

Гурьянов Г.А., Абдеев Б.М. Прикладная модель измельчения шарообразной твердой частицы прямым ударом о недеформируемую плоскую поверхность // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 32-42. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.03

Guryanov G.A., Abdeev B.M. The applied model of grinding a spherical solid particle with a direct impact on a non-deformable flat surface. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 32-42. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.03



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.03

УДК 539.3 / 6 : 531.662 : 539.4

ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ШАРООБРАЗНОЙ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ ПРЯМЫМ УДАРОМ О НЕДЕФОРМИРУЕМУЮ ПЛОСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Г.А. Гурьянов, Б.М. Абдеев

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,
Усть-Каменогорск, Казахстан

О СТАТЬЕ

Получена: 11 марта 2019 г.
Принята: 12 декабря 2019 г.
Опубликована: 30 марта 2020 г.

Ключевые слова:

помол, удар, разрушение, частица, измельчение, напряжение, силовой импульс, измельчитель, прочность, модель разрушения, материал, энергия деформации.

АННОТАЦИЯ

В промышленности применяется способ измельчения частиц материала свободным ударом. Для проведения практических расчетов, прогнозирования результата процесса измельчения, оценки функционирования измельчителей необходимо иметь возможность количественного определения параметров процесса измельчения и взаимосвязей между параметрами процесса, параметрами измельчителя и свойствами материала, т.е. необходима адекватная механико-математическая модель процесса. Однако разработка математической модели процесса измельчения и разрушения твердых тел затруднена сложностью происходящих при этом явлений. К настоящему времени различными исследователями создана основа структуры процесса измельчения, однако практическое применение существующих гипотез и методов расчета для количественной оценки процесса измельчения довольно затруднительно.

В настоящей работе решается задача об ударе частицы сферической формы по абсолютно жесткому полупространству и предлагается уточненная механико-математическая модель, описывающая процесс разрушения такой частицы при свободном прямом ударе об абсолютно твердую неподвижную плоскую поверхность.

На основе совместного использования классических аналитических зависимостей Герца – Штаермана о силовом контактом взаимодействии тел сферической формы и технической теории распространения продольных волн в упругой сплошной среде получено новое уточненное решение прикладной динамической задачи о прямом ударе шара, моделирующего частицу измельчаемого материала, об абсолютно твердую поверхность, моделирующую рабочий орган измельчителя, с учетом местных физически линейных деформаций, параметра времени и радиального размера частицы. Разработанная уточненная теоретическая модель разрушения сферической частицы, доведенная до практически применимых расчетных аналитических зависимостей, апробированных и проиллюстрированных численным примером, дает возможность описать процесс разрушения частиц материала, позволяет прогнозировать результат и производить расчет процесса измельчения в зависимости от его параметров, обеспечивать требуемое качество измельчения путем регулирования и подбора характеристик, осуществлять проектирование и подбор измельчительного оборудования, а также может быть положена в основу компьютерного моделирования процесса измельчения материала свободным ударом.

© ПНИПУ

© Гурьянов Георгий Александрович – к.т.н., доц., e-mail: gguryanov@mail.ru, ID: 0000-0003-3657-3735
Абдеев Борис Масгутович – к.т.н., доц., e-mail: m.abdeeva@mail.ru, ID: 0000-0003-2867-152X

Georgiy A. Guryanov – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: gguryanov@mail.ru, ID: 0000-0003-3657-3735
Boris M. Abdeev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: m.abdeeva@mail.ru, ID: 0000-0003-2867-152X



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



THE APPLIED MODEL OF GRINDING A SPHERICAL SOLID PARTICLE WITH A DIRECT IMPACT ON A NON-DEFORMABLE FLAT SURFACE

G.A. Guryanov, B.M. Abdeev

D. Serikbaev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019
Accepted: 12 December 2019
Published: 30 March 2020

Keywords:

grind, impact, destruction, particle, crushing, tension, power impulse, crusher, strength, grinding model, material, deformation energy.

ABSTRACT

A grinding process using a free impact breakage mechanism is used in industries. In order to make calculations, predict grinding results, and evaluate mills functioning, it is necessary to assess the parameters of the grinding process and interrelations between the process parameters, mills parameters and materials properties, i.e. it is necessary to use an adequate mechanical-mathematical model of the process. However it is difficult to model due to some phenomena occurring in this process. Nowadays, various researchers have established the basis for the structure of the grinding process, but the application of the existing hypotheses and methods to evaluate the grinding process is quite difficult.

This paper solves the problem of a spherical shape particle impacting an absolutely rigid half-space. It proposes a refined mechanical and mathematical model describing the process of destruction of the particle using the free direct impact breakage mechanism on an absolutely rigid, stationary, and flat surface.

By using the Hertz-Staerman's classical analytical dependencies on the force contact interaction of the spherical bodies and the technical theory of the longitudinal waves' propagation in the elastic continuous medium, we obtained a new refined solution of the applied dynamic problem related to a direct impact of a ball simulating a particle of a feeding material (an absolutely rigid surface simulating the working body of the mill) taking into account local physically linear deformations, the time parameter and radial particle size. The improved theoretical model of the spherical particle destruction was brought to applicable analytical calculations, tested and illustrated by a numerical example. It made it possible to describe the fracture of the material particles, predict the result and calculate the grinding process depending on its parameters providing the required quality of grinding by regulating and selecting characteristics, designing and selecting the grinding equipment, and modeling the grinding process using the free impact breakage mechanism.

