



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.01

УДК 539.3

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЛ С ОТСЛАИВАЮЩИМИСЯ ПОКРЫТИЯМИ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛЕЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

И.В. Богачев, А.О. Ватулян

Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 26 декабря 2019 г.  
Принята: 11 марта 2020 г.  
Опубликована: 30 марта 2020 г.

#### Ключевые слова:

покрытия, отслоения, предварительные напряжения, неоднородность, функционально-градиентные материалы, слоистые структуры, функции раскрытия, акустический метод.

### АННОТАЦИЯ

Представлена модель установившихся колебаний неоднородного тела с предварительно напряженным отслаивающимся покрытием на основе общей линеаризованной постановки задачи о движении предварительно напряженно-деформированного упругого тела. На ее основе сформулирована постановка задачи о колебаниях неоднородной полосы, состоящей из подложки и предварительного напряженного покрытия, между которыми в определенной области имеется отслоение. Установившиеся колебания вызываются нагрузкой, приложенной к верхней грани покрытия. Для исследования задачи расчета колебаний рассматриваемой двумерной структуры использовано преобразование Фурье по продольной координате и исходная задача сведена к решению ряда вспомогательных краевых задач относительно трансформант искомым функций. Из условий равенства нулю функций напряжения (покрытие моделируется как математический разрез) подложки и покрытия в области отслоения построены операторные соотношения для расчета функций раскрытия. Ядра этих операторных соотношений являются сингулярными и представляют собой интегралы по бесконечному промежутку. Исследовано поведение их подынтегральных функций на бесконечности, на основе которого для вычисления ядер использованы специальные подходы. В результате решения полученных гиперсингулярных уравнений с разностными ядрами, для которых используется метод коллокаций, построены оригиналы функций раскрытия. С использованием аналогичного подхода при обращении преобразования Фурье построены соотношения для вычисления оригиналов функций смещения на верхней границе покрытия. На основе вычислительных экспериментов проведен анализ влияния исходных геометрических и механических параметров подложки и покрытия на значения функций раскрытия в области отслоения и функций смещения на верхней границе слоя. Также исследовано влияние уровня предварительного напряжения на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ). Выявлено, что наиболее значительное влияние на АЧХ оказывается в окрестности частот толщинных резонансов. На основе информации о полях смещений возможно построение схем по идентификации характеристик отслоения.

© ПНИПУ

© Богачев Иван Викторович – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: bogachev89@yandex.ru, ID: 0000-0002-4725-5102.

Ватулян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, vatulyan@aaanet.ru, ID: 0000-0003-0444-4496.

Ivan V. Bogachev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, e-mail: bogachev89@yandex.ru,

ID: 0000-0002-4725-5102.

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department,

e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, vatulyan@aaanet.ru, ID: 0000-0003-0444-4496.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## ON MODELING BODIES WITH DELAMINATING COATINGS TAKING INTO ACCOUNT THE FIELDS OF PRESTRESSES

I.V. Bogachev, A.O. Vatulyan

Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science  
of I.I. Vorovich, Rostov-on-Don, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 26 December 2019  
Accepted: 11 March 2020  
Published: 30 March 2020

#### Keywords:

coatings, delaminations, prestresses, inhomogeneity, functionally gradient materials, layered structures, opening functions, acoustic method.

### ABSTRACT

The paper presents a model of steady-state oscillations of an inhomogeneous body with a prestressed exfoliating coating based on a general linearized statement of the problem of the motion of a prestressed-strained elastic body. On its basis, the statement of the problem of oscillations of an inhomogeneous strip consisting of a substrate and a prestressed coating is formulated, between which there is a delamination in a certain region. Steady oscillations are caused by a load applied to the upper boundary of the coating. To calculate the oscillations of the two-dimensional structure under consideration, the Fourier transform in the longitudinal coordinate was used and the original problem was reduced to solving a number of auxiliary boundary value problems with respect to transformants of the desired functions. From the conditions that the stress functions vanish (the cover is modeled as a mathematical section) of the substrate and the coating, the operator relations are constructed in the area of delamination to calculate the opening functions. The kernels of these operator relations are singular and are integrals over an infinite interval. A study was made of the behavior of their integrands at infinity, on the basis of which special approaches were used to calculate the kernels. As a result of solving the obtained hypersingular equations with difference kernels, for which the collocation method is used, the originals of the disclosure functions are constructed. Using a similar approach for inverting the Fourier transformations, we constructed relations to calculate the originals of the displacement functions at the upper boundary of the coverage. Based on the computational experiments, an analysis is made of the influence of the initial geometric and mechanical parameters of the substrate and coating on the values of the disclosure functions in the delamination region and the displacement functions at the upper boundary of the layer. The influence of the prestress level on the amplitude-frequency characteristics (AFC) was also investigated. It was found that the most significant effect on the frequency response is in the vicinity of the frequencies of the thick resonances. Based on the information on the displacement fields, it is possible to construct schemes for identifying delamination characteristics.

© PNRPU

---

### Введение

При исследовании задач, связанных с прогнозированием и повышением надежности и безопасности технических систем, имеющих покрытия, важную роль играют методики диагностики отслоений в покрытиях и построение адекватных моделей, описывающих процесс отслоения. Это связано с практической значимостью идентификации такого рода дефектов, возникающих как на макро-, так и на микроуровне. При этом особо стоит отметить функционально-градиентные [1] покрытия, свойства которых зависят от координат, как наиболее динамично развивающийся вид покрытий. Одной из причин возникновения отслоений, а впоследствии – трещин и полостей между подложкой и покрытием, является наличие полей предварительных напряжений [2, 3] и остаточных деформаций, в связи чем необходим учет данных факторов при моделировании.

В современной литературе моделированию неоднородных покрытий посвящено множество работ. Так, в работе [4] на основе метода акустической эмиссии разработана методика оценки поведения функционального покрытия, нанесенного на материал. В частности, методика применялась для керамических покрытий, для ко-

торых характерно наличие механизмов накопления повреждений, постепенно приводящих к нарушению работоспособности конструкции. Авторами работы [5] рассмотрена модель пьезоэлектрического покрытия полупространства, исследованы динамические характеристики системы и особенности распространения поверхностных волн. В статье [6] представлен анализ распределения диссипации энергии, передаваемой на покрытие дорожного полотна при проезде автотранспорта, для чего была разработана специальная динамическая модель напряженно-деформированного состояния многослойного полупространства. Проведены эксперименты для подложек различной степени жесткости и капитальности. В работе [7] построена итерационная схема идентификации неизвестных функций, характеризующих параметры Ламе и плотность толстого покрытия, нанесенного на цилиндрический волновод, на основе анализа акустического отклика.

Особый интерес представляют работы, в которых рассмотрены аспекты моделирования отслоений в покрытиях. Среди отечественных авторов стоит отметить Р.В. Гольдштейна, К.Б. Устинова. Например, в работе [8] отслаивающееся покрытие моделируется как пластина с упругим защемлением к подложке. Проведен анализ

параметров потери устойчивости, определения критического напряжения в случаях изотропного и анизотропного покрытий и подложек. В результате выявлено, что потеря устойчивости для широких диапазонов свойств может описываться одним параметром, зависящим от упругих свойств покрытия и подложки, а также от отношения длины отслоения и толщины покрытия. В статье [9] проведено асимптотическое исследование смещения берегов трещины при нормальном отрыве покрытия от подложки, моделируемых двумя упругими полосами, как вблизи, так и вдали от ее вершины. В работах [10–13] представлены подходы к решению задач об отслоении покрытий, основанные на моделировании отслоившегося участка с помощью одного из вариантов теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из рассмотрения задачи о контакте полубесконечного отслоения с основанием, решаемой аналитически. В рамках этого подхода представлено решение нескольких задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала. В статье [14] произведено конечно-элементное моделирование колебаний полосы с преднапряженным покрытием при наличии отслоения.

