



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.02

УДК 539.3, 544.65

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА ТОНКОЙ ПОДЛОЖКИ ПРИ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОМ ОСАЖДЕНИИ

Д.К. Бут¹, П.С. Бычков², С.А. Лычев^{1,2}

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 13 апреля 2019 г.
Принята: 17 февраля 2020 г.
Опубликована: 30 марта 2020 г.

Ключевые слова:

электролитическое осаждение, тонкая подложка, остаточные напряжения, искажение формы, упругость, несовместные локальные деформации, экспериментальная идентификация.

АННОТАЦИЯ

В работе развиваются теоретические и экспериментальные методы исследования искажений тонких подложек при электролитическом осаждении и накопления в них остаточных напряжений. Теоретические модели построены в рамках теории тел переменного материального состава. Тела, образованные в результате процесса осаждения, моделируются непрерывным семейством упругих тел, в которых, в силу процесса, возникают несовместные локальные деформации. Эти деформации являются внутренним источником напряжений и с формальной точки зрения эквивалентны полям распределенных дефектов. В отличие от классических постановок задач теории упругости, элементы семейства, представляющего тело переменного материального состава, не обладают глобальной натуральной (свободной от напряжений) формой. Вместо нее используется непрерывное семейство форм, свободных от напряжений лишь локально. Для математической формулировки задачи вводятся непрерывные семейства отсчетных, промежуточных, актуальных форм и соответствующие им семейства деформаций, локально представляющих импланты (локальные деформации элементов семейства отсчетных форм в промежуточные формы), и деформации, отображающие промежуточные формы в актуальные. Получены соотношения для напряжений и деформаций в телах переменного материального состава в предположении, что деформации малы, а перемещения удовлетворяют кинематическим гипотезам технической теории пластин. Сформулированы уравнения равновесия, включающие специфические члены, которые определяют «фиктивную» нагрузку, вызванную несовместностью локальных деформаций. Построены в аналитической форме решения соответствующих осесимметричных краевых задач для круглой в плане подложки при различных условиях закрепления и натяжения на опорном контуре, отражающие условия проведения эксперимента. С их помощью сформулированы теоретические распределения смещений поверхности подложки, предназначенные для идентификации несовместных деформаций, вызывающих ее изгиб в процессе осаждения.

Экспериментальная измерительная установка построена по типу голографической схемы измерений поля перемещений в реальном времени. Процесс осаждения осуществлялся в цилиндрической камере при фланцевом закреплении катода. Электрохимический процесс реализовывался в серноокислом электролите. В результате сопоставления теоретических поверхностей прогиба с экспериментально определенными поверхностями найдены параметры, характеризующие усадку и натяжение подложки.

© ПНИПУ

© Бут Дмитрий Константинович – студент, e-mail: dmitry.but96@gmail.com, iD: [0000-0001-8390-7684](https://orcid.org/0000-0001-8390-7684).

Бычков Павел Сергеевич – м.н.с., e-mail: bychkov@ipmnet.ru, iD: [0000-0003-2251-1699](https://orcid.org/0000-0003-2251-1699).

Лычев Сергей Александрович – д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: lychevs@mail.ru, iD: [0000-0001-7590-1389](https://orcid.org/0000-0001-7590-1389).

Dmitriy K. But – Student, e-mail: dmitry.but96@gmail.com, iD: [0000-0001-8390-7684](https://orcid.org/0000-0001-8390-7684).

Pavel S. Bychkov – Junior Researcher, e-mail: bychkov@ipmnet.ru, iD: [0000-0003-2251-1699](https://orcid.org/0000-0003-2251-1699).

Sergey A. Lychev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: lychevs@mail.ru, iD: [0000-0001-7590-1389](https://orcid.org/0000-0001-7590-1389).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF THE BENDING OF A THIN SUBSTRATE DURING ELECTROLYTIC DEPOSITION

D.K. Bout¹, P.S. Bychkov², S.A. Lychev^{1,2}

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 13 April 2019
Accepted: 17 February 2020
Published: 30 March 2020

Keywords:

electrolytic deposition, thin substrate, residual stresses, distortion of shape, elasticity, incompatible deformations, experimental identification.

ABSTRACT

The present paper is aimed at the theoretical and experimental study of the shape distortion of thin substrates during electrolytic deposition and accumulation of residual stresses in them. The theoretical modeling is provided in the framework of the theory of solids with variable material composition. The result of the deposition process is modeled with a continuous family of elastic bodies, which local deformations are incompatible. These deformations act as internal sources for stresses. Formally they are equivalent to the field of distributed defects. Unlike the classical approach adopted in nonlinear elasticity, the elements of the family which present a body with a variable material composition don't have a global reference natural (free of stresses) form. Instead we used the continuous family being only locally free from stresses. To formulate the boundary value problem, continuous families of reference, intermediate and actual forms and corresponding families of deformations are defined. The deformations, belonging to these families, locally represent implants (local deformations of reference forms into intermediate ones) and deformations that bring intermediate forms into actual ones. Relations for stresses and strains in such bodies are obtained under the assumption that the displacement gradients are small with respect to unity and satisfy the kinematic hypothesis of the technical plate theory. Under these assumptions the equilibrium equations are derived. They include specific terms which determine formal loading that is caused by incompatible deformations. Axisymmetric problems for a circular substrate under various types of fixing and tension on the boundary, which characterize the conditions of the experiment, are obtained. The theoretical distribution for displacements of the substrate surface is formulated upon the obtained solution. They are intended to identify incompatible deformations that cause bending during the deposition process.

The experimental measuring setup is constructed according to a holographic scheme of displacement measurements in real time. The deposition process is carried out in a cylindrical chamber with flange fastening of the cathode. The electrochemical process is implemented in sulphate electrolyte. As a result of comparing the theoretically obtained relations for bending surfaces of the substrate with the experimental results, the parameters that characterize the substrate shrinkage and tension are estimated.

© PNRPU

Введение

В настоящее время широко используются аддитивные технологии создания многослойных структур, слои которых последовательно создаются напылением, электрохимическим осаждением, наплавкой [1, 2] и пр. Поскольку реализация подобных процессов вызывает тепловое расширение или усадочную деформацию каждого слоя в отдельности, в целом многослойная структура оказывается самонапряженной, а ее геометрическая форма – искаженной. Как правило, остаточные напряжения считаются нежелательными факторами, и при разработке технологий стараются выбирать такие режимы, при которых они оказываются наименьшими. Формально это приводит к задачам оптимизации и оптимального управления процессом [3, 4]. Однако для осуществления практических расчетов требуется знать физико-механические параметры процессов, в частности, параметры усадочных деформаций и параметры, характеризующие реакцию тонкой подложки на усадку присоединенного слоя. Настоящая работа посвящена развитию экспериментальной методики определения этих параметров.

Минимизацию искажений и остаточных напряжений в последовательно создаваемой многослойной структуре можно рассматривать как частную проблему общей теории анализа и оптимизации структуры аддитивно создаваемых тел [5–8]. Близкими к ней являются задачи моделирования лазерного спекания и наплавки, стереолитографии и пр. Эти проблемы широко обсуждаются в современных монографиях и периодической печати [9–13]. Особенность подобных структур состоит в несовместности локальных деформаций, и для их описания удобно использовать геометрические методы механики континуума, основанные на неевклидовом представлении отсчетной ненапряженной формы [6, 14–18]. В этой связи математические модели аддитивно создаваемых тел близки к моделям сред с непрерывно распределенными дефектами [14, 19–21]. В рамках настоящей работы предполагается, что моделирование искажений многослойной структуры и возникающих в ней остаточных напряжений производится методами, развитыми в [5, 6, 22–29].

Методы экспериментальной верификации и идентификации аддитивно создаваемых тел интенсивно развиваются в течение нескольких последних десятилетий.

К пионерским работам следует отнести исследования сотрудников компании 3D Systems Corp., в которых был развит экспериментальный метод оценки искажений тела в форме буквы Н, создаваемого 3D-печатью [30]. В значительном числе работ развивались эмпирические приемы уменьшения искажений, адаптированные к конкретным формам тел [31]. Следует отметить, что подобные экспериментальные подходы приводят к успешному результату лишь для тел простой геометрической формы, и для каждой такой формы их следует производить заново.

Экспериментальная методика, развиваемая в настоящей работе, использует методы голографической интерферометрии в реальном времени, которые позволяют наблюдать эволюцию изгиба подложки в ходе всего процесса создания структуры на ней. Голографическая интерферометрия широко используется в экспериментальных исследованиях механики и физики деформируемого твердого тела [32, 33]. Известны различные варианты построения схем эксперимента и анализа результатов [34]. В работе используется метод нулевой полосы [35], который позволяет наблюдать (и фиксировать на CCD-камеру) изменение во времени поля нормальных смещений подложки при создании на ней многослойной структуры с разрешением порядка $\frac{1}{2}\lambda$, где λ – длина волны когерентного излучения ($\lambda = 532$ нм).

Теоретическая модель

Вначале приведем эвристические соображения, подсказывающие причину изгиба подложки при электрохимическом осаждении металла на нее. Допустим, что металл осаждается на части лицевой поверхности подложки, создавая на ней растущий во времени слой. В силу особенностей электрохимического процесса в осажденном металле развиваются неупругие объемные деформации, а поскольку слой упруго соединен с подложкой, то эти деформации оказываются стесненными. На них накладываются упругие деформации, вызывающие внутренние (остаточные) напряжения и изгиб упругой системы «подложка – слой».

Схематическое изображение эвристической схемы присоединения тонкого слоя приведено на рис. 1. Полагается, что перед присоединением слоя подложка была не искажена и в ней отсутствовали напряжения (рис. 1, а). В результате осаждения в слое развиваются однородные объемные деформации, которые могут быть компенсированы упругой объемной деформацией обратного знака, если обеспечить соответствующие усилия на границе осаждения¹ (рис. 1, б). В этом случае в осажденном слое возникнет однородное напряженное состояние, а подложка не испытает никакого деформирования. В реальности же компенсирующих сил на границе нет, и в этой связи вдоль всей границы осаждения возникают усилия, приложенные с эксцентриситетом относи-

тельно срединной поверхности подложки. Эти усилия создают распределенный по границам зоны осаждения момент M , изгибающий подложку (рис. 1, в).

