммутативные сомножители 2-го порядка. В общем случае, принимая во внимание численные значения физических характеристик основных строительных материалов (величины $a_1 \dots a_3$), выражения для $K_1(\lambda_{in}, z), N_1(\mu_{in}, z)$ записываются следующим образом:

$$\{K_1(\lambda_{in}, z), N_1(\mu_{in}, z)\} = D_{1in} \sin b_{1in} z + D_{2in} \cos b_{1in} z + \exp(b_{2in} z) (D_{3in} + z D_{4in}) + \exp(-b_{2in} z) (D_{5in} + z D_{6in}), \quad (25)$$

где b_{1in}, b_{2in} – постоянные, полученные в результате приведения (21), (23) к разрешающим уравнениям; $D_{1in} \dots D_{6in}$ – постоянные интегрирования.

Расчетные соотношения остальных компонент ядер преобразований определяются из (21), (23) с учетом (25). Подстановка $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_3(\lambda_{in}, z), N_1(\mu_{in}, z) \dots N_3(\mu_{in}, z)$ в соответствующие граничные условия (22), (24) позволяет сформировать две системы алгебраических уравнений, решение которых позволяет определить постоянные интегрирования и собственные значения λ_{in}, μ_{in} .

Окончательные выражения функций $U(r, z, t), W(r, z, t), T(r, z, t)$ получим, применяя к трансформан-

те (20) последовательно формулы обращения КИП (18) и метод конечных преобразований Ханкеля (10). В результате с учетом (7), (14) имеем

$$\begin{aligned}
 U(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \times \\
 &\times \left[H_1(n, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^2 \right], \\
 W(r, z, t) &= W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \times \\
 &\times \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^2 \right], \quad (26) \\
 T(r, z, t) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \times \\
 &\times \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^2 \right].
 \end{aligned}$$

Полученные выражения являются сходящимися в силу полноты систем функций $[J_0(j_n r)]_{n=0}^{\infty}$ и $[J_1(j_n r)]_{n=1}^{\infty}$ на интервале $r \in [0, 1]$ и $[K_m(\lambda_{in}, z), N_m(\mu_{in}, z)]_{i=1}^{\infty}$ на интервале $z \in [0, h]$.

Заключительным этапом исследования является определение функций $W_1(t)$, $N_1(z, t)$, $H_1(n, z, t) \dots H_3(n, z, t)$, $P_1(n, z, t)$, $P_2(n, z, t)$.

Первоначально рассматривается случай действия только температурной нагрузки ω_1, ω_2 ($N_1 = 0$). Тогда функции $H_1 \dots H_3$ вычисляются из условия упрощений правых частей дифференциальных уравнений (16):

$$\begin{aligned}
 j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - j_n H_3 &= 0, \\
 a_1 j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial z} &= 0, \quad j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} = 0.
 \end{aligned}$$

В результате формируются две системы дифференциальных уравнений относительно функций $f_1(z) \dots f_3(z)$ и $f_4(z) \dots f_6(z)$. Их решения при удовлетворении граничных условий (15) позволяют определить $H_1 \dots H_3$.

Функция $W_1(t)$ определяется из условия $W(1, h/2, t) = 0$:

$$\begin{aligned}
 W_1(t) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-1} \times \\
 &\times \left[H_2(n, h/2, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, h/2) \|K_{in}\|^2 \right]. \quad (27)
 \end{aligned}$$

На следующем этапе решения к цилиндрической поверхности пластины прикладываются касательные напряжения $N_1(z, t)$ ($\omega_1 = \omega_2 = 0$). Принимая во внимание условие уравновешенности пластины

$$\int_0^h N_1(z, t) dz = 0$$

и отсутствие касательных напряжений на ее лицевых поверхностях, представляем $N_1(z, t)$ в виде следующей зависимости:

$$N_1(z, t) = N_0 W_1(t) \sin \frac{2\pi}{h} z.$$

Здесь параметр N_0 определяется из условия суммарного равенства перемещений по высоте пластины $W(1, z, t_{\max})$ с обратным знаком при решении двух задач.