Также стоит отметить статьи зарубежных исследователей, в частности Т. Хатчинсона и соавторов [15–18]. В работе [16] решена задача о потере устойчивости отслоившегося участка покрытия в случае жесткой подложки с прямолинейной поверхностью. Статья [19] посвящена исследованию отслоений, вызванных остаточными напряжениями. Метод исследования заключается в измерении ударной вязкости покрытий при последовательном растяжении и изгибе. На основе балочной теории удастся достаточно точно описать процесс распространения отслоения. Также исследовано влияние остаточного напряжения на процесс отслоения.

Выделим ряд работ, посвященных индентированию (вдавливанию жесткого штампа) неоднородных покрытий [20–23]. В статье [22] исследовано поведение линейно-упругого полупространства с функционально-градиентным покрытием при внедрении в него индентора (штампа) со сферической формой наконечника, построена схема расчета полей деформаций и контактных напряжений для произвольных законов изменения модуля Юнга для покрытия и подложки. В работе [23] представлено сравнение нескольких моделей деформирования неоднородной упругой полосы под воздействием индентора, учитывающее различный характер неоднородности свойств. Результаты сравниваются конечно-элементными решениями в однородном случае.

Настоящее исследование посвящено разработке моделей отслоения предварительно напряженных неоднородных покрытий на примере задачи о колебаниях неоднородной полосы с покрытием. Основной целью работы является анализ влияния механических и геометрических характеристик покрытий, в частности уровня предварительного напряжения, на функции раскрытия в области отслоения, а также функции смеще-

ния и амплитудно-частотные характеристики на верхней границе полосы. Такого рода исследование необходимо для выявления наиболее информативных частотных диапазонов зондирования и построения подхода к решению обратных задач [24] идентификации параметров отслоения на основе анализа акустического отклика.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой  $\omega$  упругой изотропной неоднородной по толщине полосы, состоящей из основного слоя-подложки толщиной  $H$  и предварительно напряженного (ПН) слоя-покрытия толщиной  $h$ , располагающегося в области  $S = \{x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in [0, H+h]\}$  в плоской постановке. Между основным слоем и слоем-покрытием имеется отслоение размерностью  $2a$ . Нижняя грань слоя  $S_1$  жестко закреплена, на части верхней границы  $S_2$  приложена нагрузка, определяемая вектором  $\mathbf{q}e^{-i\omega t}$ , где  $\mathbf{q} = (0, q(x_1), 0)$  (рис. 1). В рамках принятых гипотез у вектора смещений ненулевыми являются компоненты  $u_1 = u_1(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, u_2 = u_2(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$ .

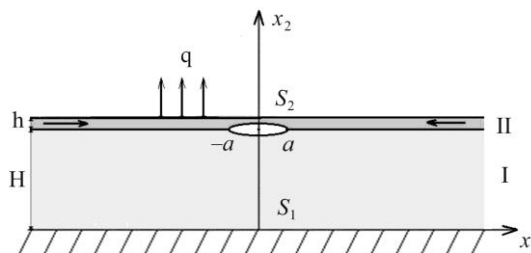


Рис. 1. Схематическое изображение рассматриваемой полосы с ПН покрытием

Fig. 1. The schematic illustration of a coated strip

Линеаризованная постановка задачи об установившихся колебаниях предварительно напряженно-деформированного анизотропного тела с плотностью  $\rho$  после отделения временного множителя имеет вид [2, 25]

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ T_{ij} &= \sigma_{ij} + u_{i,m}^0 \sigma_{mj} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь величины с верхним индексом «0» относятся к начальному состоянию, величины без индекса – компоненты соответствующих добавочных векторов и тензоров:  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $\sigma_{ij}$  – компоненты симметричного тензора напряжений Кирхгофа,  $T_{ij}$  – компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы.

Запишем уравнения установившихся колебаний полосы:

$$\begin{aligned} T_{11,1} + T_{12,2} + \rho\omega^2 u_1 &= 0, \\ T_{21,1} + T_{22,2} + \rho\omega^2 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для подложки без ПН определяющие соотношения для изотропного материала имеют вид:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \sigma_{11} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1}, \\ T_{22} &= \sigma_{22} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2}, \\ T_{12} &= T_{21} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В случае наличия одноосного ПН  $\sigma^0(x_2)$  для покрытия определяющие соотношения записываются в форме:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1} + \sigma^0 u_{1,1}, \\ T_{22} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2}, \\ T_{12} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad T_{21} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma^0 u_{2,1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подобная модель ПНДС, учитывающая только предварительные напряжения, является довольно распространенной в литературе [26–28].

Запишем граничные условия для жесткого защемления нижней границы полосы и нагружения на верхней границе:

$$\begin{aligned} u_1|_{x_2=0} &= u_2|_{x_2=0} = 0, \\ T_{12}|_{x_2=H+h} &= 0, \quad T_{22}|_{x_2=H+h} = q(x_1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Также должны выполняться условия отсутствия напряжений в области отслоения:

$$T_{12}|_{x_2=H+h} = T_{22}|_{x_2=H+h} = 0, \quad x_1 \in [-a, a]. \quad (1.6)$$

В сформулированной задаче требуется определить функции смещения на верхней границе слоя с целью анализа влияния исходных параметров задачи, в частности, уровня предварительных напряжений на них.

## 2. Вспомогательные задачи

Для решения исходной задачи рассмотрим две постановки вспомогательных задач для каждой из полос.

**Задача 1.** Рассматриваются колебания основной полосы-подложки, для которой заданы функции смещения в основании и на границе полос:

$$\begin{aligned} u_1|_{x_2=0} &= 0, \quad u_2|_{x_2=0} = 0, \\ u_1|_{x_2=H} &= u_1^-, \quad u_2|_{x_2=H} = u_2^-. \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Задача 2.** Рассматриваются колебания полосы-покрытия, для которой заданы функции смещения на нижней грани и нагрузка верхней:

$$\begin{aligned} u_1|_{x_2=H} &= u_1^+(x_1), \quad u_2|_{x_2=H} = u_2^+(x_1), \\ T_{22}|_{x_2=H+h} &= q(x_1), \quad T_{12}|_{x_2=H+h} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для решения задач используется преобразование Фурье [29] по переменной  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\alpha, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x_1, x_2) e^{-i\alpha x_1} dx_1, \\ \tilde{u}_i^+(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_i^+(x_1, H) e^{-i\alpha x_1} dx_1, \quad \tilde{u}_i^-(\alpha) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_i^-(x_1, H) e^{-i\alpha x_1} dx_1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\tilde{q}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} q^-(x_1) e^{-i\alpha x_1} dx_1, \quad \tilde{\tau}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^-(x_1) e^{-i\alpha x_1} dx_1.$$