Замечание 1. Если предположить, что подобные элементарные слои создаются последовательно, то подложка оказывается под действием последовательных нагружений распределенными моментами. Вместе с тем рассматривать подобный ступенчатый процесс при большом числе ступеней в вычислительном плане крайне трудоемко. Кроме того, если технология изначально не подразумевает ступенчатого характера², то более естественной является модель непрерывной структуры. В этом случае идея «элементарного слоя» становится, в некотором смысле, «опорой мысли», а математическая модель может быть построена сразу для непрерывного процесса. Детали подобного моделирования приведены в [4, 6]. В приложении к рассматриваемой задаче этот подход приводит к модели тонкой подложки, толщина области осаждения которой непрерывно увеличивается. При этом в присоединенном материале возникают несовместные локальные деформации, характеризующие преобразование бесконечно малого элемента тела из ненапряженного состояния в актуальное, в предположении, что это преобразование может быть произведено независимо от остальных элементов, составляющих тело. Все тело в целом преобразовать в ненапряженное состояние, оставаясь при этом в евклидовом пространстве, невозможно, однако такое преобразование оказывается возможным в более общем пространстве с некоторой специальной – материальной связностью [6, 14, 20]. При рассмотрении процесса «обобщенного деформирования» всего тела из неевклидова пространства удастся сформулировать и решить задачу в терминах функций, определенных на связном множестве, едином для всей системы в целом [6]. Поскольку осаждение производится на тонкую подложку, моделирование сводится к формализации уравнений и краевых условий для непрерывно растущей по толщине тонкостенной структуры, в которой в ходе роста возникают несовместные локальные деформации. Подобные модели, основанные на кинематических гипотезах Кирхгофа – Лява, предлагались в [29], а на гипотезах уточненной теории Миндлина – Рейснера – в [24].

Перейдем от эвристических соображений к более точным формулировкам. Для пояснения того, что понимается под несовместными локальными деформациями, воспользуемся концепцией континуального семейства отсчетных форм. Основные положения этой концепции приведены в [6]. Здесь лишь отметим, что вместо одной отсчетной ненапряженной формы, обычно используемой в классической теории упругости, будем использовать непрерывное семейство форм, такое, что для любого элементарного объ-

¹ С точностью до допущений, принимаемых в классической теории упругих пластин.

² Ступенчатость может возникать, например, за счет импульсного режима электроосаждения или послойной фотополимеризации.

ема найдется форма, в которой он окажется ненапряженным.

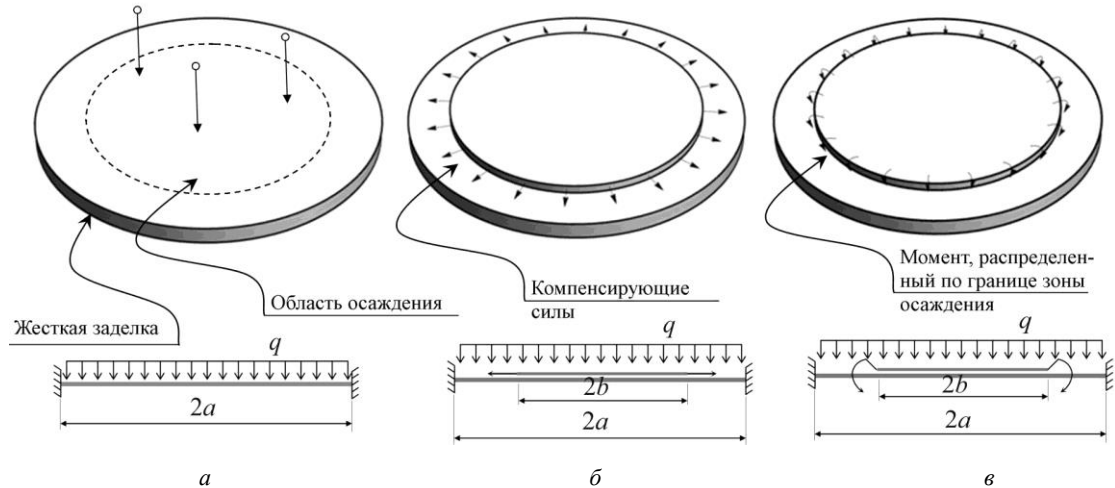


Рис. 1. Эвристическая расчетная схема подложки с присоединенным тонким слоем

Fig. 1. The heuristic bending design for a substrate with an attached thin layer

При этом классическому случаю единой ненапряженной отсчетной формы будет соответствовать семейство, состоящее из континуального множества ее копий. В общем случае семейство локальных отсчетных форм трехпараметрическое: каждой материальной точке, характеризуемой тремя координатами, ставится в соответствие локально не напряженная отсчетная форма. Однако для задач, исследуемых в настоящей работе, это семейство может быть сокращено до однопараметрического, если предположить, что в ненапряженное состояние может перейти бесконечно тонкий слой целиком. Далее будем полагать, что это предположение выполняется. Полная деформация определяется как композиция деформации из соответствующей отсчетной формы в промежуточную форму (импланта), которая в общем случае не свободна от напряжений, и деформации из промежуточной формы в актуальную. Взаимосвязь форм и соответствующих деформаций иллюстрирует рис. 2.

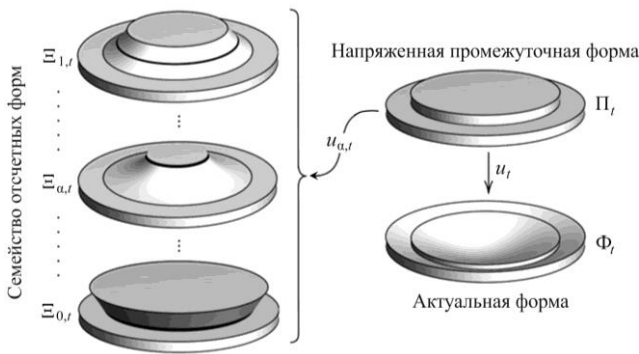


Рис. 2. Семейство отсчетных форм, промежуточные и актуальные формы

Fig. 2. The family of reference shapes, intermediate and current shapes

Дальнейшие построения будем производить в предположении о тонкостенности всей структуры. В этой

связи будем полагать, что поля перемещений $u_{\alpha,t}$, характеризующие деформирование промежуточной формы Π_t в отсчетную форму $\Xi_{\alpha,t}$, так же как и перемещения u_t , определяющие деформирование Π_t в актуальную форму Φ_t , удовлетворяют кинематическим гипотезам теории Кирхгофа – Лява:

$$\mathbf{u}_{\alpha,t} = \mathbf{a}_{\alpha,t} - z \nabla w_{\alpha,t}, \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{a}_t - z \nabla w_t, \quad (1)$$

где $\mathbf{a}_{\alpha,t}$ и \mathbf{a}_t – соответствующие перемещения в плоскости пластины Ω ; $w_{\alpha,t}$ и w_t – трансверсальные перемещения, характеризующие ее изгиб; $\nabla = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$; (x^1, x^2) – координаты на Ω ; z – координата, трансверсальная к Ω ; $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ – элементы локального взаимного базиса, порожденного координатами (x^1, x^2) . С учетом (1) тензоры малых деформаций могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha,t} &= \frac{1}{2} \left[\nabla \otimes \mathbf{a}_{\alpha,t} + (\nabla \otimes \mathbf{a}_{\alpha,t})^T - \mathbf{k} \otimes \nabla w_{\alpha,t} - (\nabla w_{\alpha,t}) \otimes \mathbf{k} \right] - \\ &\quad - z \nabla \otimes \nabla w_{\alpha,t}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t &= \frac{1}{2} \left[\nabla \otimes \mathbf{a}_t + (\nabla \otimes \mathbf{a}_t)^T - \mathbf{k} \otimes \nabla w_t - (\nabla w_t) \otimes \mathbf{k} \right] - \\ &\quad - z \nabla \otimes \nabla w_t. \end{aligned}$$

Если предположить, что деформирование промежуточной формы в отсчетную может быть осуществлено без изгиба, т.е. $w_{\alpha,t} \equiv 0$, то выражение для $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha,t}$ упрощается:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha,t} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{a}_{\alpha,t} + (\nabla \mathbf{a}_{\alpha,t})^T \right).$$

Далее будем считать, что это предположение выполняется. В приближении малых деформаций полные деформации определяются суммой

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (2)$$

Для линейно-упругого изотропного материала напряжения определяются законом состояния:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Itr}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где λ, μ – модули упругости Ламе; I – единичный тензор.