Функции H_1, H_2 также вычисляются из условия упрощений правых частей дифференциальных уравнений (16):

$$\begin{aligned}
 j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} &= 0, \\
 a_1 j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned}$$

В этом случае образуются две системы дифференциальных уравнений относительно функций $f_7(z), f_8(z)$ и $f_9(z), f_{10}(z)$, которые решаются при удовлетворении граничных условий (15).

Полученные расчетные соотношения (26) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1) и крайвым условиям (2)–(5) (последнее условие (2) с заданной точностью), т.е. представляют замкнутое решение рассматриваемой краевой задачи термоупругости.

3. Численный анализ результатов. Выводы

В качестве примера рассматривается жестко закрепленная круглая железобетонная пластина ($b = 1$ м, $h^* = 0,1$ м, $E = 2 \times 10^{10}$ Па, $\nu = 0,2$, $\rho = 2000$ кг/м³, $L = 1,75$ Вт/(м °С), $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5}$ 1/°С, $k = 0,76 \times 10^{-6}$ м²/с) в случае действия на верхней лицевой поверхности ($z_* = 0$) температурной нагрузки в виде

$$\begin{aligned}
 \omega_1^*(r_*, t_*) &= (1 - r_*) T_{\max} \times \\
 &\times \left[\sin \left(\frac{\pi}{2t_{\max}} t_* \right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \\
 \omega_2^*(r_*, t_*) &= 0,
 \end{aligned}$$

где $H(\tilde{t})$ – единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde{t}) = 1$ при $\tilde{t} \geq 0$, $H(\tilde{t}) = 0$ при $\tilde{t} < 0$); $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$, T_{\max}^*, t_{\max}^* – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 100$ °С, $T_0 = 20$ °С, $t_{\max}^* = 100$ с).

На рис. 2–7 представлены численные результаты расчета, на основании которых можно сделать следующие выводы:

1. При достижении функции изменения температуры максимального значения (T_{\max}) ее срединная поверхность при $r = 0$ прогревается на $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ (см. рис. 2, график 1). В дальнейшем, при постоянной величине $T^* = T_{\max}$, равномерный прогрев всей пластины наблюдается при $t_* = 55t_{\max}^*$ (см. рис. 2, график 3).

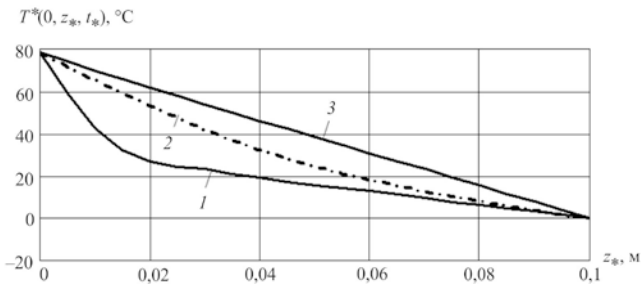


Рис. 2. Графики изменения $T^*(0, z_*, t_*)$ по высоте пластины в различные моменты времени: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 10t_{\max}^*$ (2); $t_* = 55t_{\max}^*$ (3)

Fig. 2. Charts of change $T^*(0, z_*, t_*)$ by the height of the plate at various times: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 10t_{\max}^*$ (2); $t_* = 55t_{\max}^*$ (3)

2. Влияние скорости изменения объема (скорости дилатации) тела в результате его деформирования приводит к перераспределению тепла. В частности, учет дилатационного члена в уравнении теплопроводности повышает температуру $T^*(0, h/2, t_*)$ в срединной поверхности пластины (см. рис. 3, сплошная линия). При этом время полного прогрева конструкции ($t_* = 55t_{\max}^*$) с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) ее деформирования одинаково.