Уравнения задачи (1.2), записанные в трансформантах, примут вид:

$$\begin{aligned} -i\alpha \tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{12,2} + \rho\omega^2 \tilde{u}_1 &= 0, \\ -i\alpha \tilde{T}_{12} + \tilde{T}_{22,2} + \rho\omega^2 \tilde{u}_2 &= 0, \\ \tilde{T}_{11} &= \lambda(-i\alpha \tilde{u}_1 + \tilde{u}_{2,2}) - 2i\alpha\mu \tilde{u}_1, \\ \tilde{T}_{22} &= \lambda(-i\alpha \tilde{u}_1 + \tilde{u}_{2,2}) + 2\mu \tilde{u}_{2,2}, \\ \tilde{T}_{12} &= \mu(\tilde{u}_{1,2} - i\alpha \tilde{u}_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

После исключения  $\tilde{T}_{11}$  из первого уравнения запишем систему (2.4) в каноническом виде:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12,2} &= \alpha i \lambda \tilde{T}_{22} / (\lambda + 2\mu) + \\ &+ (4\alpha^2 \mu (\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) - \rho\omega^2) \tilde{u}_1, \\ \tilde{T}_{22,2} &= i\alpha \tilde{T}_{12} - \rho\omega^2 \tilde{u}_2, \\ \tilde{u}_{2,2} &= \tilde{T}_{22} / (\lambda + 2\mu) + i\alpha \lambda \tilde{u}_1 / (\lambda + 2\mu) \\ \tilde{u}_{1,2} &= \tilde{T}_{12} / \mu + i\alpha \tilde{u}_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Граничные условия для основного слоя в трансформантах:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1|_{x_2=0} &= 0, \quad \tilde{u}_2|_{x_2=0} = 0, \\ \tilde{u}_1|_{x_2=H} &= u_1^-, \quad \tilde{u}_2|_{x_2=H} = u_2^-. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогично можно записать итоговую систему для предварительно напряженного слоя-покрытия в каноническом виде:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12,2} &= \alpha i \lambda \tilde{\sigma}_{22} / (\lambda + 2\mu) + \\ &+ (\alpha^2 (4\mu (\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) - \sigma^0) - \rho\omega^2) \tilde{u}_1, \\ \tilde{T}_{22,2} &= i\alpha \tilde{T}_{12} - (\rho\omega^2 - \alpha^2 \sigma^0) \tilde{u}_2, \\ \tilde{u}_{2,2} &= \tilde{T}_{22} / (\lambda + 2\mu) + i\alpha \lambda \tilde{u}_1 / (\lambda + 2\mu) \\ \tilde{u}_{1,2} &= \tilde{T}_{12} / \mu + i\alpha \tilde{u}_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Граничные условия для слоя-покрытия в трансформантах:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1|_{x_2=H} &= \tilde{u}_1^+(\alpha), \quad \tilde{u}_2|_{x_2=H} = \tilde{u}_2^+(\alpha), \\ \tilde{T}_{22}|_{x_2=H+h} &= \tilde{q}, \quad \tilde{T}_{12}|_{x_2=H+h} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Проведем обезразмеривание задач (2.5), (2.6) и (2.7), (2.8) с помощью введения следующих обозначений:

$$\begin{aligned} x_2 &= \text{Hy}, & x_1 &= \text{Hx}, & h &= \text{H}\hat{h}, & a &= \text{H}\hat{a} & \alpha &= \text{H}\hat{\alpha}, \\ u_1 &= i\text{H}U_1, & u_2 &= \text{H}U_2, & T_{12} &= i\mu_0\hat{T}_{12}, & T_{22} &= \mu_0\hat{T}_{22}, & \lambda &= \mu_0\hat{\lambda}, \\ \mu &= \mu_0\hat{\mu}, & \sigma^0 &= \mu_0T^0, & \rho &= \rho_0\hat{\rho}, & \mu_0 &= \mu(\text{H}), & \rho_0 &= \rho(\text{H}), \\ q &= \text{HP}, & \omega^2 &= \mu_0\kappa^2/\text{H}^2\rho_0: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12,2} &= \hat{\alpha}\hat{\lambda}\tilde{T}_{22}/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}) + \\ &+ \left(4\hat{\alpha}^2\hat{\mu}(\hat{\lambda}+\hat{\mu})/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})-\hat{\rho}\kappa^2\right)\tilde{U}_1, \\ \tilde{T}_{22,2} &= -\hat{\alpha}\tilde{T}_{12}-\hat{\rho}\omega^2\tilde{U}_2, \\ \tilde{U}_{2,2} &= \tilde{T}_{22}/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})-\hat{\alpha}\lambda\tilde{U}_1/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}), \\ \tilde{U}_{1,2} &= \tilde{T}_{12}/\hat{\mu}+\hat{\alpha}\tilde{U}_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Граничные условия для основного слоя в безразмерных параметрах:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1|_{y=0} &= 0, & \tilde{U}_2|_{y=0} &= 0, \\ \tilde{U}_1|_{y=1} &= U_1^-, & \tilde{U}_2|_{y=1} &= U_2^-. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогично можно записать уравнения для слоя-покрытия:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12,2} &= \hat{\alpha}\hat{\lambda}\tilde{T}_{22}/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}) + \\ &+ \left(\hat{\alpha}^2\left(4\hat{\mu}(\hat{\lambda}+\hat{\mu})/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})-T^0\right)-\hat{\rho}\kappa^2\right)\tilde{U}_1, \\ \tilde{T}_{22,2} &= -\hat{\alpha}\tilde{T}_{12}-\left(\hat{\rho}\omega^2-\hat{\alpha}^2T^0\right)\tilde{U}_2, \\ \tilde{U}_{2,2} &= \tilde{T}_{22}/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})-\hat{\alpha}\lambda\tilde{U}_1/(\hat{\lambda}+2\hat{\mu}), \\ \tilde{U}_{1,2} &= \tilde{T}_{12}/\hat{\mu}+\hat{\alpha}\tilde{U}_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Граничные условия для слоя-покрытия в безразмерных параметрах:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1|_{y=1} &= \tilde{U}_1^+, & \tilde{U}_2|_{y=1} &= \tilde{U}_2^+, \\ \tilde{T}_{22}|_{y=1+\hat{h}} &= \tilde{P}, & \tilde{T}_{12}|_{y=1+\hat{h}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В дальнейшем знак " $\wedge$ " в записи будем опускать.

### 3. Методика решения вспомогательных задач

Решение каждой из вспомогательных задач будем искать в виде линейных комбинаций решений специальных подзадач.

#### 1. Задача для основного слоя

Рассмотрим две задачи, уравнения для которых будут иметь вид (2.9), а граничные условия в первом случае:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1|_{y=0} &= 0, & \tilde{U}_2|_{y=0} &= 0, \\ \tilde{U}_1|_{y=1} &= 1, & \tilde{U}_2|_{y=1} &= 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

во втором случае:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1|_{y=0} &= 0, & \tilde{U}_2|_{y=0} &= 0, \\ \tilde{U}_1|_{y=1} &= 0, & \tilde{U}_2|_{y=1} &= 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда решение первой вспомогательной задачи можно записать в виде

$$\tilde{U}_i^I = \tilde{U}_i^{(11)}\tilde{U}_1^- + \tilde{U}_i^{(12)}\tilde{U}_2^-, \quad (3.2)$$

где  $\tilde{U}_i^{(11)}, \tilde{U}_i^{(12)}$  – решение первой и второй подзадач соответственно.

По найденным  $\tilde{U}_i^I$  находятся соответствующие  $\tilde{T}_{12}^I, \tilde{T}_{22}^I$ .