Подставляя в (3) выражение для полных деформаций (2), получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \mu \left[\nabla \otimes \mathbf{a}_t + (\nabla \otimes \mathbf{a}_t)^T - \mathbf{k} \otimes \nabla w_t - (\nabla w_t) \otimes \mathbf{k} - \right. \\ & \left. - z \nabla \otimes \nabla w_t + \nabla \otimes \mathbf{a}_{\alpha,t} + (\nabla \otimes \mathbf{a}_{\alpha,t})^T \right] + \\ & + \lambda \text{I} (\nabla \cdot \mathbf{a}_t - z \nabla^2 w + \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t}). \end{aligned}$$

Осреднение по толщине пластины и осадженного слоя приводит к следующим выражениям для мембранных усилий \mathbf{N} :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = & \int_{-h}^{h_+} \boldsymbol{\sigma} dz = 2\mu \left[(h_+ + h_-) \text{def } \mathbf{a}_t - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \otimes \nabla w_t \right] + \\ & + \lambda \text{I} \left[(h_+ + h_-) \nabla \cdot \mathbf{a}_t - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla^2 w_t \right] + \\ & + \int_{-h}^{h_+} (2\mu \text{def } \mathbf{a}_{\alpha,t} + \lambda \text{I} \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t}) dz \quad (4) \end{aligned}$$

и моментов \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \int_{-h}^{h_+} \boldsymbol{\sigma} z dz = -2\mu \left[\frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla \otimes \nabla w_t - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \otimes \mathbf{a}_t \right] - \\ & - \lambda \text{I} \left[\frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla^2 w_t - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{a}_t \right] + \\ & + \int_{-h}^{h_+} (2\mu \text{def } \mathbf{a}_{\alpha,t} + \lambda \text{I} \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t}) z dz. \quad (5) \end{aligned}$$

Полный тензор усилий может быть представлен разложением

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{k},$$

где \mathbf{Q} – поперечные силы, определяемые из условия равенства нулю главного момента:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & -(2\mu + \lambda) \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla \nabla^2 w_t + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \times \\ & \times \left[(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}_t + \mu \nabla^2 \mathbf{a}_t \right] + \\ & + \int_{-h}^{h_+} \left[(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t} + \mu \nabla^2 \mathbf{a}_{\alpha,t} \right] dz. \quad (6) \end{aligned}$$

Обозначим символом \mathbf{K} плотность объемных сил, а символом \mathbf{P} – соответствующую плотность поверх-

ностных сил, приложенных к пластине, $\mathbf{P} = \int_{-h}^{h_+} \mathbf{K} dz$.

Условие равенства нулю главного вектора всех сил, приложенных к элементарному объему,

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

с учетом (4)–(6) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & (h_+ + h_-) \left[(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}_t + \mu \nabla^2 \mathbf{a}_t \right] - \\ & - (\lambda + 2\mu) \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \nabla^2 w_t + \\ & + (\lambda + 2\mu) \left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_t - \frac{h_+^3 - h_-^3}{3} \nabla^2 \nabla^2 w_t \right] \mathbf{k} + \mathbf{P} + \\ & + \int_{-h}^{h_+} \left[(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t} + \mu \nabla^2 \mathbf{a}_{\alpha,t} \right] dz + \\ & + \mathbf{k} (\lambda + 2\mu) \int_{-h}^{h_+} \nabla^2 \nabla \mathbf{a}_{\alpha,t} z dz = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Проекция этого уравнения на плоскость Ω приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & (h_+ + h_-) \left[(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}_t + \mu \nabla^2 \mathbf{a}_t \right] - \\ & - (\lambda + 2\mu) \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \nabla^2 w_t + \\ & + \mathbf{P}_\Omega + \int_{-h}^{h_+} \left[(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t} + \mu \nabla^2 \mathbf{a}_{\alpha,t} \right] dz = \mathbf{0}. \quad (7) \end{aligned}$$

Проекция на базисный вектор $\mathbf{k} \perp \Omega$ дает еще одно уравнение:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_t - \frac{h_+^3 - h_-^3}{3} \nabla^2 \nabla^2 w_t \right] + \\ & + q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h}^{h_+} \nabla^2 \nabla \mathbf{a}_{\alpha,t} z dz = \mathbf{0}. \quad (8) \end{aligned}$$

Действуя на левую и правую части равенства (7) оператором градиента, выразив из результата лапласиан дивергенции векторного поля \mathbf{a}_t , т.е.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_t = & \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \nabla^2 w_t - \frac{\nabla \mathbf{P}_\Omega}{(\lambda + 2\mu)(h_+ + h_-)} - \\ & - \frac{1}{(h_+ + h_-)} \int_{-h}^{h_+} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t} dz, \end{aligned}$$

и подставив результат в (8), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \left(\frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \nabla^2 w_t - \frac{\nabla \mathbf{P}_\Omega}{(\lambda + 2\mu)(h_+ + h_-)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{(h_+ + h_-)} \int_{-h}^{h_+} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t} dz \right) + \right. \\ & \left. - \frac{h_+^3 - h_-^3}{3} \nabla^2 \nabla^2 w_t \right] + q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h}^{h_+} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha,t} z dz = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \frac{h_+ + h_-}{2} - \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} = \frac{(h_+ - h_-)^3}{12},$$

получим

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_i = q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h}^{h_+} \left[\left(z - \frac{h_+ - h_-}{2} \right) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha, i} \right] \times \\ \times dz - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \cdot \mathbf{K}_{\Omega}, \quad (9)$$

где

$$D = (\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{12}, \quad h = h_- + h_+$$

цилиндрическая жесткость пластины с осажженным слоем.

Замечание 2. Если поверхность осреднения выбрать так, что $h_- = h_+$, т.е. для каждого момента времени смещать ее в срединное положение, то уравнение (9) упрощается:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_i = q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h}^{h_+} z \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha, i} dz. \quad (10)$$

Второе слагаемое в правой части определяет влияние деформаций технологической усадки на изгиб. Пусть Ω_0 – часть плоскости пластины, которая соответствует области осаждения. Если предположить, что усадка во всей области однородна, т.е.

$$\nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha, i} = \begin{cases} \eta(\alpha, z), & (x^1, x^2) \in \Omega_0, \\ 0, & (x^1, x^2) \in \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases}$$

то уравнение (10) преобразуется к виду

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_i = q + \delta'(\partial \Omega_0) M(\alpha), \quad (11)$$

где $M(\alpha) = M(h_-(\alpha), h_+(\alpha))$ – интенсивность распределения момента вдоль контура $\partial \Omega_0$, $\delta'(\partial \Omega_0)$ – производная δ -функции.

При этих (наиболее простых) предположениях изгиб подложки может быть определен с точностью до $M(\alpha)$ из уравнения (11) и краевых условий, отвечающих условиям закрепления. Задавая для $M(\alpha)$ аппроксимирующую функцию, зависящую от конечного цикла параметров, получаем из решения соответствующей краевой задачи функцию прогиба, зависящую от того же набора параметров. Эти параметры подбираются таким образом, чтобы теоретическое распределение для w_i лучшим образом совпадало с экспериментально определенной поверхностью изгиба в течение всего процесса при $\alpha \in I$.

Сопоставляя теоретические и экспериментальные результаты, полученные для подложек различной тол-

щины, авторы пришли к следующему соображению. Для достаточно толстых подложек (отношение диаметра к толщине $\sim 1/100$) теоретические модели пластин адекватно описывали результаты измерений, однако при переходе к более тонким подложкам ($\sim 1/500$) наблюдалось качественное расхождение результатов. Причина состоит в том, что при уменьшении толщины существенную роль начинают играть усилия натяжения на опоре, добавляя мембранную составляющую в реакцию подложки. Однако, поскольку эти натяжения являются следствием изгиба закрепления подложки, оно заранее не известно и нелинейно зависит от изгиба. С известной степенью приближения они могут быть учтены моделью Фешпеля – фон Кармана [36]

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_i = q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h}^{h_+} \left[\left(z - \frac{h_+ - h_-}{2} \right) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha, i} \right] \times \\ \times dz - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \mathbf{K}_{\Omega} + h \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla w_i), \quad (12)$$

в рамках которой в правой части уравнения изгиба (9) присутствует дополнительное слагаемое $h \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla w_i)$. Оно характеризует влияние напряжений в плоскости пластины $\boldsymbol{\sigma}$, которые могут быть найдены из уравнений для плоского напряженного состояния. В общем случае одновременное определение $\boldsymbol{\sigma}$ и w_i приводит к необходимости решать довольно сложную нелинейную краевую задачу [36]. В рамках настоящей работы принимается упрощающее предположение об однородности поля $\boldsymbol{\sigma} = p \mathbf{I}$, $p = \text{const}$. В этом случае последний член в уравнении (12) становится равным $h p \nabla^2 w_i$, что вновь делает систему линейной и достаточно простой для аналитического решения. При этом полагается, что интенсивность напряжений p определяется усилиями на границе и является дополнительным функциональным параметром, учет которого позволяет добиться более полного соответствия теории и эксперимента (рис. 3).

Представление решений для круглой подложки

Рассмотрим круглую подложку радиусом a . Уравнения (12) могут быть записаны в форме

$$\nabla^2 \nabla^2 w = f + \kappa \nabla^2 w, \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \kappa = \frac{h p}{D}. \quad (13)$$

Здесь r, φ – полярные координаты, символ f обозначает всю совокупность неоднородных членов в уравнении (12), т.е.

$$f = \frac{1}{D} \left\{ q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h}^{h_+} \left[\left(z - \frac{h_+ - h_-}{2} \right) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a}_{\alpha, i} \right] dz - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \mathbf{P}_{\Omega} \right\}.$$

Изгибающие M_r , M_φ , крутящие $M_{r\varphi}$ моменты и перерезывающие силы Q_r , Q_φ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M_\varphi &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\ M_{r\varphi} &= (1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w, \quad Q_\varphi = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 w. \end{aligned}$$

При упругом (относительно поворотов нормальных элементов) закреплении пластины краевые условия на границе $r = a$ могут быть сформулированы в виде

$$w|_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r^2} + \left(\frac{\nu}{r} + \gamma \right) \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0. \quad (14)$$

Частному случаю жесткого закрепления соответствует предельное соотношение, в котором параметр γ неограниченно возрастает, и краевые условия для $r = a$ могут быть преобразованы к следующей форме:

$$w|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (15)$$

Вместе с условиями ограниченности прогибов в точке $r = 0$ уравнение (13) и условия (14) или (15) определяют постановку краевой задачи, характеризующей условия проведения эксперимента.