© PNRPU

Процессы тонкого измельчения имеют важное значение в современном производстве. Например, от степени дисперсности исходного материала во многом может зависеть качество конечного продукта [1–4]. В промышленности преимущественное распространение получили разнообразные механические способы измельчения, обладающие относительной простотой осуществления [1–8].

Частицы материала разрушаются, если внешние усилия превышают предел прочности (предел временного сопротивления) материала для соответствующего вида деформации (сжатия, растяжения, изгиба, сдвига). Поэтому для измельчения материала на него необходимо оказать какое-либо внешнее воздействие [9–11].

В практике измельчения широкое применение получил способ динамического воздействия на частицы материала свободным ударом. При соударении твердых тел возникают большие силы, что используется в технике для создания интенсивных воздействий на обрабатываемые материалы и среды [6–8, 12–16]. Ударное нагружение также позволяет обеспечить высокие значения кинетической энергии, прикладываемой к измельчаемым частицам [1, 3, 4, 5, 17, 18].

В общем виде процесс разрушения свободным ударом можно представить следующим образом. При соударении с недеформируемой твердой поверхностью

частица теряет скорость вплоть до полной остановки, кинетическая энергия частицы превращается в потенциальную энергию деформации, накапливающуюся в виде напряжений в некотором объеме частицы и приводящую к образованию трещин и разрушению этого объема. Таким образом, в процессе измельчения каждая частица среды нагружается внешним силовым ударным воздействием, под влиянием которого в объеме тела частицы создается напряженно-деформированное состояние, при этом усилие, необходимое для создания предельных напряжений и разрушения частицы, с уменьшением ее размера возрастает [4, 7, 8, 19–24].

Известно [19–23], что частицу материала нельзя механическим путем разрушить до бесконечно малой величины, осуществляя одно и то же по виду и параметрам воздействие. С увеличением дисперсности частиц их измельчение затрудняется, а начиная с некоторой, предельной для данного материала и процесса измельчения дисперсности – прекращается. Другими словами, для каждого материала и режима измельчения существует предельный размер, до которого можно измельчить частицы материала. В связи с этим получение ответов на вопросы о том, частицы какой крупности могут быть разрушены в данном измельчителе, когда наступит предел измельчения, какие параметры процесса

необходимы для разрушения частиц от заданной крупности до требуемой и другие, остается актуальным.

Одной из важных задач при измельчении материалов является установление возможности количественного определения параметров, характеризующих процесс измельчения, например, крупности измельченного материала для выбранного способа и применяющегося в измельчительном оборудовании механизма разрушения.

Для проведения практических расчетов и прогнозирования результата процесса измельчения необходима адекватная модель процесса разрушения частиц материала в зависимости от характеристик материала и параметров процесса. Эта модель должна содержать понятные и несложные в плане практического применения расчетно-теоретические зависимости и иметь инженерное применение. Например, эта модель могла бы быть использована для описания работы и правильного выбора основных параметров измельчителей при их проектировании.

Однако получение модели измельчения, которая дала бы точную количественную оценку процесса измельчения, является сложной задачей. Разработка математической модели процесса измельчения, его детальное описание затруднены сложностью явлений, происходящих при измельчении и разрушении твердых тел, протеканием в измельчителе различных по своей природе процессов и влиянием на эти процессы большого числа факторов [19, 22, 23, 25, 26].

К настоящему времени различными исследователями создан ряд теорий или гипотез измельчения [11, 18, 23, 25–28], объясняющих условия разрушения в твердых материалах и устанавливающих связь между механизмом разрушения частиц и затрачиваемой энергией; обзор сделан авторами в работах [29, 30]. Существующие гипотезы удовлетворительно отражают качественную сторону процесса измельчения, но мало пригодны для его количественной оценки [31] и не позволяют практически рассчитывать и прогнозировать процесс измельчения, оценивать результат измельчения по таким параметрам, как крупность измельченных частиц, предел измельчения и др. Основными недостатками этих гипотез являются сложность, необходимость определения ряда коэффициентов, различных для разных измельчаемых материалов, нахождение действующих сил различной природы, что и вызывает существенные трудности при практическом использовании гипотез.

Сегодня в исследованиях, особенно зарубежных, вопросам прикладного механико-математического моделирования процесса измельчения частиц твердого материала не уделяется достаточного внимания [6, 7, 8, 32–37]. И тем более мало кто рассматривает именно процесс измельчения с точки зрения механики упругого тела. Некоторые вопросы, связанные с поведением твердых тел при внешних силовых воздействиях, рассмотрены, например, в работах [38–42]. Однако и положения, использованные в данных работах, и полученные результаты мало пригодны для описания и модели-

рования процесса разрушения частицы, в том числе свободным ударом.

Ранее авторами на основе положений механики упругого тела уже была решена задача о разрушении частицы в форме бруса при соударении с жестким полупространством [29]. Однако в практике механико-математического моделирования и описания процесса тонкого измельчения твердого хрупкого материала форму частиц принято моделировать шаром [6, 7, 8, 21, 23, 26, 17, 18, 24, 31, 43, 44]. При этом в решении задач о разрушении частиц шарообразной формы и в форме бруса ударом о жесткое полупространство имеются принципиальные различия [45, 46].