#### 2. Задача для покрытия

Для второй вспомогательной задачи ввиду ее граничных условий будем рассматривать три подзадачи, уравнения которых будут иметь вид (2.11), а граничные условия:

– для первой:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1|_{y=1} &= 1, & \tilde{U}_2|_{y=1} &= 0, \\ \tilde{T}_{22}|_{y=1+\hat{h}} &= 0, & \tilde{T}_{12}|_{y=1+\hat{h}} &= 0; \end{aligned} \quad (3.3)$$

– для второй:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1|_{y=1} &= 0, & \tilde{U}_2|_{y=1} &= 1, \\ \tilde{T}_{22}|_{y=1+\hat{h}} &= 0, & \tilde{T}_{12}|_{y=1+\hat{h}} &= 0; \end{aligned} \quad (3.4)$$

– для третьей:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1|_{y=1} &= 0, & \tilde{U}_2|_{y=1} &= 0, \\ \tilde{T}_{22}|_{y=1+\hat{h}} &= 1, & \tilde{T}_{12}|_{y=1+\hat{h}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда решение второй вспомогательной задачи можно записать в виде

$$\tilde{U}_i^II = \tilde{U}_i^{(21)}\tilde{U}_1^+ + \tilde{U}_i^{(22)}\tilde{U}_2^+ + \tilde{U}_i^{(23)}\tilde{P}, \quad (3.6)$$

где  $\tilde{U}_i^{(21)}, \tilde{U}_i^{(22)}, \tilde{U}_i^{(23)}$  – решение первой, второй и третьей подзадач соответственно.

Аналогично определяются и  $\tilde{T}_{12}^II, \tilde{T}_{22}^II$ .

Численное решение вспомогательных задач осуществлялось с помощью метода пристрелки [30], показавшего достаточно высокую точность.

### 4. Построение операторных соотношений

В результате решения вспомогательных задач в трансформантах определяются функции на границе слоев  $\tilde{T}_{12}^I(\alpha, \text{H}) = \tilde{T}_{12}^-(\alpha)$ ,  $\tilde{T}_{22}^I(\alpha, \text{H}) = \tilde{T}_{22}^-(\alpha)$  и  $\tilde{T}_{12}^II(\alpha, \text{H}) = \tilde{T}_{12}^+(\alpha)$ ,  $\tilde{T}_{22}^II(\alpha, \text{H}) = \tilde{T}_{22}^+(\alpha)$ , соответствующие решениям 1-й и 2-й вспомогательных задач, для которых составляется система 4 уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_i(\alpha) &= \tilde{U}_i^-(\alpha) - \tilde{U}_i^+(\alpha), \\ \tilde{T}_{12}^-(\alpha) &= \tilde{T}_{12}^+(\alpha), \\ \tilde{T}_{22}^-(\alpha) &= \tilde{T}_{22}^+(\alpha). \end{aligned} \quad (4.1)$$

В результате решения системы получаются выражения для  $\tilde{U}_i^-(\alpha)$  и  $\tilde{U}_i^+(\alpha)$  через  $\tilde{\chi}_i(\alpha)$ . По ним вычисляются соответствующие  $\tilde{T}_{12}^+(\alpha)$ ,  $\tilde{T}_{22}^+(\alpha)$ , выраженные через  $\tilde{\chi}_i(\alpha)$ . Их можно записать в виде

$$\tilde{T}_{12}^+(\alpha) = K_{11}(\alpha)\tilde{\chi}_1(\alpha) + K_{12}(\alpha)\tilde{\chi}_2(\alpha) + K_{10}(\alpha)\tilde{P}(\alpha).$$

Затем проводится обратное преобразование Фурье функций  $\tilde{T}_{12}^+(\alpha)$ :

$$T_{12}^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_{12}^+(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

С использованием свойства прямого и обратного преобразований Фурье, переводящих произведение функций в их свертку [31], из условий (1.6) в безразмерном виде

$$T_{12}^+(x) = 0, \quad x \in [-a, a] \quad (4.2)$$

строятся интегральные операторные соотношения относительно оригиналов  $\chi_i(\alpha)$  вида:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a k_{ij}(\xi - x) \chi_j(\xi) d\xi &= F_i(x), \\ k_{ij}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha, \\ F_i(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{i0}(\alpha) \tilde{P}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отметим, что ядра полученных интегральных соотношений (4.3) являются гиперсингулярными [32, 33], для их нахождения требуется применение специальных методов [34, 35].

### 5. Методика решения интегральных уравнений

Для решения интегральных уравнений (4.3) использован метод коллокаций, при котором отрезок  $[-a, a]$  разбивается на  $N$  отрезков  $\Delta_k$ , на каждом из которых

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} \chi_j(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(\alpha) e^{i\alpha(\xi-x)} d\alpha d\xi &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(\alpha) \int_{\Delta_k} \chi_j(\xi) e^{i\alpha(\xi-x)} d\xi d\alpha &= \\ = \chi_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{ij}(\alpha)}{i\alpha} \left( e^{i\alpha(\xi_{k+1}-x)} - e^{i\alpha(\xi_k-x)} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда для уравнений (4.3) можно записать следующую систему из  $2N$  уравнений, полученную с помощью дискретизации:

$$\sum_{k=1}^N (\chi_{1k} D_{11kn} + \chi_{2k} D_{12kn}) = f_{1n},$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (\chi_{1k} D_{21kn} + \chi_{2k} D_{22kn}) &= f_{2n}, \quad n = 1 \dots N, \\ D_{mjk} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{mj}(\alpha)}{i\alpha} \left( e^{i\alpha(\xi_{k+1}-x_n)} - e^{i\alpha(\xi_k-x_n)} \right) d\alpha, \\ f_{mn} &= - \int_{-\infty}^{\infty} K_{m0}(\alpha) \tilde{P}(\alpha) e^{i\alpha x_n} d\alpha. \end{aligned} \quad (5.2)$$

При этом для вычисления интегралов  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{mj}(\alpha)}{i\alpha} e^{i\alpha t} d\alpha$  в узловых значениях требуется исследование поведения передаточных функций  $K_{mj}(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . В ходе его проведения было выявлено, что функции  $K_{mm}(\alpha)$  являются четными при  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $K_{mm}(\alpha) \sim C_{mm}|\alpha|$ , а функции  $K_{mj}(\alpha), m \neq j, j \neq 0$  являются нечетными при  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $K_{mj}(\alpha) \sim C_{mj}\alpha$ , где  $C_{mj}$  – некоторые константы. Функции  $K_{m0}(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , а интегралы  $f_{mn}$  являются сходящимися.

Рассмотрим отдельно вычисление интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{mm}(\alpha)}{i\alpha} e^{i\alpha t} d\alpha &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{mm}(\alpha) + C_{mm}|\alpha| - C_{mm}|\alpha|}{i\alpha} e^{i\alpha t} d\alpha &= \\ = -iC_{mm} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} K_{mm}^0 e^{i\alpha t} d\alpha, \\ K_{mm}^0 &= \left( \frac{K_{mm}(\alpha) - C_{mm}|\alpha|}{i\alpha} \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

а также

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{mj}(\alpha)}{i\alpha} e^{i\alpha t} d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{mj}(\alpha) + C_{mj}\alpha - C_{mj}\alpha}{i\alpha} e^{i\alpha t} d\alpha = \\ = -iC_{mj} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}^1 e^{i\alpha t} d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}^1 e^{i\alpha t} d\alpha, \\ K_{mj}^1 &= \left( \frac{K_{mj}(\alpha) - C_{mj}\alpha}{i\alpha} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Отметим, что  $\int_{-\infty}^{\infty} K_{mm}^0 e^{i\alpha t} d\alpha$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}^1 e^{i\alpha t} d\alpha$  являются сходящимися.