В рамках настоящей работы эксперименты производились с круглыми пластинами и круговыми областями осаднения, концентричными опорному контуру. В этой связи далее строятся решения для центрально-симметричных полей перемещений $w = w(r)$ и усилий $f = f(r)$. При этом уравнение (13) принимает вид

$$w^{(4)} + \frac{2}{r^3} w^{(3)} - \frac{\kappa r^2 + 1}{r^2} w^{(2)} + \frac{1 - \kappa r^2}{r^3} w' = f. \quad (16)$$

Вначале построим решения уравнения (16) при условиях жесткого закрепления (15) и отсутствия натяжения на контуре, т.е. при $\kappa = 0$. Фундаментальная система решений однородного уравнения, т.е. уравнения (16) при $f = 0$, хорошо известна:

$$w_0 = C_1 r^2 + C_2 r^2 \ln r + C_3 \ln r + C_4.$$

Решение для произвольной правой части f , удовлетворяющее условиям (15), может быть получено методом вариации произвольных постоянных и записано следующим образом:

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^r \left[(\xi^2 + r^2) \ln \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{(R^2 - r^2)(\xi^2 + a^2)}{2a^2} \right] \frac{\xi}{4} f(\xi) d\xi - \\ &- \int_r^a \left[(\xi^2 + r^2) \ln \left(\frac{a}{\xi} \right) - \frac{(R^2 - \xi^2)(r^2 + a^2)}{2a^2} \right] \frac{\xi}{4} f(\xi) d\xi. \quad (17) \end{aligned}$$

Частные случаи интеграла (17), w_2 , для равномерно распределенной ($f(r) = q = \text{const}$) и, w_3 , для линейно изменяющейся ($f(r) = q + gr$, $q = \text{const}$, $g = \text{const}$) нагрузок имеют вид

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2, \\ w_3 &= \frac{32g(2r^5 - 5r^2a^3 + 3a^5) + 225q(r^2 - a^2)^2}{14400D}. \quad (18) \end{aligned}$$

Выражения (18) определяют теоретическую кривую изгиба жестко закрепленной круглой подложки при «гидростатическом нагружении». Для нагружения той же подложки моментом M , равномерно распределенным по границе круговой области осаднения $r \leq b$, следует в (17) положить $f(\xi) = \delta'(r - b) \frac{M}{D}$. В результате получим

$$\begin{aligned} w_4 &= \frac{M}{4D} \left[\frac{(r^2 - a^2)(3b^2 + a^2)}{2a^2} - (3b^2 + r^2) \ln \left(\frac{r}{a} \right) + \right. \\ &\left. + \theta(b - r) \left((3b^2 + r^2) \ln \left(\frac{r}{b} \right) - 2(r^2 - b^2) \right) \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь $\theta(b - r) = \begin{cases} 0, & b - r < 0 \\ 1/2 & b - r = 0 \text{ — функция Хевисайда.} \\ 1 & b - r > 0 \end{cases}$

Перейдем к более сложной задаче $\kappa \neq 0$. Решения однородного уравнения (16) (при $f = 0$) могут быть записаны следующим образом:

$$w_0 = C_1 I_0(\sqrt{\kappa} r) + C_2 Y_0(-i\sqrt{\kappa} r) + C_3 \ln(r) + C_4. \quad (20)$$

Соответственно, частное решение неоднородного уравнения для произвольной правой части $f(r)$ имеет вид

$$\begin{aligned} w_* &= \frac{1}{2\kappa} \int_0^r \left[2 \ln \left(\frac{\xi}{r} \right) + \pi \left(Y_0(-i\sqrt{\kappa} \xi) I_0(\sqrt{\kappa} r) - \right. \right. \\ &\left. \left. - I_0(\sqrt{\kappa} r) Y_0(-i\sqrt{\kappa} \xi) \right) \right] \xi f(\xi) d\xi. \quad (21) \end{aligned}$$

Значение интеграла (21) для частных случаев $f(r)$ в сумме с решениями (20) однородного уравнения позволяет найти теоретические распределения для изгиба, отвечающие условиям проведения эксперимента. Реше-

ние для равномерно распределенной нагрузки (гидростатического нагружения) может быть представлено следующим соотношением:

$$w_4 = \frac{q}{D} \frac{\sqrt{\kappa}(a^2 - r^2)I_0(\sqrt{\kappa}a) + 2a \left[I_0(\sqrt{\kappa}r) - I_0(\sqrt{\kappa}a) \right]}{4\kappa^{3/2}I_1(\sqrt{\kappa}a)}. \quad (22)$$

Решение для нагружения моментом, равномерно распределенным по круговой границе области осадки $r \leq b$, имеет вид

$$w_5 = -\frac{M}{\kappa D} \left\{ I_0(\sqrt{\kappa}r) \left[\frac{2 - 2a\sqrt{\kappa}(I_0(\sqrt{\kappa}b) + b\sqrt{\kappa}I_1(\sqrt{\kappa}b))K_1(\sqrt{\kappa}a)}{a\sqrt{\kappa}I_1(\sqrt{\kappa}a)} + 2b\sqrt{\kappa}K_1(\sqrt{\kappa}b) - 2K_0(\sqrt{\kappa}b) \right] + \frac{\sqrt{\kappa}a \left(\ln\left(\frac{a}{b}\right) - 1 \right) I_1(\sqrt{\kappa}a) + \sqrt{\kappa}b I_1(\sqrt{\kappa}b) + I_0(\sqrt{\kappa}b) - I_0(\sqrt{\kappa}a)}{a\sqrt{\kappa}I_1(\sqrt{\kappa}a)} + 2\theta(r-b) \left[1 + \ln\left(\frac{b}{r}\right) + (K_0(\sqrt{\kappa}b) - \sqrt{\kappa}bK_1(\sqrt{\kappa}b))I_0(\sqrt{\kappa}r) - (I_0(\sqrt{\kappa}b) + \sqrt{\kappa}bI_1(\sqrt{\kappa}b))K_0(\sqrt{\kappa}r) \right] \right\}. \quad (23)$$

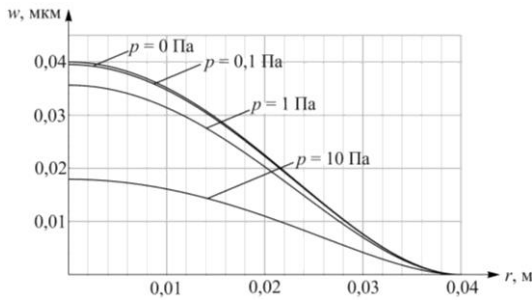


Рис. 3. Прогобы при различных напряжениях в плоскости при единичной поперечной нагрузке

Fig. 3. Deflections at various stresses in the plane at a unit lateral load

Таким образом, получены достаточно простые теоретические распределения (18), (19), (22), (23) для прогибов, приближенные к условиям проведения эксперимента. Выбор между ними определяется напряжениями в плоскости (натяжения) на распределение прогибов при значениях параметров, характеризующих условия проведения эксперимента. Зависимость прогибов от натяжения приведена на рис. 3. Вместе с тем при выводе теоретических распределений предполагалось, что: 1) толщина системы «подложка – осадочный слой» постоянна по пространственной координате, 2) деформации усадки одинаковы во внутренности области осадки и изменяются скачкообразно на ее границе, 3) условия закрепления подложки идеальны. В реальном эксперименте эти предположения, конечно, не выполняются. Первое из них нарушается, ввиду того что на границе осадки образуется ступенька и толщина скачкообразно изменяется. Второе предположение также не может быть выполнено точно, поскольку на границе области осадки возникает переходная зона

с некоторым непрерывным изменением полей стесненной деформации и соответствующих напряжений. Выполнение третьего предположения существенно зависит от качества реализации эксперимента. Вызванное этими факторами различие теоретических представлений и ожидаемых экспериментальных результатов может быть значительным либо несущественным – в зависимости от условий проведения эксперимента. В этой связи целесообразно вначале дать теоретическую оценку ожидаемого различия, а затем осуществить экспериментальную верификацию теоретических распределений на тестовых (калибровочных) испытаниях.

1. Теоретическая оценка влияния ступенчатого изменения толщины системы подложка – осадочный слой. Ступенчатую пластину представим как систему двух пластин – круглой (ей соответствует индекс 1) и кольцевой (индекс 2), сопряженных вдоль окружности $r = b$, на которой формулируются условия идеального контакта. Полагаем, что $\kappa = 0$ и $f \equiv 1$. Тогда уравнения равновесия могут быть записаны как система двух уравнений:

$$w_1^{(4)} + \frac{2}{r^3} w_1^{(3)} - \frac{1}{r^2} w_1^{(2)} + \frac{1}{r^3} w_1' = \frac{1}{D_1} \quad (0 < r < b),$$

$$w_2^{(4)} + \frac{2}{r^3} w_2^{(3)} - \frac{1}{r^2} w_2^{(2)} + \frac{1}{r^3} w_2' = \frac{1}{D_2} \quad (b < r < a),$$

которые вместе с краевыми условиями

$$w_1|_{r=b} = w_2|_{r=b}, \quad w_1'|_{r=b} = w_2'|_{r=b},$$

$$D_1 \left(w_1'' + \frac{\nu}{r} w_1' \right) \Big|_{r=b} = D_2 \left(w_2'' + \frac{\nu}{r} w_2' \right) \Big|_{r=b},$$

$$D_1 \left(w_1'' + \frac{1}{r} w_1' \right) \Big|_{r=b} = D_2 \left(w_2'' + \frac{1}{r} w_2' \right) \Big|_{r=b},$$

$$w|_{r=0} < \infty, \quad w|_{r=a} = 0, \quad w'|_{r=a} = 0$$

определяют постановку осесимметричной краевой задачи для ступенчатой круглой пластины. Решение этой задачи, w_s , может быть представлено в виде

$$w_s = \begin{cases} C_1 w_1 + C_2 w_2 + w_{*1}, & r < b, \\ C_3 w_1 + C_4 w_2 + C_5 w_3 + C_6 w_4 + w_{*2}, & b < r < a, \end{cases}$$