Таким образом, в настоящей работе рассматривается задача об ударе по абсолютно жесткому полупространству частицы сферической формы, предлагается новое уточненное решение данной задачи, описывающее процесс разрушения шарообразной частицы, которое может быть положено в основу прикладной модели процесса измельчения материала свободным ударом в зависимости от размера частицы и параметров процесса измельчения.

Предлагаемая модель измельчения позволит прогнозировать результат и производить расчет процесса измельчения материала свободным ударом, осуществлять расчет или подбор измельчительного оборудования, а также может быть положена в основу компьютерного моделирования процесса измельчения.

Решаемая задача измельчения частицы твердого вещества сферической формы рассматривается с точки зрения механики разрушения. Задача разрушения частицы является предельным частным случаем [13] конструктивно-нелинейной [47] контактной задачи механики упругого тела об ударном взаимодействии двух шаров [14], движущихся вдоль оси, соединяющей их центры, со скоростями v_1 и v_2 , после контакта (рис. 1) при условии, что одно из тел представляет собой неподвижное абсолютно жесткое полупространство с нулевой кривизной границы $x = 0$, а ударяющий груз весом P имеет упругую сферическую поверхность радиусом R (рис. 2).

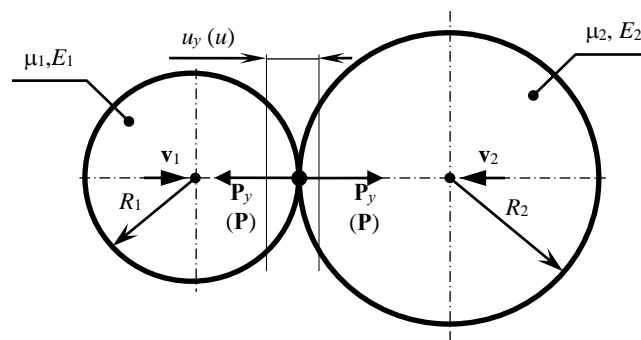


Рис. 1. Классическая схема соударения шарообразных элементов по Герцу [14, 48]

Fig. 1. The classical scheme of the collision of spherical elements according to Hertz [14, 48]

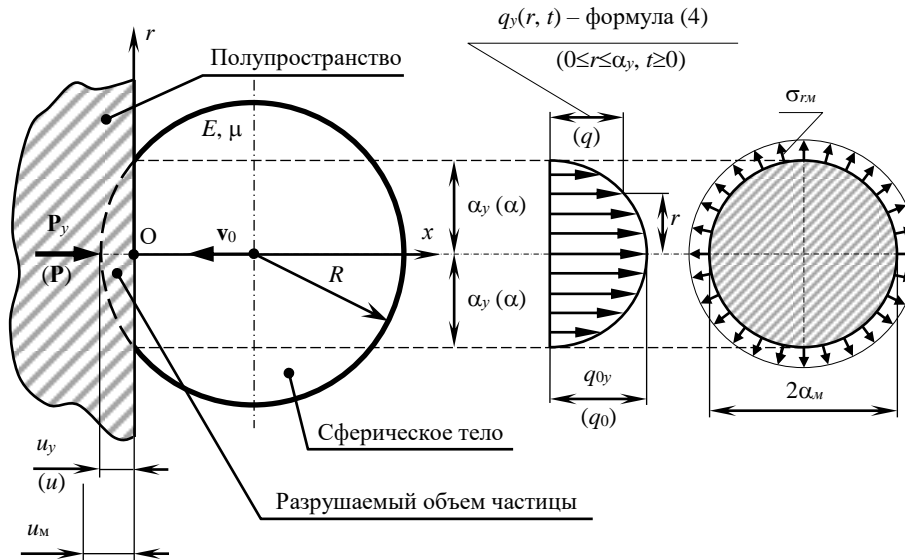


Рис. 2. Приближенная модель [14, 49] прямого удара шара о неподвижную жесткую преграду $x = 0$ с эпурой динамической реактивной нагрузки $q_y = q_y(r, t)$

Fig. 2. An approximate model [14, 49] of the direct impact of a ball on a fixed rigid obstacle $x = 0$ with a dynamic load diagram $q_y = q_y(r, t)$

В основе разрабатываемой теоретической модели разрушения шарообразной частицы [13, 14, 50] лежит предположение Г. Герца [48] о том, что «комбинируя статическое сжатие в частях тел, лежащих непосредственно у места соприкосновения, с общими уравнениями движения для остальных частей тел, мы, вероятно, могли бы получить закон для соударения тел любой формы». Однако следует отметить, что точная теория удара, связанная с изучением местных деформаций, вследствие соприкосновения конструкций, перемещающихся с различными скоростями, а также с колебательно-волновым распространением напряжений в упругом теле, оказывается сложной задачей. Поэтому для решения задачи измельчения частицы твердого вещества сферической формы принята приближенная одномерная расчетная схема (см. рис. 2) прямого удара, возникающего в системе «шар – полупространство», обладающей физической линейностью [47].