Растущую часть интеграла из (5.3) будем рассматривать в главном значении в смысле Коши:

$$(\text{V.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha = \frac{2i}{t}.$$

Тогда интеграл (5.4) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{mm}(\alpha)}{i\alpha} e^{i\alpha t} d\alpha &= \frac{2C_{mm}}{t} + \int_{-\infty}^{\infty} K_{mm}^0 e^{i\alpha t} d\alpha, \\ K_{mm}^0 &= \left( \frac{K_{mm}(\alpha) - C_{mm}|\alpha|}{i\alpha} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Результаты вычислительных экспериментов по построению функций раскрытия для различных наборов характеристик покрытия и подложки будут представлены далее в соответствующем разделе.

**6. Определение функции смещения на верхней границе полосы**

По найденным из системы (4.3) функциям раскрытия  $\chi_i(x)$  можно определить значения функций смещения на верхней границе слоя-покрытия.

Трансформанты функций смещения слоя-покрытия в области отслоения из (4.1) имеют вид

$$\tilde{U}_i^+(\alpha) = k_{i1}(\alpha)\tilde{\chi}_1(\alpha) + k_{i2}(\alpha)\tilde{\chi}_2(\alpha) + k_{i0}(\alpha)\tilde{P}(\alpha). \quad (6.1)$$

Также трансформанты функции смещения верхнего слоя можно определить из решения второй вспомогательной задачи:

$$\tilde{U}_i'' = \tilde{U}_i^{(21)}\tilde{U}_1^+ + \tilde{U}_i^{(22)}\tilde{U}_2^+ + \tilde{U}_i^{(23)}\tilde{P}. \quad (6.2)$$

Подставляя (5.1) в (5.2) получим выражение

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i'' &= \tilde{\chi}_1(\alpha)(k_{i1}(\alpha)\tilde{U}_i^{(21)} + k_{21}(\alpha)\tilde{U}_i^{(22)}) + \\ &+ \tilde{\chi}_2(\alpha)(k_{i2}(\alpha)\tilde{U}_i^{(21)} + k_{22}(\alpha)\tilde{U}_i^{(22)}) + \\ &+ (k_{i0}(\alpha)\tilde{U}_i^{(21)} + k_{20}(\alpha)\tilde{U}_i^{(22)} + \tilde{U}_i^{(23)})\tilde{P}(\alpha), \end{aligned}$$

Для верхней границы слоя:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i(1+h, \alpha) &= \tilde{\chi}_1(\alpha)G_{i1}(1+h, \alpha) + \\ &+ \tilde{\chi}_2(\alpha)G_{i2}(1+h, \alpha) + G_{i3}(1+h, \alpha)\tilde{P}(\alpha), \\ G_{i1}(1+h, \alpha) &= k_{i1}(\alpha)\tilde{U}_i^{(21)} + k_{21}(\alpha)\tilde{U}_i^{(22)}, \\ G_{i2}(1+h, \alpha) &= k_{i2}(\alpha)\tilde{U}_i^{(21)} + k_{22}(\alpha)\tilde{U}_i^{(22)}, \\ G_{i3}(1+h, \alpha) &= k_{i0}(\alpha)\tilde{U}_i^{(21)} + k_{20}(\alpha)\tilde{U}_i^{(22)} + \tilde{U}_i^{(23)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Тогда, обращая преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} U_i(x, 1+h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \chi_j(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(\alpha) e^{i\alpha(\xi-x)} d\alpha d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{i3}(\alpha) \tilde{P}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Для вычисления  $U_i(x, 1+h)$  используются те же принципы вычисления интегралов, что и для функций раскрытия  $\chi_i(x)$ .

В следующем разделе также будут приведены результаты вычислительных экспериментов по определению функций смещения на верхней границе полосы.

**7. Вычислительные эксперименты**

В данном разделе представлен анализ влияния характеристик покрытия и подложки на функции раскрытия, определяемые из решения интегральных уравнений (4.3), и функции смещения на верхней границе полосы, вычисляемые по формулам (5.4) на основе проведения соответствующих вычислительных экспериментов. В каждом из представленных наборов экспериментов соответствующие функции строились для различных значений характеристик покрытия (отношения параметров Ламе, толщины покрытия, уровня предварительных напряжений), а также для различных способов приложения нагрузки к верхней грани.

Набор экспериментов 1 (анализ влияния уровня параметров Ламе покрытия). Представлены результаты расчета функций раскрытия  $\chi_i(x)$  (рис. 2) и функций смещения на верхней грани полосы  $U_i(x, 1+h)$  (рис. 3) для различных соотношений (1:1; 1:2; 1:5; 1:10) параметров Ламе покрытия толщиной  $h = 0,1$  относительно параметров подложки в статическом случае  $\kappa = 0$ .

Из полученных графиков можно сделать вывод о том, что чем выше значения уровня параметров Ламе покрытия, тем меньше амплитуда функций раскрытия и смещения.

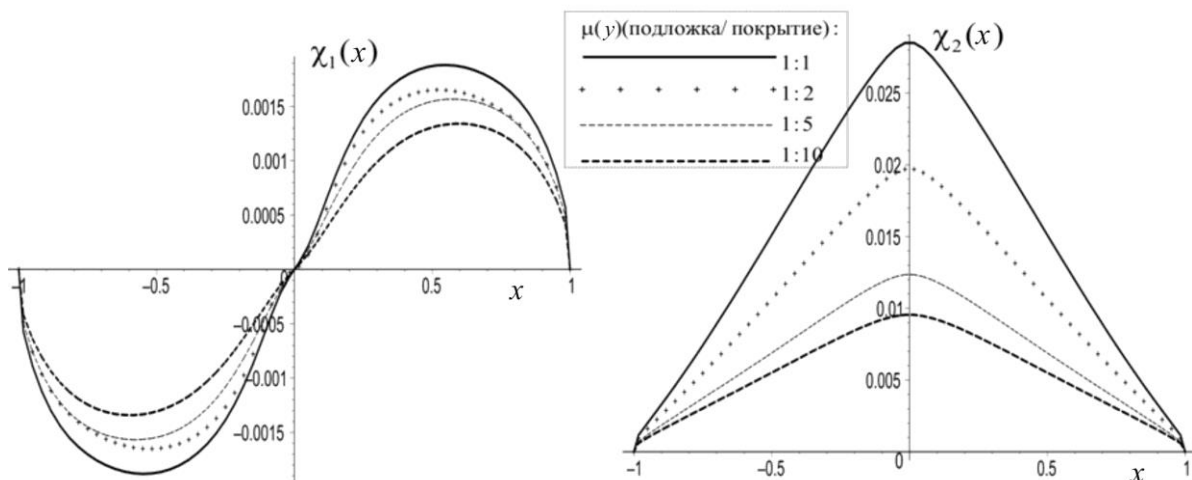


Рис. 2. Графики функций раскрытия для различных соотношений параметров Ламе

Fig. 2. Graphs of disclosure functions for various ratios of Lamé parameters

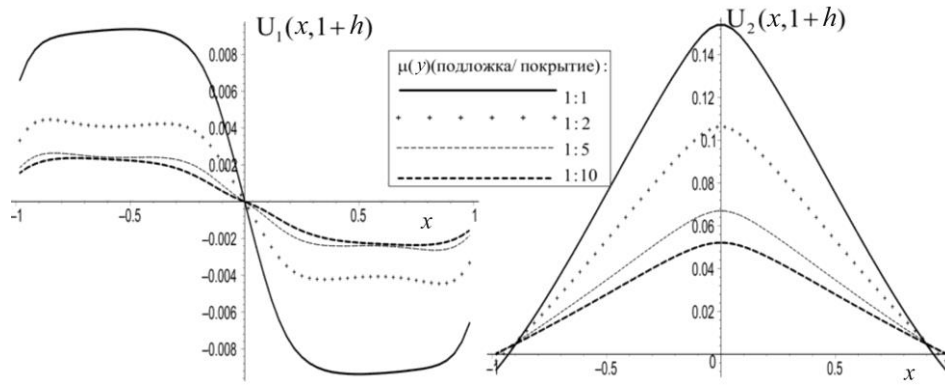


Рис. 3. Графики функций смещения на верхней границе полосы для различных соотношений параметров Ламе  
 Fig. 3. Graphs of the displacement functions at the upper boundary of the strip for various ratios of Lamé parameters