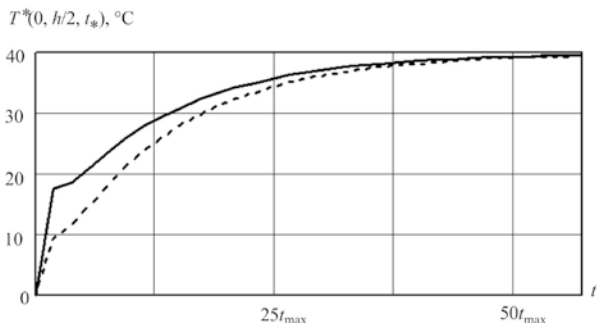


Рис. 3. Изменения $T^*(0, h/2, t_*)$ с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) деформации упругой системы

Fig. 3. Changes of $T^*(0, h/2, t_*)$ including (solid line) and excluding (dashed line) deformation of the elastic system

3. Зависимость температурного поля от деформаций пластины наблюдается также при установившемся теп-

ловом режиме ($t_* = 55t_{\max}^*$). В конструкции высотой $h^* = 0,1\text{ м}$ температурное поле по толщине распределяется по линейной зависимости (см. рис. 4, кривая 1), а в случае увеличения ее высоты до $0,3\text{ м}$ – по параболической (см. рис. 4, а, график 2). При исследовании несвязанной задачи оба графика будут прямолинейными.

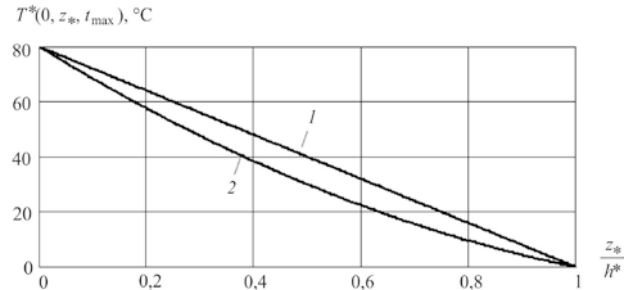


Рис. 4. Изменение $T^*(0, z_*, t_*)$ по высоте пластины: $h^* = 0,1\text{ м}$ (1); $h^* = 0,3\text{ м}$ (2)

Fig. 4. Plate $T^*(0, z_*, t_*)$ height variation: $h^* = 0,1\text{ м}$ (1); $h^* = 0,3\text{ м}$ (2)

4. В период изменения температурного поля конструкция деформируется, что приводит к росту компонент вектора перемещений (см. рис. 5, 6, графики 1–3). Причем при установившемся режиме $t_* = 55t_{\max}^*$ нейтральная поверхность ($\sigma_{rr} = 0$) располагается на ее нижней ($z_* = h^*$) лицевой плоскости.

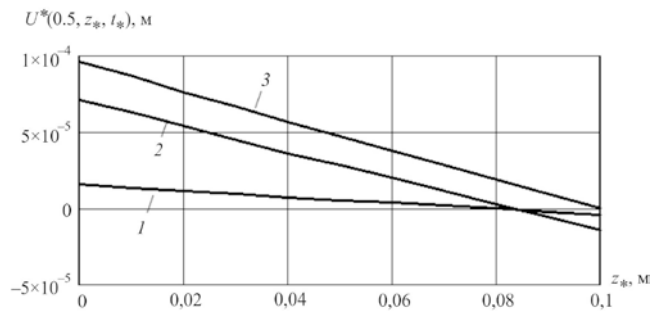


Рис. 5. Графики изменения $U^*(0.5, z_*, t_*)$ по высоте пластины в различные моменты времени: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 10t_{\max}^*$ (2); $t_* = 50t_{\max}^*$ (3)

Fig. 5. Charts of change $U^*(0.5, z_*, t_*)$ by the height of the plate at various times: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 10t_{\max}^*$ (2); $t_* = 50t_{\max}^*$ (3)

5. В случае достижения нестационарной температурной нагрузки максимального значения $t_* = t_{\max}^*$ наблюдаются наибольшие механические напряжения σ_{rr} (см. рис. 7, график 1). В дальнейшем при постоянном температурном воздействии в результате прогрева всей пластины перемещения увеличиваются, а напряжения падают (см. рис. 7, график 2).