В качестве первого приближения к решению прикладной задачи измельчения твердой частицы сферической формы, а также для выяснения адекватности количественной оценки реального процесса разрушения частиц ударом с помощью существующих моделей рассмотрим известную энергетическую модель Т. Юнга [14, 49], дополненную фундаментальной формулой Герца – Штаермана [48, 50, 51] о статическом давлении P между двумя сферическими телами, когда $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$ (см. рис. 1):

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot u^{\frac{3}{2}}, \quad (1)$$

где R_1, R_2 – радиусы шаров; u – сближение взаимодействующих тел в результате их местной деформации; μ_1, μ_2, E_1, E_2 – соответственно коэффициенты Пуассона и модули упругости контактирующих материалов.

Применительно к обозначениям рис. 2 зависимость (1) преобразуется к виду ($R_1 = \infty, R_2 = R, E_1 = \infty, E_2 = E, \mu_2 = \mu$)

$$\mathbf{P} = \frac{4 \cdot E}{3 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot R^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{3}{2}}, \quad (2)$$

где μ, E – упругие постоянные шарового элемента.

Идеализированная теория расчета [14, 49], модифицированная к модели рис. 2, базируется на теореме об изменении кинетической энергии движущегося со скоростью \mathbf{v}_0 тела [14, 52], а также на соотношении (2) и следующих допущениях [14, 47, 52]:

- а) материал частицы – однородный, сплошной, изотропный, линейно-упругий (подчиняется закону Гука);
- б) соударяющиеся поверхности предполагаются абсолютно гладкими, т.е. не имеющими шероховатости [14];
- в) вследствие разрушения объема частицы в зоне ее контакта с недеформируемой поверхностью удар принимается неупругим с нулевым значением коэффициента восстановления [52, 53];
- г) характер аналитических соотношений между усилиями \mathbf{P}, \mathbf{P}_y и перемещениями u, u_y остается неизменным при статической \mathbf{P} и динамической $\mathbf{P}_y = \mathbf{P}_y(t)$ силах (t – время), т.е.

$$\mathbf{P}_y = \frac{4 \cdot E}{3 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot R^{\frac{1}{2}} \cdot u_y^{\frac{3}{2}}, \quad (3)$$

а функция $\mathbf{P}(u)$ аппроксимируется формулой (2);

д) механические константы материала μ, E остаются неизменными в условиях динамического нагружения, что допустимо до скоростей удара 100 м/с [54];

е) установлено [13], что вибрации и колебания, возникающие в движущемся шаре при ударе, не оказывают заметного влияния на его продолжительность и величину напряжений в материале;

ж) момент времени соударения $t = 0$ соответствует абсолютной динамической деформации $u(t) = u(0) = 0$ (см. рис. 2) и скорости $v_0 = \max$ перемещения груза P , т.е. в случае $t > 0$ равнодействующая P_y функции контактного давления $q_y = q_y(r, t)$, представляемая эллиптическим соотношением Герца – Штаермана [48, 51]

$$q_y = q_y(r, t) = q_{0y} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\alpha_y}\right)^2}, \quad 0 \leq r \leq \alpha_y \quad (4)$$

с экстремумом

$$q_{0y} = q_{0y}(t) = \frac{3 \cdot P_y}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_y^2}, \quad (5)$$

в центре $r = 0$ круговой площадки (на рис. 2 она заштрихована) радиусом $\alpha_y \ll R$ становится равной нулю ($P_y = 0, t > 0$);

з) кинетическая энергия E_k шара в момент удара целиком переходит в потенциальную энергию U местной максимальной деформации u_m , распространяющейся практически мгновенно (см. рис. 2 и формулу (3)) [13, 14, 49, 55]:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{\rho_m \cdot V}{2} \cdot v_0^2 = \frac{\rho_m}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot v_0^2 = \\ &= U = \int_0^{u_m} P_y \cdot du_y = \frac{4 \cdot E}{3 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot R^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^{u_m} u_y^{\frac{3}{2}} \cdot du_y = \\ &= \frac{4 \cdot E}{3 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot R^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{5} \cdot u_m^{\frac{5}{2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

откуда

$$u_m = \left[\frac{5 \cdot \pi \cdot \rho_m}{4} \cdot \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right) \right]^{\frac{2}{5}} \cdot v_0^{\frac{2}{5}} \cdot R, \quad (7)$$

где m – масса движущегося тела (частицы), кг;

$$m = \frac{4}{3} \cdot \rho_m \cdot \pi \cdot R^3, \quad (8)$$

где ρ_m – плотность материала частицы [56].

Имея, в соответствии с (7), деформацию u_m , найдем для модели Юнга – Герца, согласно (3), (5) и зависимости [50]

$$\alpha_m = (u_m \cdot R)^{\frac{2}{5}}, \quad (9)$$

искомые выражения для определения максимальных параметров $P_m = P_y(0), \alpha_m = \alpha_y(0), q_{0m} = q_{0y}(0)$ для времени $t = 0$:

$$P_m = P_m(R) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5 \cdot \pi \cdot \rho_m}{4} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{E}{1 - \mu^2} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot v_0^{\frac{2}{5}} \cdot R^2; \quad (10)$$

$$\alpha_m = \alpha_m(R) = \left[\frac{5 \cdot \pi \cdot \rho_m}{4} \cdot \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right) \right]^{\frac{2}{5}} \cdot v_0^{\frac{2}{5}} \cdot R; \quad (11)$$

$$q_{0m} = q_{0m}(R) = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{5 \cdot \pi \cdot \rho_m}{4} \cdot \frac{E^4}{(1 - \mu^2)^4} \cdot v_0^2 \right]^{\frac{1}{5}} = \text{const.} \quad (12)$$