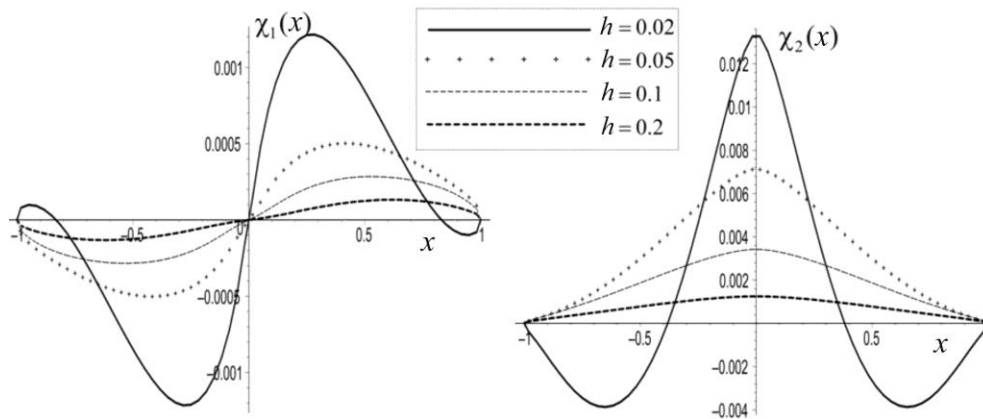


Рис. 4. Графики функций раскрытия для различных толщин покрытия  
 Fig. 4. Graphs of the disclosure functions for different coating thicknesses

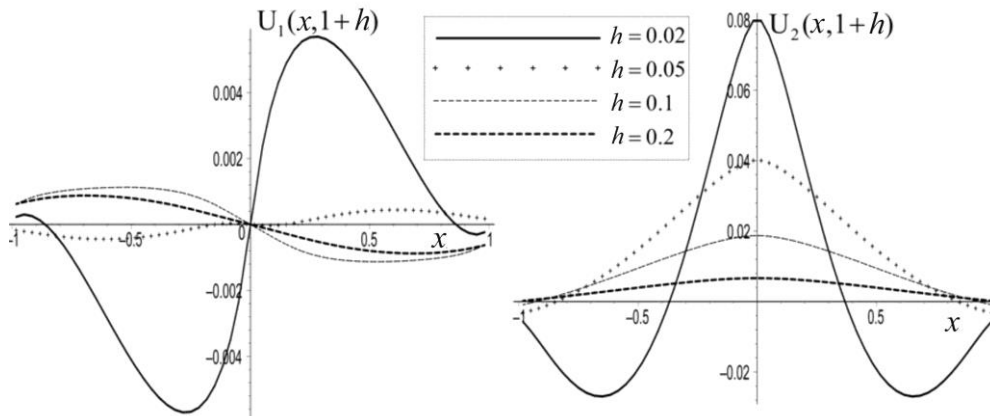


Рис. 5. Графики функций смещения на верхней границе полосы для различных толщин покрытия  
 Fig. 5. Graphs of the displacement functions at the upper boundary of the strip for different coating thicknesses

Набор экспериментов 2 (анализ влияния толщины покрытия). Представлены результаты расчета функций раскрытия  $\chi_i(x)$  (рис. 4) и функций смещения на верхней грани полосы  $U_i(x, 1+h)$  (рис. 5) для различных толщин покрытия  $h = 0,02; 0,05; 0,1; 0,2$  в статическом случае  $\kappa = 0$ .

В данном случае видно, что чем толще покрытие, тем меньше амплитуда функций раскрытия и смещения.

Набор экспериментов 3 (анализ влияния уровня ПН). Представлены результаты расчета функций раскрытия  $\chi_i(x)$  (рис. 6) и функций смещения на верхней грани полосы  $U_i(x, 1+h)$  (рис. 7) для различных уровней предварительных напряжений  $\tau = 0, 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}$  в статическом случае  $\kappa = 0$ . В данном наборе экспериментов и в следующем рассматривалось сжимающее поле предварительных напряжений в покрытии.



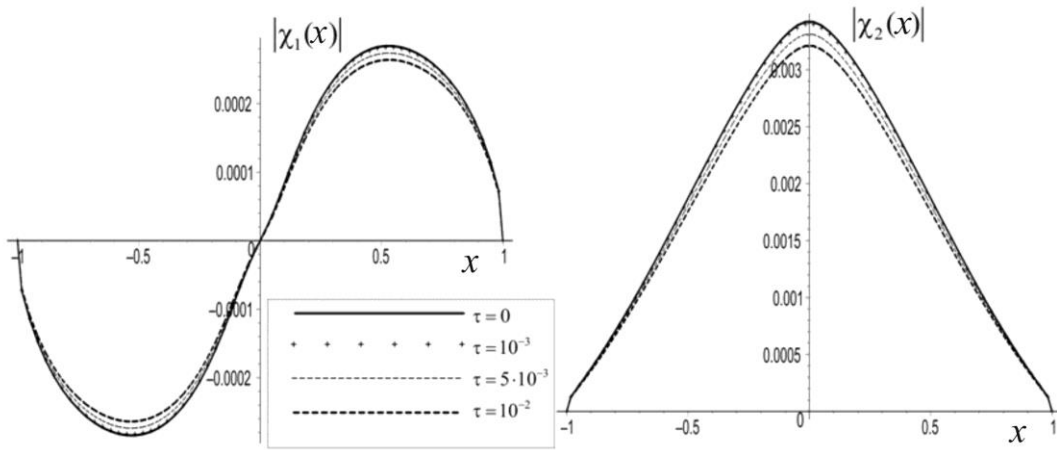


Рис. 6. Графики функций раскрытия для различных уровней предварительных напряжений