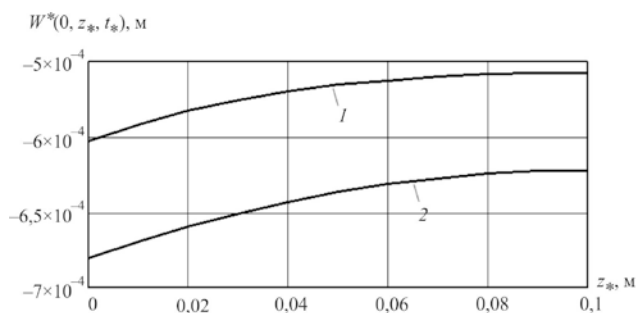


Рис. 6. Графики изменения $W^*(0, z_*, t_*)$ по высоте пластины в различные моменты времени: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 50t_{\max}^*$ (2)

Fig. 6. Charts of change $W^*(0, z_*, t_*)$ by the height of the plate at various times: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 50t_{\max}^*$ (2)

В заключение следует отметить, что представленная методика расчета позволяет также исследовать связан-

Библиографический список

1. Подстригач Я.С. Теплоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. Боли Б. Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 520 с.
3. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
4. Радаев Ю.Н., Таранова М.В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – № 2 (23). – С. 53–61.
5. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. – Изд. 2-е, доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.
6. Кудинов В.А., Карташев Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.
7. Кудинов В.А., Клебнеев Р.М., Куклова Е.А. Получение точных аналитических решений нестационарных задач теплопроводности ортогональными методами // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 1. – С. 197–206.
8. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1965. – 204 с.
9. Карташев Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 1985. – 480 с.
10. Филатов В.Н. Расчет на температурные воздействия гибких пологих оболочек, подкрепленных ортогональной сеткой ребер // Нелинейные задачи расчета тонкостенных конструкций. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1989. – С. 108–110.
11. Аналитическое решение квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды / В.А. Кудинов [и др.] // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 2(35). – С. 130–135.
12. Кобзарь В.Н., Фильштинский Л.А. Плоская динамическая задача термоупругости // Прикл. мат. и мех. – 2008. – Т. 72, вып. 5. – С. 842–851.
13. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar thermoelasticity of thin shells // Journal of Thermal Stresses. – 2013. – Vol. 36. – No. 11. – P. 1200–1216.

ные задачи термоупругости при использовании граничных условий теплопроводности II и III родов.

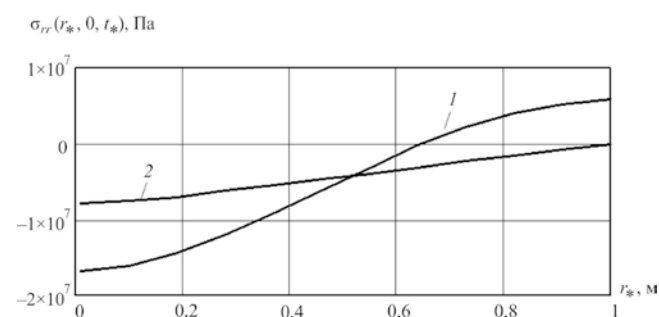


Рис. 7. Изменение $\sigma_{rr}(r_*, 0, t_*)$ по высоте пластины в различные моменты времени: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 50t_{\max}^*$ (2)

Fig. 7. Change $\sigma_{rr}(r_*, 0, t_*)$ by the height of the plate at various times: $t_* = t_{\max}^*$ (1); $t_* = 50t_{\max}^*$ (2)