Из анализа полученного на основе существующих гипотез Т. Юнга и Г. Герца элементарного решения (7), базирующегося на законе сохранения энергии [14, 49], следует:

1) соотношения (7), (9)–(12) тождественны упрощенной теории Г. Герца о соударении упругих сферических тел [13, 14, 48, 50];

2) формула (12) является приближенной, так как давление $q_{0m} = q_{0m}(R) = \text{const}$ не зависит от размера R шарообразной частицы и времени контакта t ;

3) зависимость (12) дает многократно завышенные результаты, и изменение характеристик $P_m, q_{0m}, \alpha_m, u_m$ будет отличаться от того, что мы имеем по гипотетическому предположению г) [13].

Например, для гранита с пределом прочности $\sigma_{вр} = 3$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,1 \dots 0,15$ [57] (константы, определяющие прочность диаметрально сжатого, сферического тела из хрупкого материала [50, 58]), у которого $E = 49 \cdot 10^3$ МПа, $\rho_m = 2700$ кг/м³ [57, 59], при $v_0 = 10$ м/с, найденное с использованием формулы (12) радиальное главное напряжение $\sigma_{гм} = \sigma_{гг}(0) > 0$, действующее по граничной окружности контактной плоскости $x = 0$ радиусом $\alpha_m = \alpha_y(0)$ [50, 58] (см. рис. 2), составляет $\sigma_{гм} = 855,4$ МПа $\gg \sigma_{вр} = 3$ МПа.

Вышеприведенные данные наглядно подтверждают неточность и некорректность идеализированного решения по моделям Юнга и Герца [14, 49] в виде конечной формулы (12).

Таким образом, существующие решения задачи разрушения ударом твердой частицы сферической формы на основе моделей Т. Юнга и Г. Герца обладают существенными недостатками и не могут быть использованы для моделирования и регулирования процесса измельчения твердого вещества, поскольку не учитывают размеры частиц измельчаемого материала и их связь с прочностными характеристиками частиц (напряжениями в измельчаемом материале), хотя зависимость прочности частиц от их размера общеизвестна. Также эти решения предполагают удар мгновенным, т.е. не учитывают продолжительность соударения. Такая неполнота существующих решений задачи измельчения твердой частицы сферической формы приводит к весьма далекому от реальности результату количественной оценки процесса измельчения.

С другой стороны, с практической точки зрения у прикладной модели процесса измельчения должна быть возможность определения, варьирования и подбора размера измельчаемой частицы (например, радиуса R), характеризующего качество и требуемую крупность измельчения, в зависимости от напряженно-деформированного состояния материала частицы в области удара и параметров процесса (например, скорости соударения), чего существующие модели измельчения лишены.

Для устранения указанных недостатков существующих моделей разрушения ударом твердой частицы сферической формы в уточненную модель разрушения материала свободным ударом необходимо ввести размер измельчаемой частицы, выраженный, например, через ее радиус R , и время соударения (время контакта) частицы с поверхностью t , что и будет отличать предлагаемую модель от существующих и сделает ее более адекватной реальному процессу.

Дополним прикладную теорию удара [14, 49], отмечая горизонтальной чертой над буквенными символами принадлежность того или иного параметра к уточненной механико-математической модели разрушения, следующими зависимостями:

– уравнением согласно закону сохранения импульса (количества движения) для функции скорости соударения $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ в сечении $x = 0$ [14, 50] (см. рис. 2)

$$m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \bar{\mathbf{P}}_y = 0, \quad (13)$$

которое учитывает местные экстремальные динамические деформации $\bar{u}_y = \bar{u}_y(t)$ и описывает закон движения шара [52, 60], когда время контакта частицы с жестким полупространством $t \geq 0$;

– известными статическими выражениями Штаермана – Герца [48, 50, 51], связывающими одноименные параметры $\mathbf{P} \Rightarrow \bar{\mathbf{P}}_y$, $u \Rightarrow \bar{u}_y$, $\alpha \Rightarrow \bar{\alpha}_y$, $q_0 \Rightarrow \bar{q}_{0y}$ контактного взаимодействия в предположении \mathbf{g}), т.е. их адаптируемости к решению поставленной задачи на удар [13, 14, 48, 50, 54] (см. рис. 2):

$$\bar{\alpha}_y = \bar{u}_y^{1/2} \cdot R^{1/2}, \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \cdot R^{1/2} \cdot \bar{u}_y^{1/2}, \quad (15)$$

$$\bar{q}_{0y} = \frac{3 \cdot \bar{\mathbf{P}}_y}{2 \cdot \pi \cdot \bar{\alpha}_y^2}; \quad (16)$$

– приближенной формулой колебательно-волновой технической теории, моделирующей соударение упругих тел в месте контакта (см. соотношение (280) в [50])

$$\mathbf{v} = \frac{\bar{q}_{0y}}{E} \cdot C \Rightarrow \bar{q}_{0y} = \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot E \quad (17)$$

при очевидном тождестве $\sigma \equiv \bar{q}_{0y}$ между нормальным напряжением σ в сечении $x = 0$ и реактивным давлением \bar{q}_{0y} , а также с учетом того, что C – скорость распространения звуковых волн (м/с) в направлении оси x при сжатии по направлению, противоположному оси x (см. рис. 2) [14, 50],

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho_m}}, \quad (18)$$

где \mathbf{v} – скорость, сообщаемая материалу частицы (скорость изменения напряжения $\sigma = \sigma(t)$).