где $w_1 = r$, $w_2 = 1$, $w_3 = \ln r$, $w_4 = r^2 \ln r$; при $f = 1$

$w_{*1} = \frac{r^4}{64D_1}$, $w_{*2} = \frac{r^4}{64D_2}$. Постоянные C_1, \dots, C_6 определяются из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} a^2 & a^2 \ln a & \ln a & 1 & 0 & 0 \\ 2a & a + 2a \ln a & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ b^2 & b^2 \ln b & \ln b & 1 & -b^2 & -1 \\ 2b & b + 2b \ln b & \frac{1}{b} & 0 & -2b & 0 \\ -2D_1(\nu+1) & -D_1(2(\nu+1) \ln b + \nu+3) & \frac{D_1 - D_2 \nu}{b^2} & 0 & 2D_2(\nu+1) & 0 \\ 0 & -\frac{4D_1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{a^4}{64D_1} \\ -\frac{a^3}{16D_1} \\ -\frac{b^4}{64}\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) \\ -\frac{b^3}{16}\left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, приходим к следующему выражению:

$$w_s = \begin{cases} \frac{(a^2 - r^2)[a^4 A + a^2(F + r^2 B) - (2b^2 - r^2)F] + AC \ln \frac{r}{a}}{64D_1(a^2 A - F)}, & r > b, \\ \frac{1}{64D_2} \left[\frac{a^4 D_2}{d_1} - \frac{ACd_2 \ln \frac{a}{b}}{a^2 AFD_1 - FD_1} - \frac{D_2 r^2 C}{a^2 B + F} + \frac{b^4(D_1 - D_2)}{D_1} - 2b^2 r^2 + r^4 \right], & r \leq b, \end{cases}$$

$$A = D_1(v - 1) + D_2(v + 1), \quad B = D_1(1 - v) + D_2(1 + v), \\ C = 4a^2(a^2 - b^2), \quad F = b^2(v + 1)(D_1 - D_2).$$

Анализ решения показывает, что наибольшие значения прогибов, полученные для пластины с увеличенной толщиной центральной части, отличаются существенно, однако профиль кривой изгиба отличается мало. Это наблюдение приводит к идее учесть «ступенчатость» с помощью эффективной цилиндрической жесткости D_{eff} , определяемой из условия

$$w_s|_{r=0} = D_{eff} w_0|_{r=0},$$

где w_0 – прогиб пластины постоянной толщины с единичной цилиндрической жесткостью. Используя формулы, полученные выше, приходим к следующему выражению для D_{eff} :

$$D_{eff} = D_2 \frac{\frac{D_1 - 1}{D_2} - \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{D_1(v-1)}{D_2(v+1)} - 1 \right)}{4 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{D_2}{D_1} \right) \ln \frac{a}{b} + \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} \left(\frac{D_1}{D_2} - 1 \right) \right) \left(\frac{1-v}{v+1} + \frac{D_2}{D_1} + \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{D_2}{D_1} \right) \right)}. \quad (24)$$

Для оценки погрешностей, вызванных заменой модели ступенчатой пластины моделью пластины постоянной толщины, жесткость которой определяется по формуле (24), были произведены вычисления с физико-геометрическими параметрами, соответствующими условиям проведения эксперимента. Использовались следующие значения: $a = 40$ мм, $b = 25$ мм, $\nu = 0,3$, $E = 110$ ГПа, $h_1 = 0,5$ мм, $h_2 = 0,5 + \varepsilon$ (мм), $\varepsilon = 0, \dots, 0,5$ мм. Погрешность δ , в процентах, показана на рис. 4.

2. Оценка влияния ширины переходной зоны. Для оценки влияния ширины переходной зоны предполага-

ется использовать следующую аппроксимацию распределения усадки в ней:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \begin{cases} 1, & r < b \\ \frac{(b-r+\omega)^3 (3\omega(r-b) + 6(b-r)^2 + \omega^2)}{\omega^5}, & b \leq r \leq b+\omega \\ 0, & r > b+\omega \end{cases}. \quad (25)$$

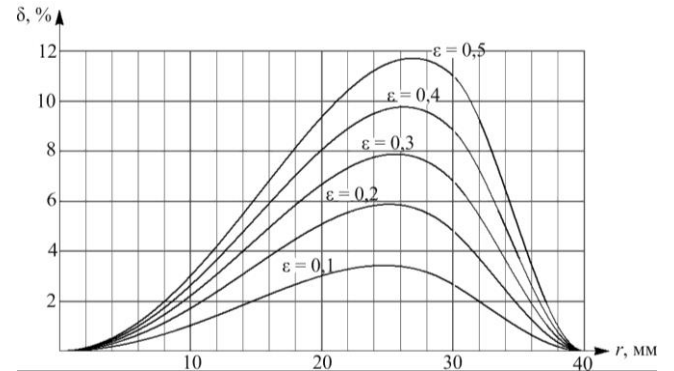


Рис. 4. График погрешности, возникающей при замене модели ступенчатой пластины моделью пластины постоянной толщины

Fig. 4. Graph of the error that occurs when replacing a step plate model with a constant thickness plate model

Эта зависимость при $\omega = 0$ стремится к единичной ступенчатой функции. Ее графическое представление при различных ω показано на рис. 5.

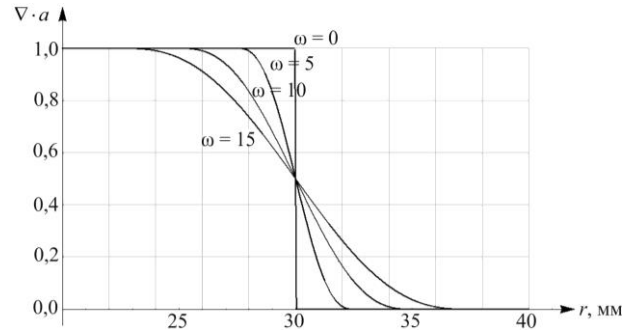


Рис. 5. К оценке влияния ширины переходной зоны

Fig. 5. To estimate the effect of the width of the transition zone

Подынтегральное выражение в правой части уравнения (9), которое и определяет внутренние источники напряжений, для зависимости (25) имеет вид

$$\nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a} = \begin{cases} 0, & r < b \\ -\frac{30(b-r)(b-r+\omega)(b^2 + b(\omega-6r) + r(5r-3\omega))}{r\omega^5}, & b \leq r \leq b+\omega \\ 0, & r > b+\omega \end{cases}. \quad (26)$$

Функция (26) характеризует осреднения внутренних напряжений, вызванных послойными несовместными деформациями в зоне осаждения, и при $\omega \rightarrow 0$ стремится к линейной комбинации δ -функции, $\delta(\partial\Omega_0)$, и ее производной, $\delta'(\partial\Omega_0)$. Графики этой функции для различных ω приведены на рис. 6. Решение неоднородной

краевой задачи, определяемой уравнением (16) при $\kappa=0$ и краевыми условиями (15), удается записать в аналитическом, хотя и громоздком, виде:

$$w = w_1 + \begin{cases} 0, & r < b \\ w_2, & b \leq r \leq b + \omega \\ w_3, & r > b + \omega \end{cases}$$

$$w_1 = -\frac{1}{5880 \omega^5} \left[420(b + \omega)^5 (2b^2 - 3b\omega + 2\omega^2) \ln\left(\frac{a}{b + \omega}\right) - 420b^5 (2b^2 + 7b\omega + 7\omega^2) \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \omega(840b^6 + 2520b^5\omega + 1750b^4\omega^2 - 700b^3\omega^3 + 413b^2\omega^4 + 1183b\omega^5 + 428\omega^6) \right] - \frac{r^2}{28a^2} [7(b^2 - a^2 + b\omega) + 2\omega^2],$$

$$w_2 = -\frac{1}{5880 \omega^5} \left[1338b^7 + 4263b^6\omega + 49b^5(77\omega^2 - 180r^2) + 2450b^4r^2(8r - 9\omega) - 2450b^3r^2(9r^2 - 16r\omega + 6\omega^2) + 49b^2r^3(288r^2 - 675r\omega + 400\omega^2) + 420b^5(2b^2 + 7b\omega + 7\omega^2) \ln\left(\frac{r}{b}\right) - 49br^4(100r^2 - 188r\omega + 225\omega^2) + 2r^5(360r^2 - 1225r\omega + 1176\omega^2) \right],$$

$$w_3 = \frac{1}{5880 \omega^5} \left[420(b + \omega)^5 (2b^2 - 3b\omega + 2\omega^2) \ln\left(\frac{r}{b + \omega}\right) - 420b^5 (2b^2 + 7b\omega + 7\omega^2) \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \omega(840b^6 + 2520b^5\omega + 1750b^4\omega^2 - 700b^3\omega^3 + 7\omega^4(269b^2 - 210r^2) + 2653b\omega^5 + 848\omega^6) \right].$$

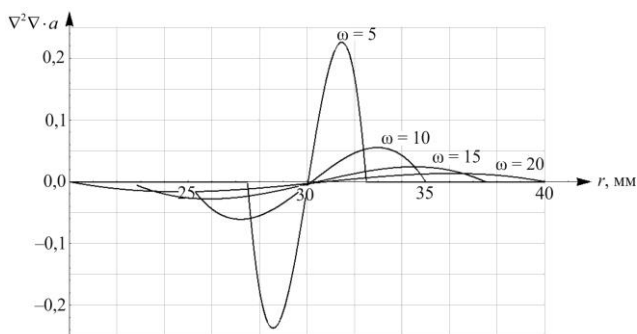


Рис. 6. Распределение для лапласиана усадочной деформации
Fig. 6. Distribution for laplacian of the shrinkage strain

Построенное решение позволяет оценить влияние ширины переходной зоны, определяемой параметром ω . Графики прогибов, вычисленные по этому решению для тех же значений физико-механических параметров, что и в предыдущих расчетах, и различных значений ω ,

приведены на рис. 7. Анализ результатов вычислений позволяет сделать вывод о достаточно слабой зависимости изгиба от ширины переходной зоны. В этой связи для идентификации экспериментальных данных предлагается использовать более простые зависимости, полученные для случая нагружения фиктивным моментом, распределенным по границе зоны осаждения³.