14. Verma K.L. Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2008. – Vol. 37. – P. 573–580.
15. Жорник А.И., Жорник В.А., Савочка П.А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра // Изв. ЮФУ. Технические науки. – 2012 (темат. вып.). – С. 63–69.
16. Жуков П.В. Расчет температурных полей и термических напряжений в толстостенном цилиндре при импульсном подводе теплоты // Вестн. Иван. гос. энергет. ун-та. – 2013. – Вып. 3. – С. 1–4.
17. Макарова И.С. Решение несвязанной задачи термоупругости с краевыми условиями первого рода // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – Т. 28, № 3. – С. 191–195.
18. Harmatij H., Król M.M., Popowycz V.V. Quasi-static problem of thermoelasticity for thermosensitive infinite circular cylinder of complex heat exchange // Advances in Pure Mathematics. – 2013. – No. 3. – P. 430–437. DOI.org/10.4236/apm.2013.34061
19. Zong-Yi Lee. Coupled problem of thermoelasticity for multilayered spheres with time-dependent boundary conditions // Journal of Marine Science and Technology. – 2004. – Vol. 12. – No. 2. – P. 93–101.
20. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевая задача несимметричной деформации цилиндрического резервуара с жидкостью в температурном поле // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 60–77.
21. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саркисян А.Г. Сравнительный асимптотический анализ несвязанной и связанной теорий термоупругости // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 4. – С. 38–53.
22. Сеницкий Ю.Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы // Прикл. мех. АН УССР. – 1982. – Т. 18, № 6. – С. 34–41.
23. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 57–63.
24. Лычев С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // Вестн. Самар. гос. ун-та. – 2003. – № 4 (30). – С. 112–124.

25. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 138–154.

26. Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестн. Самар. ун-та. Естественно-научная серия. – 2002 (спец. вып.) – С. 16–38.

27. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 4(2). – С. 94–127.

28. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Ревинский Р.А. Прохождение обобщенной ГНПП-термоупругой волны через волновод с пронизаемой для тепла стенкой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, вып. 1. – С 59–70.

References

1. Podstrigach Ya.S. *Teplouprugost' tel neodnorodnoi struktury* [Thermal elasticity of bodies of non-uniform structure]. *Moscow, Science*, 1984, 368 p.

2. Pain B., Wayner J. *Teoriia temperaturnykh napriazhenii* [The theory of temperature stresses]. *Moscow, Mir*, 1964, 520 p.

3. Novatsky V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. *Moscow, Mir*, 1970, 256 p.

4. Radaev Yu.N., *Volnovye chisla termouprugikh voln v volnovode s tep-loobmenom na bokovoi stenke* [Taranova M.V. Wave numbers of thermoelastic waves in a waveguide with heat exchange on a side wall]. *Bulletin of the Samara State techn. un-ty. Ser. Phys. -mat. science*, 2011, no.2 (23), pp. 53-61.

5. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovsky S.Yu. *Volnovye iavleniia teploprovodnosti. Sistemno-strukturnyi podkhod. Izd. 2-e dop* [Wave phenomena of thermal conductivity. System-structural approach. Ed. 2 augm]. *Moscow, Editorial URSS*, 2004, 296 p.

6. Kudinov V.A., Kartashev E.M., Kalashnikov V.V. *Analiticheskie resheniia zadach tep-lomassoperenosa i termouprugosti dlia mnogoslainnykh konstruktssii* [Analytical solutions of heat-mass transfer and thermoelasticity problems for multilayer structures]. *Moscow, High School*, 2005. 430 p.

7. Kudinov V.A., Klebneev R.M., Kuklova E.A. *Poluchenie tochnykh analiticheskikh reshenii nestatsionarnykh zadach teploprovodnosti ortogonal'nymi metodami* [Obtaining exact analytical solutions of nonstationary heat conduction problems by orthogonal methods]. *Bulletin of the Samara State techn. un-ty. Ser. Phys. -mat. science*, 2017, Vol. 21, no. 1, pp.197-206.