Если считать неподвижную плоскость $x = 0$ абсолютно твердой (см. рис. 2), то при $t = 0$ [50]

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \quad (19)$$

и начальное граничное давление сжатия, в соответствии с (17),

$$\bar{q}_{0y}(0) = \bar{q}_{00} = \frac{\mathbf{v}_0}{C} \cdot E. \quad (20)$$

Совместно рассматривая равенства (14)–(16) как систему алгебраических уравнений, будем иметь

$$\bar{\mathbf{P}}_y = \frac{8 \cdot \pi^3 \cdot R^2 \cdot \bar{q}_{0y}^3}{27 \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{E}{1-\mu^2} \right)^2 \right]}. \quad (21)$$

Заменяя m , \mathbf{v} , и \mathbf{P}_y в (13), руководствуясь (8), (17), (18), (21), получаем однородное нелинейное дифференциальное уравнение относительно контактного напряжения \bar{q}_{0y} , действующего в точке с координатами $r = 0$, $x = 0$ (см. рис. 2):

$$\frac{d\bar{q}_{0y}}{dt} + K \cdot \frac{C}{R} \cdot \bar{q}_{0y}^3 = 0, \quad (22)$$

где K – постоянный коэффициент, зависящий от упругих характеристик E , μ измельчаемого вещества, $\text{м}^4/\text{кг}^2$,

$$K = \frac{\pi^2 \cdot (1-\mu^2)^2}{8 \cdot E^2}. \quad (23)$$

Разделяя переменные в (22) [56] и учитывая начальное условие (20), получаем в замкнутом виде искомый интеграл, представляющий собой уточненное решение задачи о разрушении ударом частицы твердого вещества сферической формы

$$\bar{q}_{0y} = \bar{q}_{0y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \left[K \cdot \frac{C}{R} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{C}{\mathbf{v}_0 \cdot E} \right)^2 \right]}}, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

В предельном случае $t = 0$, аналогичном упрощенной модели (12), когда удар мгновенный (что нереально), $\bar{q}_{0y}(0) = \bar{q}_{00}$, что, естественно, совпадает с граничным значением (20).

Имея формулу (24) уточненного решения задачи о разрушении ударом сферической частицы для наибольшего контактного давления $q_{0y}(t)$, сравним результаты определения расчетного растягивающего напряжения [50, 58] по упрощенной модели Т. Юнга [14, 49], когда $\sigma_{\text{рм}} = 855,4$ МПа, с решением, полученным на основе выведенной зависимости (24) для той же шарообразной частицы из гранита, но теперь с учетом ее радиуса $R = 0,00001$ м = 10 мкм для времени соударения $t = 0$ и $t = 0,001$ с:

– находим скорость распространения звуковой волны на основании (18): $C = 4260,1$ м/с;

– находим численные значения радиальных нормальных напряжений $\sigma_r(0)$ для $t = 0$ по соотношению (20) и $\sigma_r(10^{-3} \text{ с})$ для $t = 0,001$ с по соотношению (24) с учетом (23):

$$\sigma_r(0) = \frac{1-2\cdot\mu}{3} \cdot \bar{q}_{0y}(0) = \frac{1-2\cdot\mu}{3} \cdot \frac{v_0}{C} \cdot E = 27,2 \text{ МПа}; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(10^{-3} \text{ с}) &= \frac{1-2\cdot\mu}{3} \cdot \bar{q}_{0y}(10^{-3} \text{ с}) = \\ &= \frac{1-2\cdot\mu}{3} \cdot \frac{E}{\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot (1-\mu^2)^2}{4} \cdot \frac{C}{R} \cdot t + \left(\frac{C}{v_0}\right)^2}} = \\ &= 10,5 \text{ МПа} < \sigma_r(0). \end{aligned} \quad (26)$$

Из двух результатов – (25), (26) – более точным, объективным и наиболее близким к реальности следует считать $\sigma_r(10^{-3} \text{ с}) = 10,5$ МПа, так как фактическое время соударения $t > 0$ не может равняться нулю. Из сравнения результатов, полученных в трех расчетах, по модели Юнга (с использованием формулы (12)) и с использованием формул (20) и (24), также видно, что учет времени соударения $t > 0$ и радиуса частицы R в формуле (24) уточненной модели измельчения вносит существенную поправку в результат расчета в сторону повышения точности количественной оценки процесса измельчения. Так, при расчете разрушения гранита по модели Юнга радиальное напряжение $\sigma_{rм} = 855,4$ МПа $\gg \sigma_{вр} = 3$ МПа, что очень далеко от реальности, в то время как при расчете с использованием формулы (20) $\sigma_r(0) = 27,2$ МПа, а при расчете с использованием формулы (24) $\sigma_r(10^{-3} \text{ с}) = 10,5$ МПа, что наиболее близко к реальному процессу разрушения гранита. Таким образом, результат расчета по уточненной модели с использованием формулы (24) в 81,5 раза точнее, чем по модели Юнга, и в 2,6 раза точнее, чем по формуле (20), что делает предлагаемую уточненную модель разрушения сферической частицы ударом более пригодной для практического использования по сравнению с классическими гипотезами.