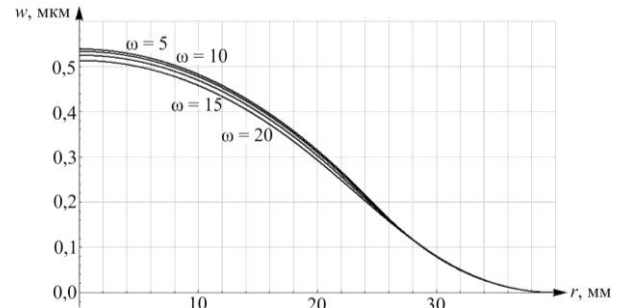


Рис. 7. Прогиб подложки для различной ширины переходной зоны

Fig. 7. The substrate deflection for different widths of the transition zone

3. Теоретическая оценка влияния неидеальных условий закрепления. Полагаем, что $\kappa=0$ и $f \equiv 1$. Решение уравнения (16), удовлетворяющее условиям для упругого закрепления (14), может быть получено методом вариации произвольных постоянных и записано следующим образом:

$$w = \frac{a^4}{64D} \left(\frac{4D}{a\gamma + D(\nu + 1)} + 1 \right) - \frac{a^2 r^2 (a\gamma + D(\nu + 3))}{32D(a\gamma + D(\nu + 1))} + \frac{r^4}{64D}.$$

Теоретические прогибы пластины при тех же физико-механических параметрах, что и в предыдущем расчете и при изменении значений параметра γ от 0 до 10^4 , приведены на рис. 8.

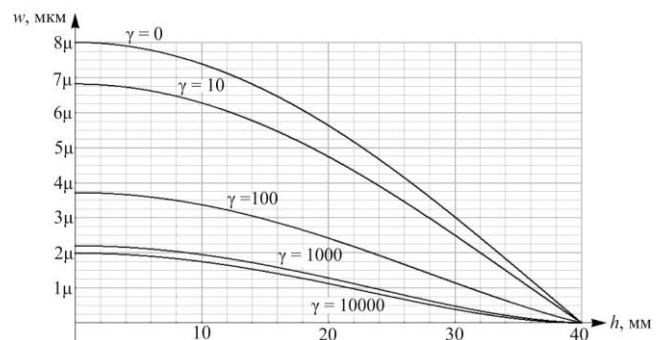


Рис. 8. Прогибы пластины при различных коэффициентах упругости заделки

Fig. 8. The deflections of plates for different coefficients of elastic fixing

³Строго говоря, следовало бы использовать линейную комбинацию силы и момента, распределенных вдоль границы зоны осаждения. Однако точность экспериментов, проводимых на настоящем этапе, не позволяет выделить по отдельности влияние этих двух слагаемых. В этой связи в рамках настоящей работы учитывается только моментная нагрузка.

Анализ распределений показывает, что максимальный прогиб изменяется в зависимости от γ почти на порядок, что говорит о необходимости экспериментальной верификации условий закрепления подложки.

Экспериментальная часть

Для валидации исследуемой модели и идентификации ее параметров разработана экспериментальная установка, позволяющая фиксировать изменение во времени изгиба подложки при создании на ней слоистой структуры. Схема установки приведена на рис. 9.

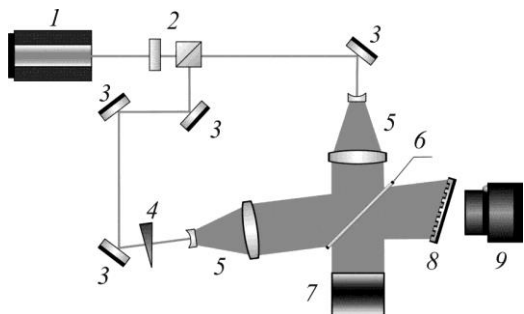


Рис. 9. Принципиальная схема оптической части экспериментальной установки

Fig. 9. The schematic diagram of the optical part of the experimental setup

Определение перемещений осуществляется методом Лейта – Упатниекса [32]. Когерентное монохроматическое излучение генерируется твердотельным лазером 1 (длина волны $\lambda = 532$ нм, длина когерентности 50 м) и разделяется на два пучка делителем 2 с регулируемым отношением интенсивностей выходящих пучков, далее оба пучка расширяются телескопическими системами 5. Первый, опорный, луч, отражаясь от зеркал 3 и проходя через переменный нейтральный фильтр 4, попадает на фотопластинку 8, а второй, предметный, отражаясь от зеркала 3, направляется под прямым углом на подложку, закрепленную в электрохимической камере 7. Отражаясь от подложки и полупрозрачного зеркала 6, предметный пучок направляется на фотопластинку. Интерференция двух пучков фиксируется на фотопластинке, превращая ее в дифракционную решетку. Она в опорном пучке воспроизводит волновой фронт, отраженный от недеформированной подложки. За фотопластинкой расположен фотоаппарат 9 с ПЗС-матрицей, фиксирующий этот фронт. На этом этапе на матрице фотоаппарата воспроизводится голограмма отсчетной формы. С фотоаппарата в режиме реального времени изображение передается на лабораторный компьютер, который записывает его в видеоформате. Затем инициализируется процесс электроосаждения на обратной стороне подложки и на видеозаписи фиксируется движение полос вторичной интерференции, характеризующих изолинии поверхности изгиба подложки. Область осаждения выделяется фоторезистивной маской, наносимой на подложку перед экспериментом. Осажде-

ние осуществляется в камере, имеющей форму цилиндра, одно из оснований которого образует тонкая подложка, закрепленная фланцевым соединением. Принципиальная схема электрохимической установки показана на рис. 10. Для электрохимического процесса создания слоистой структуры использовался сернокислый электролит (сульфат меди – 220 г/л, серная кислота – 50 г/л) [37]. В электрохимическом процессе устанавливалась плотность тока 2 А/Дм². Осаждение производилось при комнатной температуре без перемешивания. Использовались круглые медные подложки толщиной 300 мкм. Для обеспечения краевых условий, соответствующих жесткой заделке, подложки изготавливались из более толстых пластин катанной меди толщиной 500 мкм. Толщина исследуемой области радиусом 40 мм уменьшалась травлением до 300 мкм, а в кольцевой области, зажимаемой фланцевым соединением, толщина оставлялась неизменной. Круговая область осаждения радиусом 25 мм выделялась с помощью фоторезистивного покрытия.

Перед проведением основной серии экспериментов была осуществлена калибровка измерительной схемы. Для этой цели фиксировался изгиб подложки без осажденного слоя при изменении высоты уровня электролита в электрохимической ячейке («гидростатическое испытание»). Воспроизводилось три ступени нагружения с разностью высот столбов жидкости 5, 10 и 15 мм. Этим нагружениям, при плотности электролита 1,18 г/см³, соответствуют давления 57,5; 115 и 172,5 Па. Результаты испытаний приведены на рис. 11. В результате анализа распределений смещений вблизи опорного контура можно утверждать, что условия закрепления близки к жесткому защемлению. Также на рис. 11 показаны теоретические распределения изгиба, вычисленные по формуле (22), в которой натяжение определялось из условия наименьшего среднеквадратичного отклонения экспериментальных и теоретических значений. Среднее значение натяжения для этих нагружений $\bar{p} = 25$ МПа.

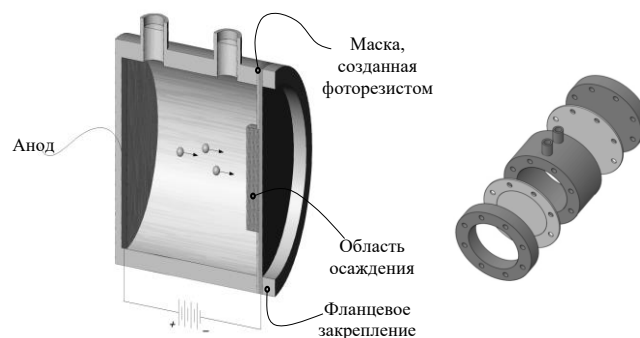


Рис. 10. Электрохимическая ячейка

Fig. 10. The electrochemical cell

В течение основного этапа эксперимента наблюдалось нарастание искажений подложки при электролитическом осаждении металла. Длительность процесса осаждения – 90 мин.

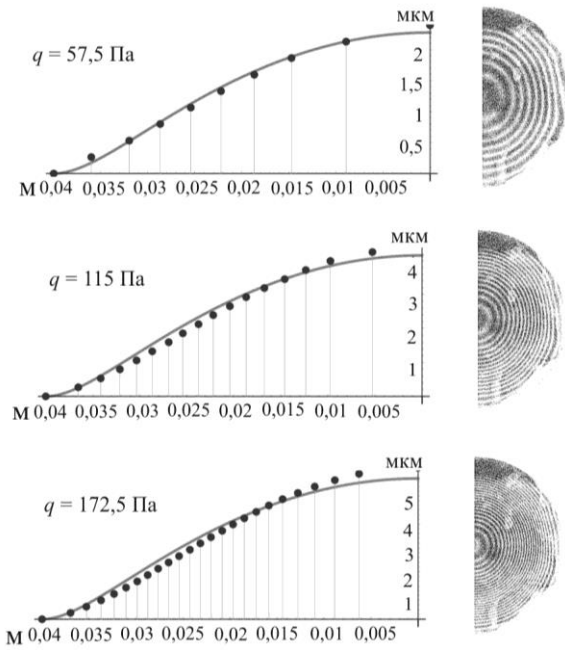


Рис. 11. Изгиб подложки под действием равномерно распределенной нагрузки

Fig. 11. Bending the substrate under the uniformly distributed load

За это время на подложке образовывался слой толщиной 20 мкм. Секторы голограмм, представляющих искажения подложки с интервалом 2 мин, показаны на

рис. 12, где светлым цветом выделены линии вторичной интерференции. По полученным экспериментальным данным и заданному натяжению (идентифицированным перед началом осаждения «гидростатическими испытаниями») определялась величина момента, распределенного по границе области осаждения из условия наименьшего среднеквадратичного отклонения экспериментальных данных и теоретических распределений (23) с учетом (24). Их сопоставление показано на рис. 13.