8. Kovalenko A.D. *Vvedenie v termouprugost* [Introduction to thermoelasticity]. *Kiev, Nauk. dumka*, 1965, 204 p.

9. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the thermal conductivity of solids]. *Moscow, Higher School*, 1985, 480 p.

10. Filatov V.N. *Raschet na temperaturnye vozdeistviia gibkikh pologikh obolochek, pod-kreplennykh ortogonal'noi setkoi reber* [Calculation of the temperature effects of flexible gently sloping shells supported by an orthogonal grid of edges]. *Nonlinear problems of calculating thin-walled structures. Saratov: publishing house of the SSU*, 1989, pp.108-110.

11. Kudinov V.A. and others. *Analiticheskoe reshenie kvazistaticheskikh zadach termouprugo-sti s peremennymi fizicheskimi svoistvami sredy* [An analytical solution of quasistatic problems of thermoelasticity with variable physical properties of the medium]. *Bulletin of the Samara State techn. un-ty. Ser. Phys. -mat. science*, 2014, no.2 (35), pp. 130-135.

29. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // Инж. журн.: наука и инновации. – 2018. – Вып. 5 (77). DOI.1018698/2308–6033–2018–5

30. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.

31. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечно интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 71–81.

32. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

33. Шляхин Д.А. Уточненное решение динамической задачи электроупругости для биморфной пластины // Вестн. Киргиз.-рос. славян. ун-та. – 2016. – Т. 16, № 5. – С. 108–113.

12. Kobzar V.N., Filshtinsky L.A. *Plane dynamic problem of thermoelasticity* [Ploskaia dinamicheskaia zadacha termouprugosti]. *Applied math. and mech.*, 2008, vol. 72, iss 5, pp.842-851.

13. Sargsyan S.H. *Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells* [Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells]. *Journal of Thermal Stresses*, 2013, vol.36, no.11, pp.1200-1216.

14. Verma, K.L. *Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method* [Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method]. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2008, vol.37, pp.573-580.

15. Zhornik A.I., Zhornik V.A., Savochka P.A. *Ob odnoi zadache termouprugosti dlia sploshnogo tsilindra* [On a problem of thermoelasticity for a solid cylinder]. *Izvestiia IuFU. Tekhnicheskie nauki*, 2012, pp.63-69.

16. Zhukov P.V. *Raschet temperaturnykh polei i termicheskikh napriazhenii v tolstosten-nom tsilindre pri impul'snom podvode teploty* [Calculation of temperature fields and thermal stresses in a thick-walled cylinder with a pulsed supply of heat]. *Vestnik IGEU*, 2013, vol. 3, pp. 1-4.

17. Makarova I.S. *Solution of the unbound problem of thermoelasticity with boundary conditions of the first kind* [Reshenie nesviazannoi zadachi termouprugosti s kraevymi usloviiami pervogo roda]. *Bulletin of the Samara State techn. un-ty. Ser. Phys. -mat. science*, 2012, vol. 28, no. 3, pp.191-195.

18. Harmatij H., Marta Król M., Vasył Popovycz V. *Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange*. *Advances in Pure Mathematics*, 2013. no. 3, pp.430-437. DOI: 10.4236/apm.2013.34061.

19. Zong-Yi Lee. *Coupled problem of thermoelasticity for multilayered spheres with time-dependent boundary conditions*. *Journal of Marine Science and Technology*, 2004, vol. 12, no. 2, pp. 93-101.

20. Guryanov N.G., Tyuleneva O.N. *The boundary value problem of asymmetric deformation of a cylindrical tank with liquid in a temperature field*. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017, no. 2, pp.60-77.

21. Agalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sargsyan A.G., *Sravnitel'nyi asimptoticheskii analiz nesviazannoi i sviazannoi teorii termouprugosti* [Comparative Asymptotic Analysis of Coupled and Uncoupled Thermoelasticity]. *Mech. Solids*. 2014, no. 49 (4), pp. 389-402.

22. Senitsky Yu.E. K resheniiu svyazanoi dinamicheskoi zadachi termouprugosti dlia beskonechnogo tsilindra i sfery [To the solution of the related dynamic thermoelasticity problem for an infinite cylinder and sphere]. *Prikl. mekh. AN USSR*, 1982, vol. 18, no. 6, pp. 34-41.

23. Senitsky Yu.E. Mnogokomponentnoe obobshchennoe konechnoe integral'noe preobra-zovanie i ego prilozhenie k nestatsionarnym zadacham mekhaniki [Multicomponent generalized finite integral transformation and its application to nonstationary problems of mechanics]. *Izv. vuzov. Mathematics*, 1991, no.4. pp. 57-63.

24. Lychev S.A. Svyazannaia dinamicheskaiia zadacha termouprugosti dlia konechnogo tsilindra [Associated dynamical problem of thermoelasticity for a finite cylinder]. *Bulletin Samara State University*, 2003, no.4 (30), pp. 112-124.

25. Lychev S.A., Manzhirov A.V., Uuber S.V. Zamknutyie resheniia kraevykh zadach svyazan-noi termouprugosti [Closed solutions of boundary value problems of coupled thermoelasticity]. *Mechanics of Solids*, 2010, no.4, pp. 138-154.

26. Lychev S.A., Senitsky Yu.E. Nesimmetrichnye integral'nye preobrazovaniia i ikh prilozheniia k zadacham viazko-uprugosti [Unsymmetric integral transforms and their applications to problems of viscoelasticity]. *Vestnik Samarsk. University. Natural science series*, 2002, Specialist. release, pp. 16-38.

27. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Semenov D.A. Svyazannye dinamicheskie zadachi giperbolicheskoi termouprugosti [Related dynamical problems of hyperbolic thermoelasticity]. *Izv. Sarat. Universiteta. New episode. Series. Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2009, vol. 9, iss. 4 (2), pp 94-127.

28. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Revinsky R.A. Prokhozhenie obobshchennoi GIII-termouprugoi volny cherez volnovod s pronitsaemoi dlia tepla stenкой [Passage of the generalized GIII-thermo-elastic wave through a waveguide with a heat permeable wall]. *Izv. Sarat. Universiteta. New episode. Series. Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 59-70.

29. Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Zh.M. Nestatsionarnaia osesimmetrichnaia zadacha ter-mouprugosti dlia zhestkozakreplennoi krugloi plastiny [Nonstationary axisymmetric problem of thermo-elasticity for a rigidly fixed circular plate]. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss 5 (77). DOI: 1018698 / 2308-6033-2018-5.

30. Sneddon I.N. Preobrazovaniia Fur'e [Fourier Transforms]. *Moscow, Foreign Literature Publishing House*, 1955, 668 p.

31. Senitsky Yu.E. Biorhtogonal'noe mnogokomponentnoe konechnoe integral'noe pre-obrazovanie i ego prilozhenie k kraevym zadacham mekhaniki [Biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems of mechanics]. *Izv. vuzov. Mathematics*, 1996, no. 8, pp. 71-81.

32. Butkovskiy A.G. Kharakteristiki sistem s raspredelennymi parametrami [Characteristics of systems with distributed parameters]. *Moscow, Science*, 1979, 224 p.

33. Shlyakhin D.A. Utochnnennoe reshenie dinamicheskoi zadachi elektrouprugosti dlia bi-morfnoi plastiny [A refined solution of the dynamic problem of electroelasticity for a bi-morphic plate]. *Bulletin KRSU*, 2016, vol. 16, no. 5, pp. 108-113.