В завершение приведем пример теоретической оценки несущей способности частицы твердого вещества в процессе ее измельчения на примере гранита. Для решения этой прикладной задачи формулируем условие прочности (МПа) сферической частицы измельчаемого материала в соответствии с (18), (23), (24) при заданном сопротивлении на растяжение $\sigma_{вр} = 3$ МПа, времени соударения $t = 0,001$ с и произвольно принятом радиусе шарообразной частицы R :

$$\begin{aligned} \sigma_r(R, t) &= \frac{1-2\cdot\mu}{3} \cdot \bar{q}_{0y}(t) = \\ &= \frac{1-2\cdot\mu}{3} \cdot \frac{E}{\sqrt{\frac{\pi^2 \cdot (1-\mu^2)^2}{4} \cdot \frac{C}{R} \cdot t + \left(\frac{C}{v_0}\right)^2}} = \sigma_{вр}, \end{aligned} \quad (27)$$

откуда можно найти граничную величину

$$\begin{aligned} R_{гп} &= \frac{9 \cdot C \cdot t \cdot \pi^2 \cdot (1-\mu^2)^2 \cdot \sigma_{вр}^2 \cdot v_0^2}{4 \cdot [E^2 \cdot v_0^2 \cdot (1-2\cdot\mu)^2 - 9 \cdot \sigma_{вр}^2 \cdot C^2]} = \\ &= 7 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,7 \text{ мкм} \end{aligned} \quad (28)$$

радиуса шара R , т.е. половины всего размера (диаметра) частицы, меньше которой частица гранита не будет разрушаться.

На рис. 3 приведен график зависимости (27), построенный по нижепредставленным данным с учетом (28), когда $t = 0,001$ с, скорость $v_0 = 10$ м/с и размер R изменяется в пределах $0 \leq R \leq 1$ мкм (жирным выделено значение граничного радиуса частицы R при предельном значении напряжения σ_r):

R , мкм	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
σ_r , МПа	0	1,14	1,61	1,97	2,27	2,54	2,78	3,0	3,21	3,4	3,58

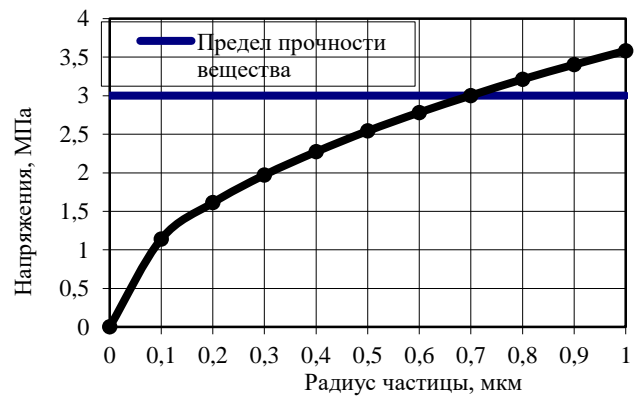


Рис. 3. Графическая иллюстрация функции (27) и стационарной зависимости (28) для гранита при $t = 0,001$ с

Fig. 3. Graphical illustration of the function (27) and the stationary dependence (28) for granite at $t = 0.001$ s

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

1. Доказана практическая неприменимость известных, предельно упрощенных моделей разрушения твердой частицы сферической формы Юнга и Герца [13, 14, 48, 49], которые приводят к значительно завышенным результатам по главному радиальному нормальному напряжению $\sigma_r > 0$, не зависящему от продолжительности удара и линейного размера частицы R , что исключает возможность с достаточной точностью проконтролировать и количественно описать стадии разрушения частицы в процессе ее измельчения.

2. Получено уточненное решение задачи динамики о разрушении упругого тела сферической формы при прямом соударении с абсолютно жестким полупространством, учитывающее, в отличие от известных моделей, параметр времени t и радиус шара R и являющееся основой уточненной модели процесса измельчения ударом частиц материала, доведенное до расчетных зависимостей (24), (27), (28) и проиллюстрированное

численным примером, применительно к разрушаемой частице из гранита (см. рис. 3).

3. Возможен комплексный подход к описанию и исследованию качественных и количественных характеристик [61] динамического процесса разрушения частиц материала путем регулирования и подбора оптимальных параметров v_0 , R , t , обеспечивающих требуемое качество измельчения, например, подбор величины скорости соударения v_0 для обеспечения требуемого размера частиц измельчаемого материала.

4. Для повышения адекватности уточненной модели при количественной оценке процесса измельчения

необходимо более точно определить продолжительность удара t , например, экспериментальным путем. После экспериментальной проверки предложенной прикладной инженерной модели расчета также возможно внесение в уравнения модели корректировочных коэффициентов для повышения ее точности и адекватности реальному процессу измельчения.

5. После экспериментальной проверки и уточнения полученная прикладная модель может быть положена в основу создания программы компьютерного моделирования процесса измельчения материала свободным ударом.