Fig. 6. Graphs of the disclosure functions for various prestressing levels

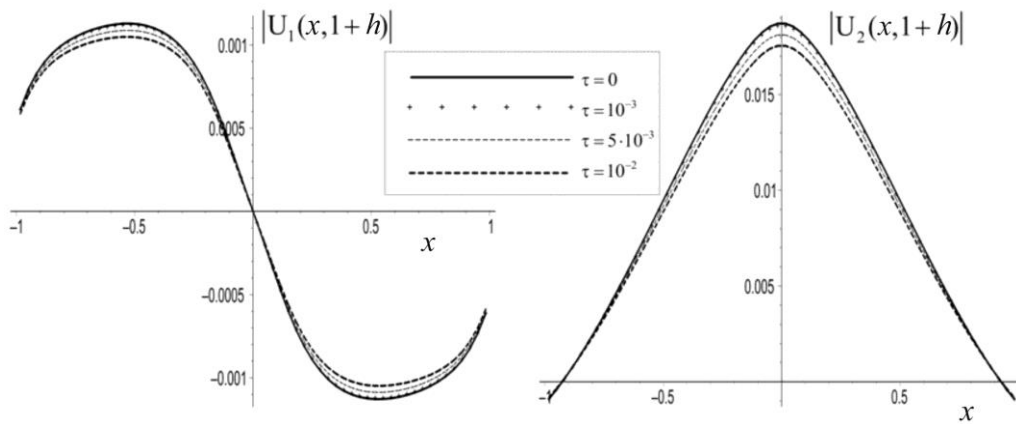


Рис. 7. Графики функций смещения на верхней границе для различных уровней предварительных напряжений

Fig. 7. Graphs of the displacement functions at the upper boundary of the strip for various prestressing levels

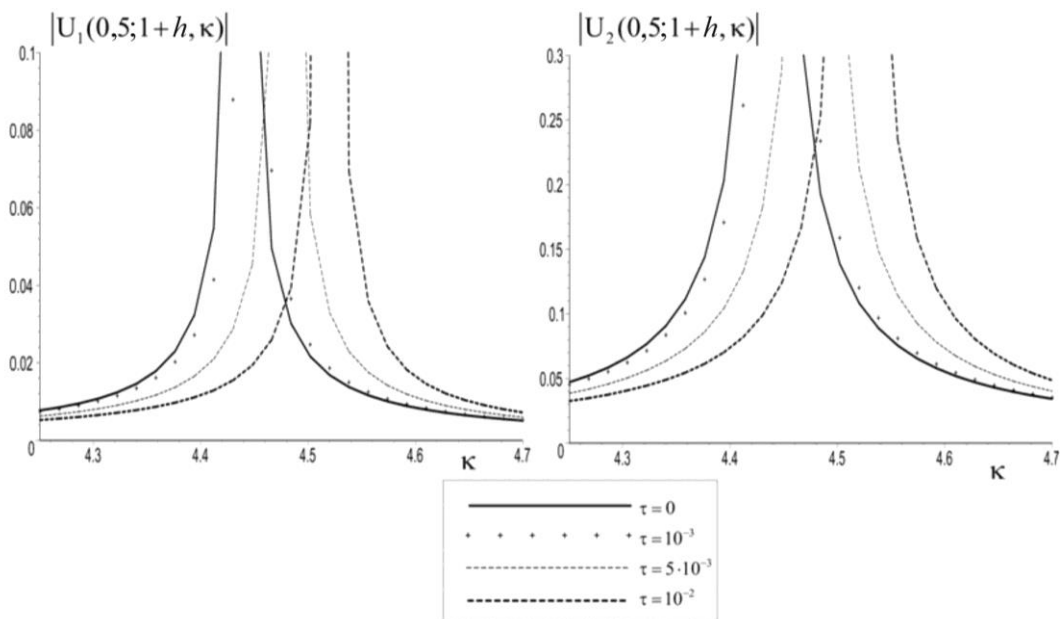


Рис. 8. Графики модуля АЧХ на верхней границе полосы для различных уровней предварительных напряжений

Fig. 8. Graphs of the frequency response of at the upper edge of the strip for different prestress levels

В данном примере заметим, что чем выше уровень сжимающих ПН в покрытии, тем меньше амплитуда функций раскрытия и смещения. При этом зависимость от уровня ПН, ввиду его малости относительно других характеристик, значительно меньше, чем в предыдущих экспериментах для других величин.

**Набор экспериментов 4 (анализ влияния уровня ПН на АЧХ).** Исследована зависимость модулей АЧХ, измеренных на верхней грани полосы от уровня ( $\tau = 0, 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}$ ) поля ПН в покрытии при  $x = 0,5$  в окрестности частоты первого толщинного резонанса. Графики АЧХ  $|U_i(0,5;1+h, \kappa)|$  для различных уровней ПН приведены на рис. 8.

Также отметим, что при увеличении уровня сжимающих ПН в покрытии значения частот толщинных резонансов сдвигаются вправо.

## Заключение

Проведенный анализ влияния механических и геометрических параметров покрытия, в частности уровня

## Библиографический список

1. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials // *Materials Science and Engineering: A*. – 2003. – Vol. 362. – P. 81–106.
2. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация: монография. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2015. – 206 с.
3. Schajer G.S. *Practical Residual Stress Measurement Methods*. – Wiley, 2013. – 560 p.
4. Application of the acoustic emission technique to studying the damage accumulation in a functional ceramic coating / E.M. Zubova, D.S. Lobanov, E.M. Strungar, V.E. Wildemann, Y.B. Lyamin // *PNRPU Mechanics Bulletin*, – 2019. – No. 1. – P. 38–48. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.04
5. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Surface SH-Waves in Pre-Stressed Piezoelectrics with Functionally Graded Coating // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2016. – No 3. – P. 7–27. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.01
6. Tiraturyan A.N., Uglova E.V., Lyapin A.A. Studying the energy distribution of the dynamic influences of road transport on the layers of nonrigid pavements. // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2017. – No. 2. – P. 178–194. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.10
7. Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V. Identification of the inhomogeneous cylindrical waveguide properties // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2018. – No. 4. – P. 33–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.03
8. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Engineering Failure Analysis*. – 2015. – Vol. 47B. – P. 338–344.
9. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2015. – № 4. – С. 226–245.
10. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери

предварительных напряжений, на функции раскрытия отслоения и функции смещения и АЧХ на верхней грани полосы показывает, что изменение данных характеристик может служить диагностическим фактором для решения обратных задач идентификации уровня предварительных напряжений, вызвавших отслоение. Также стоит отметить, что наибольшее влияние на АЧХ наблюдается в окрестности частот толщинных резонансов, соответственно, данные частотные диапазоны являются наиболее благоприятными для построения схем идентификации характеристик отслоения, основанных на анализе акустического отклика.

## Благодарность

Работа выполнена при поддержке РФФ (код проекта 18-11-00069).

## Acknowledgements

This work was supported by the Russian Science Foundation (Project code 18-11-00069).

устойчивости отслоившегося покрытия // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 48–57.

11. Устинов К.Б. О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. – 2011. – № 4, ч. 5. – С. 2541–2542.

12. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // *Известия РАН. МТТ*. – 2012. – № 4. – С. 50–62.

13. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б. Об учете ван-дер-ваальсового взаимодействия в некоторых задачах теории упругости // *Изв. РАН. МТТ*. – 2014. – № 1. – С. 87–94.

14. Vatulyan A., Nedin R., Dudarev V. Modelling and analysis of prestress field in a thin plate with a nonuniform coating // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203*. – 2019. – 012027. DOI:10.1088/1742-6596/1203/1/012027

15. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks / S. Faulhaber, C. Mercer, M.-Y. Moon, J.W. Hutchinson, A.G. Evans // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2006. – Vol. 54. – P. 1004–1028.

16. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials // *Advances in Applied Mechanics*. – 1992. – Vol. 29. – P. 63–191.

17. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // *Int. J. Fract.* – 2002. – Vol. 113. – P. 39–55.

18. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2001. – Vol. 50. – P. 1847–1864.