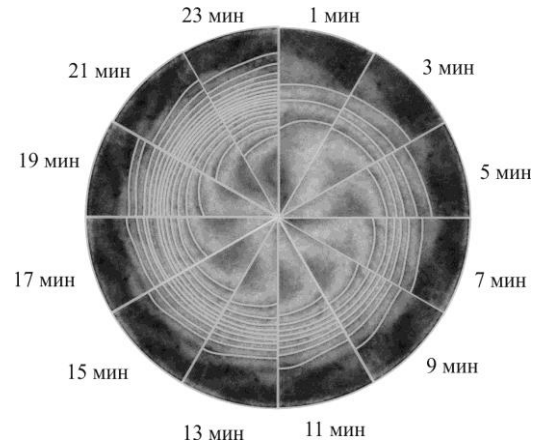


Рис. 12. Голограммы изгиба подложки в различные моменты электрохимического процесса

Fig. 12. Holograms of the substrate bending at various moments of the electrochemical process

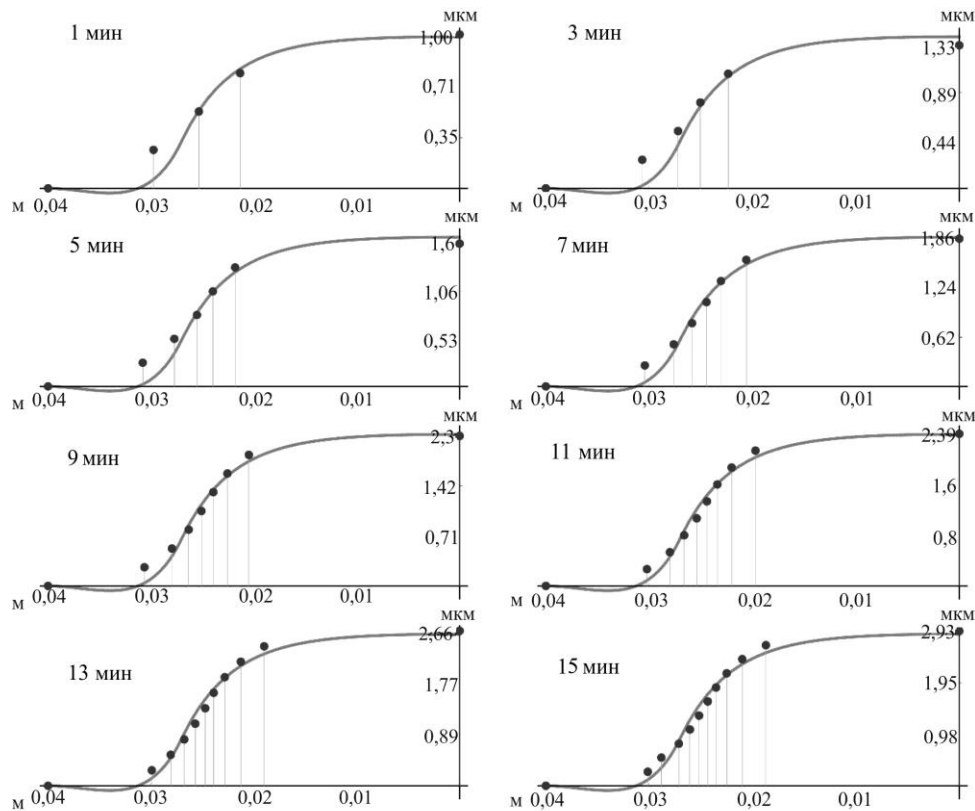


Рис. 13. Экспериментальные (точки) и теоретические (кривые) значения прогибов для различных моментов электрохимического процесса

Fig. 13. Experimental and theoretical values of deflections for various moments of the electrochemical process

Согласно (13) распределенному по границе осаждения моменту M можно поставить в соответствие напряжения в присоединенном слое. Их величины для произведенной серии измерений оказались близкими и в среднем составили 92 МПа. Распределение значений напряжений в зависимости от момента времени измерения показано на рис. 14. Отметим, что вычисленные значения напряжений мало отличаются друг от друга, что связано с относительно малой финальной толщиной присоединенного слоя. По этой причине полученные результаты следует использовать для оценки напряженно-деформированного состояния элементарного слоя, что соответствует одному шагу дискретной эволюционной задачи или уравнению в приращениях для непрерывной задачи [38, 5, 6].

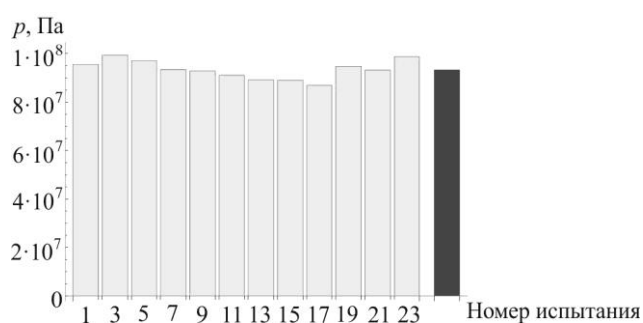


Рис. 14. Распределение напряжений в различные моменты процесса осаждения

Fig. 14. Stress distributions at various moments of the deposition process

Библиографический список

1. Kruth J., Leu M., Nakagawa T. Progress in additive manufacturing and rapid prototyping // CIRP Annals-Manufacturing Technology. – 1998. – Vol. 47, iss. 2. – P. 525–540.
2. Gibson, I., Rosen, D., Stucker, B., et al. Additive Manufacturing Technologies // Berlin: Springer. – 2015. DOI: 10.1007/978-1-4939-2113-3
3. Lychev S., Kostin G., Koifman K. Evolution of Stresses and Deformations in Hollow Cylinder with Variable Material Composition: Mathematical Modeling and Optimization // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, iss. 2. – P. 577–582. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.03.097
4. Modeling and Optimization of Layer-by-Layer Structures / S.A. Lychev, G.V. Kostin, K.G. Koifman, T.N. Lycheva // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – Vol. 1009. DOI: 10.1088/1742-6596/1009/1/012014
5. Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. – 2013. – Т. 77, № 4. – С. 585–604.
6. Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. – De Gruyter, 2019. DOI: 10.1515/9783110563214
7. Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of surface growth for cylindrical and spherical elastic bodies // J. Mech. Phys. Solids. – 2017. – Vol. 98. – P. 12–48

Выводы

Осуществлена разработка, валидация и идентификация параметров модели послойного роста пластины при электролитическом осаждении меди и стандартных электрохимических условиях процесса. Напряжения в осаждаемом слое оказались весьма значительными – порядка 92 МПа, что, конечно, существенно меньше предела пластичности меди (330 МПа), однако достаточно для значительного искажения тонкостенной структуры. Полученные данные можно использовать для моделирования распределений напряжений и искажений в нарастаемых металлических структурах значительно большей толщины, если расчет производить с учетом эволюции силовых деформационных полей, например, геометрической механики несовместных деформаций [6]. Экспериментальная методика может быть использована для оценки эффективности и поиска оптимальных режимов осаждения, например, с использованием импульсного тока или чередования режимов осаждения-релаксации.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-38-00235 мол_а, грант №18-08-01346).

Acknowledgements

The present work was partially supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract No. AAAA-A20-120011690132-4 and partially supported by RFBR Grant (№18-38-00235 мол_а and №18-08-01346).

8. Zurlo G., Truskinovsky L. Printing Non-Euclidean Solids // Phys. Rev. Lett. – 2017. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.048001
9. Hodge N.E., Ferencz R.M., Vignes R.M. Experimental comparison of residual stresses for a thermomechanical model for the simulation of selective laser melting // Additive Manufacturing. – 2016. – Vol. 12. – Part B. – P. 159–168. DOI: 10.1016/j.addma.2016.05.011
10. A multiscale modeling approach for fast prediction of part distortion in selective laser melting / C. Li, C.H. Fu, Y.B. Guo, F.Z. Fang // Journal of Materials Processing Technology. – 2016. – Vol. 229. – P. 703–712. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2015.10.022
11. Li C., Liu J.F., Guo Y.B. Prediction of Residual Stress and Part Distortion in Selective Laser Melting // Procedia CIRP. – 2016. – Vol. 45. – P. 171–174. DOI: 10.1016/j.procir.2016.02.058
12. Huang You-Min, Lan Hsiang-Yao. Compensation of distortion in the bottom exposure of stereolithography process // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2006. – Vol. 27, iss. 11–12. – P. 1101–1112. DOI: 10.1007/s00170-004-2313-2
13. Determining optimal parameters for stereolithography processes via genetic algorithm / H.S. Cho, W.S. Park, B.W. Choi, M.C. Leu // Journal of Manufacturing Systems. – 2000. – Vol. 19, iss. 1. – P. 18–27. DOI: 10.1016/S0278-6125(00)88887-1

14. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1967. – Vol. 27, no. 1. – P. 1–32.
15. Maugin G.A. *Material inhomogeneities in elasticity*. – CRC Press, 1993. – 292 p.
16. Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. – Courier Corporation, 1994. – 576 p.
17. Rakotomanana L. *A geometric approach to thermo-mechanics of dissipating continua* // *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Basel, 2004. DOI: 10.1007/978-0-8176-8132-6
18. Steinmann P. *Geometrical Foundations of Continuum Mechanics*. – Springer Berlin Heidelberg, 2015. – 517 p.
19. Кренер Э. *Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений*. – М.: Мир, 1965. 104 с.
20. Wang C.C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1967. – Vol. 27, iss. 1. – P. 33–94.
21. Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 2012. – Vol. 205, iss. 1. – P. 59–118. DOI: 10.1007/s00205-012-0500-0
22. Лычев С.А., Манжиров А.В. Отсчетные конфигурации растущих тел // *Изв. РАН. МТТ*. – 2013. – № 5. – С. 86–95.
23. Лычев С.А. Универсальные деформации растущих тел // *Изв. РАН. МТТ*. – 2011. – № 6. – С. 63–79.
24. S. Lychev. Equilibrium equations for transversely accreted shells // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2014. – Vol. 94 (1–2). – P. 118–129. DOI: 10.1002/zamm.201200231
25. Лычев С.А., Койфман К.Г. Геометрические аспекты теории несовместных деформаций простых структурно неоднородных тел переменного материального состава // *Дальневост. матем. журн.* – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 221–245.
26. Lychev S.A., Koifman K.G. *Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations* // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. – 2016. – Vol. 7, iss. 3. – P. 177–233. DOI: 10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10
27. Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for laminated inhomogeneous spherical shell // *Acta Mech.* – 2019. – Vol. 230. – P. 3989–4020. DOI: 10.1007/s00707-019-02399-7
28. Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // *Изв. РАН. МТТ*. – 2011. – № 2. – С. 199–208.
29. Manzhirrov A.V., Lychev S.A. On the Equilibrium of Accreted Plates, in *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics* / Eds A.V. Manzhirrov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. – Delhi: *Elit Publ. House Pvt Ltd.*, 2011. – P. 294–300.
30. Pang T.H., Guertin M.D., Nguyen H.D. Accuracy of Stereolithography Parts: Mechanism and Modes of Distortion for a "Letter-H" Diagnostic Part. *3D Systems Corp., Valencia, California*. – 1995. (Currently at Ciba-Geigy Corp., Los Angeles, California.)
31. Optimal offline compensation of shape shrinkage for three-dimensional printing processes / Qiang Huang, Jizhe Zhang, Arman Sabbaghi, Tirthankar Dasgupta // *IIE Transactions*. – 2015. – Vol. 47, iss. 5. – P. 431–441. DOI: 10.1080/0740817X.2014.955599
32. Вест Ч. *Голографическая интерферометрия*. – М.: Мир, 1982. – 540 с.
33. Malacara D., Servín M., Malacara Z. *Interferogram Analysis For Optical Testing* – CRC Press, 2005. – 568 p.
34. Briers J.D. The interpretation of holographic interferograms // *Opt Quant Electron* – 1976. – Vol. 8, iss. 6. – P. 469–501. DOI: 10.1007/BF00620139
35. Collins M.C., Watterson C.E. Surface-strain measurements on a hemispherical shell using holographic interferometry // *Experimental Mechanics*. – 1975. – Vol. 15, iss. 4. – P. 128–132. DOI: 10.1007/BF02318848
36. Ciarlet P. *Mathematical Elasticity Volume II: Theory of Plates*. – Elsevier Science B.V., 1997. – 497 p.
37. *Гальванотехника: справочник* / под ред. А.М. Гринберга, А.Ф. Иванова, Л.Л. Кравченко. – М.: *Металлургия*, 1987. – 736 с.
38. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. *Контактные задачи механики растущих тел*. – М.: *Наука*, 1991. – 176 с.

References

1. Kruth, J., Leu, M., Nakagawa, T. Progress in additive manufacturing and rapid prototyping. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 1998, vol. 47, iss. 2, pp. 525-540.
2. Gibson, I., Rosen, D., Stucker, B., et al. *Additive Manufacturing Technologies*. Berlin, Springer, 2015, DOI: 10.1007/978-1-4939-2113-3.
3. S. Lychev, G. Kostin, K. Koifman. Evolution of Stresses and Deformations in Hollow Cylinder with Variable Material Composition: Mathematical Modeling and Optimization. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, iss. 2, pp. 577-582, DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.03.097.
4. S.A. Lychev, G.V. Kostin, K.G. Koifman, T.N. Lycheva. Modeling and Optimization of Layer-by-Layer Structures, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1009, DOI: 10.1088/1742-6596/1009/1/012014.
5. S.A. Lychev and A.V. Manzhirrov. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 77, no. 4, pp. 421-432, DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011.
6. S. Lychev, K. Koifman. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. De Gruyter, 2019, xx+388 p. DOI: 10.1515/9783110563214
7. Sozio, F., Yavari, A. Nonlinear mechanics of surface growth for cylindrical and spherical elastic bodies. *J. Mech. Phys. Solids*, 2017, vol. 98, pp. 12-48.
8. Zurlo G., Truskinovsky L. Printing Non-Euclidean Solids. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.048001.
9. Hodge N.E., Ferencz, R.M., Vignes R.M. Experimental comparison of residual stresses for a thermomechanical model for the simulation of selective laser melting. *Additive Manufacturing*, 2016, vol. 12, part B, pp. 159-168, DOI: 10.1016/j.addma.2016.05.011.
10. C. Li, C.H. Fu, Y.B. Guo, F.Z. Fang. A multiscale modeling approach for fast prediction of part distortion in selective laser melting. *Journal of Materials Processing Technology*, 2016, vol. 229, pp. 703-712, DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2015.10.022.
11. C. Li, J.F. Liu, Y.B. Guo. Prediction of Residual Stress and Part Distortion in Selective Laser Melting. *Procedia CIRP*, 2016, vol. 45, pp. 171-174, DOI: 10.1016/j.procir.2016.02.058.
12. Huang, You-Min & Lan, Hsiang-Yao. Compensation of distortion in the bottom exposure of stereolithography process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2006, vol. 27, iss. 11-12, pp. 1101-1112, DOI: 10.1007/s00170-004-2313-2.
13. H.S. Cho, W.S. Park, B.W. Choi, M.C. Leu. Determining optimal parameters for stereolithography processes

via genetic algorithm. *Journal of Manufacturing Systems*, 2000, vol. 19, issue 1, pp. 18-27.

14. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 1-32.

15. Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. *CRC Press*, 1993, 292 p.

16. Marsden J. E., Hughes T. J. Mathematical foundations of elasticity. *Courier Corporation*, 1994, 576 p.

17. Rakotomanana, L. A Geometric Approach to Thermomechanics of Dissipating Continua. Progress in Mathematical Physics. *Birkhäuser Basel*, 2004, xv+265 p., DOI: 10.1007/978-0-8176-8132-6.

18. Steinmann P. Geometrical Foundations of Continuum Mechanics. *Springer Berlin Heidelberg*, 2015, xxiv+517 p.

19. Kröner, E.: Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, iss. 1, DOI: 10.1007/BF00281393.

20. Wang, C.C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, iss. 1, pp. 33-94.

21. Yavari, A., Goriely, A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, vol. 205, iss. 1, pp. 59-118, DOI: 10.1007/s00205-012-0500-0.

22. S.A. Lychev and A.V. Manzhurov. Reference Configurations of Growing Bodies. *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, iss. 5, pp. 553-560, DOI: 10.3103/S0025654413050117.

23. S.A. Lychev. Universal Deformations of Growing Solids, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, iss. 6, pp. 863-876, DOI: 10.3103/S0025654411060069.

24. S. Lychev. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 94 (1-2), pp. 118-129, DOI: 10.1002/zamm.201200231.

25. Lychev S. A., Koifman K.G. Geometricheskie aspekty teorii nesovmestnykh deformatsii prostykh strukturno neodnorodnykh tel peremennogo material'nogo sostava [Geometric aspects of the theory of incompatible deformations for simple structurally inhomogeneous solids with variable composition]. *Far Eastern Mathematical Journal*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 221-245.

26. S.A. Lychev, K.G. Koifman. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2016, vol. 7, iss. 3, pp. 177-233, DOI: 10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10.

27. S. Lychev, K. Koifman. Nonlinear evolutionary problem for laminated inhomogeneous spherical shell. *Acta Mech.* 230, pp. 3989-4020(2019), DOI: 10.1007/s00707-019-02399-7.

28. S.A. Lychev, T.N. Lycheva, A.V. Manzhurov. Unsteady Vibration of a Growing Circular Plate. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 325-333, DOI: 10.3103/S002565441102021X.

29. Manzhurov A.V., Lychev S.A. On the Equilibrium of Accreted Plates, in Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics. *Delhi: Elit Publ. House Pvt Ltd*, 2011, pp. 294-300.

30. T.H. Pang, M.D. Guertin, and H.D. Nguyen. Accuracy of Stereolithography Parts: Mechanism and Modes of Distortion for a "Letter-H" Diagnostic Part. 3D Systems Corp., Valencia, California. 1995. (Currently at Ciba-Geigy Corp., Los Angeles, California).

31. Qiang Huang, Jizhe Zhang, Arman Sabbaghi, Tirthankar Dasgupta. Optimal offline compensation of shape shrinkage for three-dimensional printing processes. *IIE Transactions*, 2015, vol. 47, iss. 5, pp. 431-441, doi: 10.1080/0740817X.2014.955599.

32. C.M. Vest. Holographic Interferometry. *New York, John Wiley*, 1979.

33. D. Malacara, M Servín, Z. Malacara. Interferogram Analysis For Optical Testing. *CRC Press*, 2005, 568 p.

34. Briers, J.D. The interpretation of holographic interferograms. *Opt Quant Electron*, 1976, vol. 8, iss. 6, pp. 469-501, doi: 10.1007/BF00620139.

35. Collins, M.C. & Watterson, C.E. Surface-strain measurements on a hemispherical shell using holographic interferometry. *Experimental Mechanics*, 1975, vol. 15, iss. 4, pp. 128-132, DOI: 10.1007/BF02318848.

36. P. Ciarlet, Mathematical Elasticity Volume II: Theory of Plates. *Elsevier Science B.V.*, 1997. lxi+497 p.

37. Viacheslavov P.M., Shmeleva N.M. Kontrol' elektrolitov i pokrytii [Electrolyte and coating control]. *Leningrad, "Mashinostroenie"*, 1985, 96 p.

38. Grinberga A.M., Ivanova A.F., Kravchenko L.L. Gal'vanotekhnika: Spravochnik [Electroplating: a Handbook]. *Moscow, Metallurgiya*, 1987, 736 p.

39. Arutyunyan N.Kh., Manzhurov A.V., Naumov V.E. Contact problems in mechanics of growing solids. *Moscow, Nauka*, 1996, 176 p.