19. He M.Y., Hutchinson J.W., Evans A.G. A stretch/bend method for in situ measurement of the delamination toughness of coatings and films attached to substrates // *J. Appl. Mech.* – 2011. – Vol. 78(1). – P. 011009-1-011009-5.

20. Vanimisetty Sampath K., Narasimhan R. A numerical analysis of spherical indentation response of thin hard films on soft substrates // *Int. J. Solid & Struct.* – 2006. – Vol. 43. – P. 6180–6193.

21. Guler M.A., Erdogan F. Contact mechanics of graded coatings // *Int. J. Solid & Struct.* – 2004. – Vol. 41. – P. 3865–3889.

22. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch / S.S. Volkov, A.S. Vasiliev, S.M. Aizikovich, N.M. Seleznev, A.V. Leontieva // *PNRPU Mechanics Bulletin.* – 2016. – No. 4. – P. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02

23. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K., Poddubny A.A. On some models of indentation for functionally-graded coatings // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* – 2018. – Vol. 18, iss. 4. – P. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>

24. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. – М.: Физматлит, 2019. – 272 с.

25. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // *Engineering Structures.* – 2017. – Vol. 151. – P. 391–405.

26. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972. – 417 p.

## References

1. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 2003, vol. 362, pp. 81-106.

2. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D., Predvaritel'nye napriazheniia: modelirovanie i identifikatsiia. Monografiia [Prestresses: modeling and identification. Monograph]. *Rostov-on-Don: Publishing House of SFU*, 2015, 206 p.

3. Schajer G.S. Practical Residual Stress Measurement Methods. *Wiley*, 2013, 560 p.

4. Zubova E.M., Lobanov D.S., Strungar E.M., Wildemann V.E., Lyamin Y.B. Application of the acoustic emission technique to studying the damage accumulation in a functional ceramic coating. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 1, pp. 38-48. DOI:10.15593/perm.mech/2019.1.04

5. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Surface SH-Waves in Pre-Stressed Piezoelectrics with Functionally Graded Coating. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no 3, pp. 7-27. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.01

6. Tiraturyan A.N., Uglova E.V., Lyapin A.A. Studying the energy distribution of the dynamic influences of road transport on the layers of nonrigid pavements. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no 2, pp. 178-194. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.10

7. Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V. Identification of the inhomogeneous cylindrical waveguide properties. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no 4, pp. 33-46. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.03

8. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings. *Engineering Failure Analysis*. 2015, vol. 47B, pp.338-344.

9. Ustinov K.B. O rassloenii polosy po granitse razdela uprugikh svoistv. Chast' 1. Postanovka zadachi, sluchai normal'nogo otryva [On stratification of a strip along the interface of elastic properties. Part 1. Statement of the problem, the case of normal separation]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no 4, pp. 226-245. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.03.

27. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body // *Journal of Elasticity.* – 1986. – Vol. 16. – P. 303–324.

28. Robertson R.L., Determining residual stress from boundary. Measurements: A linearized approach // *Journal of Elasticity.* – 1998. – Vol. 52. – P. 63–73.

29. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Физматлит, 1984. – 544 с.

30. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.

31. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.: ИЛ, 1955. – 668 с.

32. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 519 с.

33. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 520 с.

34. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 256 с.

35. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 288 с.

10. Gol'dshtein R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Otsenka vliianiia podatlivosti podlozhki na napriazheniia poteri ustoiichivosti otsloivshegosia pokrytiia [Influence of substrate compliance on stresses generating stability loss of a delaminated coating]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 4, no 3, pp. 48-57.

11. Ustinov K.B. O vlianii poverkhnostnykh ostatochnykh napriazhenii i poverkh-nostnoi uprugosti na deformirovanie sharoobraznykh vklucheniin nanometrovykh razmerov v uprugoi matritse [On the effect of surface residual stresses and surface elasticity on the deformation of spherical inclusions of nanometer sizes in an elastic matrix]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo*. 2011, no 4(5), pp. 2541-2542.

12. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (Plane Strain). *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 415-425.

13. Goldstein R.V., Ustinov K.B. Taking into account van der Waals interaction in some problems of elasticity. *Mechanics of Solids*. 2014. vol. 49. no 1. pp. 67-72.

14. Vatulyan A., Nedin R., Dudarev V. Modelling and analysis of prestress field in a thin plate with a nonuniform coating. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203*, 2019, 012027; DOI:10.1088/1742-6596/1203/1/012027

15. Faulhaber S., Mercer C. Moon M.-Y., Hutchinson J.W., Evans A.G. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 2006, vol. 54, pp. 1004-1028.

16. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials. *Advances in Applied Mechanics*, 1992, vol.29, pp. 63-191.

17. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.*, 2002, vol. 113, P. 39-55.

18. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, vol. 50, pp. 1847-1864.

19. He M.Y., Hutchinson J.W., Evans A.G. A stretch/bend method for in situ measurement of the delamination toughness of coatings and films attached to substrates. *J. Appl. Mech.*, 2011. Vol. 78(1), pp. 011009-1-011009-5.
20. Vanimisetty Sampath K., Narasimhan R. A numerical analysis of spherical indentation response of thin hard films on soft substrates. *Int. J. Solid & Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 6180-6193.
21. Guler M.A., Erdogan F. Contact mechanics of graded coatings. *Int. J. Solid & Struct.*, 2004, vol. 41, pp. 3865-3889
22. Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Leontieva A.V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no 4, pp. 20-34. DOI : 10.15593/perm.mech/2016.4.02
23. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K., Poddubny A.A. On Some Models of Indentation for Functionally-Graded Coatings. // *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 421-432. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432.
24. Vatulyan A.O. Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki. [Coefficient inverse problems of mechanics]. *Moscow, Fizmatlit Publ.*, 2019. 272 p.
25. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. *Engineering Structures*, 2017, vol. 151, pp. 391-405.
26. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics, Baltimore. *Maryland, The John Hopkins University*, 1972, 417 p.
27. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body. *Journal of Elasticity*, 1986, vol. 16, pp. 303-324.
28. Robertson R.L., Determining residual stress from boundary. Measurements: A linearized approach. *Journal of Elasticity*, 1998, vol. 52, pp. 63-73.
29. Zorich V. A. Matematicheskii analiz [Mathematical analysis]. *Moscow, Fizmatlit*, 1984, 544 p.
30. Kalitkin N.N. Chislennyye metody [Numerical methods]. *Moscow, Nauka*, 1978, 512 p.
31. Sneddon I. Preobrazovanie Fur'e [Fourier Transform]. *Moscow, IL*, 1955, 668 p.
32. Lifanov I.K. Metod singuliarnykh integral'nykh uravnenii i chislennyi eksperiment v matematicheskoi fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln [The method of singular integral equations and a numerical experiment in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and diffraction of waves]. *Moscow, TOO "Ianus"*, 1995, 519 p.
33. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriiu obobshchennykh funktsii s prilozheniiami v tekhnike [Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriiu obobshchennykh funktsii s prilozheniiami v tekhnike]. *Moscow, Mir*, 1978, 520 p.
34. Belotserkovskii S.M., Lifanov I.K. Chislennyye metody v singuliarnykh integral'nykh uravneniiakh [Numerical methods in singular integral equations]. *Moscow, Nauka*, 1985, 256 p.
35. Gabdulkaev B.G. Priamye metody resheniia singuliarnykh integral'nykh uravnenii pervogo roda [Direct methods for solving singular integral equations of the first kind]. *Kazan, Kazan Publishing House. University*, 1994, 288p.