Библиографический список

1. Еремин Н.Ф. Процессы и аппараты в технологии строительных материалов. – М.: Высшая школа, 1986. – 286 с.
2. Борщев В.Я. Оборудование для измельчения материалов: дробилки и мельницы: учеб. пособие. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2004. – 91 с.
3. Андреев С.Е., Перов В.А., Зверевич В.В. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 415 с.
4. Веригин Ю.А. Разработка и создание аппаратов для приготовления стройматериалов на основе анализов процессов активации дисперсных сред: дис. ... д-ра тех. наук: 05.05.04 / МИСИ. – М., 1990. – 322 с.
5. Демидов А.Р., Чирков С.Е. Способы измельчения и оценка их эффективности. – М.: ЦИНТИ, 2009. – 49 с.
6. Анферов В.А. Определение основных параметров роторно-шаровой мельницы: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04 / МАДИ. – М., 1990. – 187 с.
7. Сартаков А.В. Моделирование и интенсификация рабочих процессов вибрационных измельчителей: дис. ... канд. тех. наук: 05.05.04. – Барнаул, 2004. – 177 с.
8. Потемкина С.П. Исследование и расчет оптимальных условий тонкого измельчения в аппаратах ударно-стирающего типа: дис. ... канд. тех. наук: 05.15.08. – Иркутск, 1997. – 109 с.
9. Татур Г.К. Общий курс сопротивления материалов. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 464 с.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
11. Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. – 307 с.
12. Гурьянов Г.А., Клименко Е.А. Об одном подходе к интенсификации процесса помола // Вестник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева. – 2013. – № 1 (59). – С. 27–35.
13. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций // Избранные работы под. ред. Э.И. Григolloка. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
14. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1969. – 248 с.
15. Крупенин В.Л. Ударные и виброударные машины и устройства // Вестник научно-технического развития. – 2009. – № 4 (20). – С. 3–32.
16. Бивин Ю.К. Косой удар твердым сферическим телом по металлической пластинке // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 2. – С. 137–143.
17. Макклитон Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов: пер. с англ.; под ред. Е.М. Морозова. – М.: Мир, 2000. – 443 с.
18. Лескин А.Д. Основные закономерности измельчения материалов // Современное измельчительное оборудование: обз. инф. – Вып. 3, серия 7. Промышленность нерудных и неметаллургических материалов. – М.: ВНИИОСМ, 2008. – С. 2–14.
19. Гийо Р. Проблема измельчения материалов и ее развитие. – М.: Стройиздат, 2004. – 112 с.
20. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. – М.: Металлургия, 1971. – 263 с.
21. Партон В.З. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 288 с.
22. Румпф Г. Об основных физических проблемах при измельчении // Труды Европейского совещания по измельчению. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 7–40.
23. Ходаков Г.С. Тонкое измельчение строительных материалов. – М.: Стройиздат, 1972. – 240 с.
24. Сергеев К.Ф. Хрупкое разрушение твердых тел. – Владивосток, 1989. – 241 с.
25. Ребиндер П.А. Поверхностные явления в дисперсных системах. Коллоидная химия: избранные труды. – М.: Наука, 1978. – 368 с.
26. Бонд Ф.С. Законы дробления // Труды Европейского совещания по измельчению. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 195–205.
27. Баловнев В.И. Определение сопротивлений и энергии при измельчении материалов. // Строительные и дорожные машины. – 1988. – № 1. – С. 24–25.
28. Григорьевых Д.П., Хохлов Н.И., Петров И.Б. Расчет динамического разрушения в твердых деформируемых телах. // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 4. – С. 45–58.
29. Гурьянов Г.А., Абдеев Б.М., Клименко Е.А. Прикладная модель измельчения твердой частицы простой формы ударом о жесткую поверхность // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 1. – С. 110–120.
30. Абдеев Б.М., Байгереев С.Р., Гурьянов Г.А. Обобщенная динамическая теория измельчения частицы твердого вещества импульсно-силовым сжатием двумя недеформируемыми шарами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 280–291.
31. Партон В.З. Механика разрушения. От теории к практике. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
32. Постникова И., Блиничев В., Кравчик Я. Расчет процесса измельчения частиц при их столкновении в противоточных струях // Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej. – 2008. – № 2. – С. 301–310.

33. Промтов М.А. Степанов А.Ю., Алешин А.В. Методы расчета характеристик роторного импульсного аппарата: монография. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2015. – 148 с.
34. Фесенко А.В. Анализ энергетических характеристик роторных аппаратов для гидродинамической активации жидкостей // Вісник НТУ «ХПИ». – 2015. – № 4.
35. Scale-up methodology for tumbling ball mill based on impact energy of grinding balls using discrete element analysis / Tomohiro Iwasaki, Tomoya Yabuuchi, Haruki Nakagawa, Satoru Watano // *Advanced Powder Technology*. – 2010. – 21. – P. 623–629.
36. Gábor Mucsi, Ádám Rácz, Viktor Márai Mechanical activation of cement in stirred media mill // *Powder Technology*. – February 2013. – Vol. 235. – P. 163–172.
37. Fathollah Sajedi Mechanical activation of cement–slag mortars // *Construction and Building Materials*. – January 2012. – Vol. 26, iss. 1. – P. 41–48.
38. Баянов Е.В., Гулидов А.И. К вопросу о скорости упругих волн в коротких осесимметричных стержнях // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 1(59). – С. 65–72.
39. Завгородний А.И., Хесеро Монтасер Периодический виброударный режим движения шара по дуге окружности // Вібрації в техніці та технологіях. – 2012. – № 2 (66). – С. 35–41.
40. Завгородний А.И., Хесеро Монтасер Периодический виброударный режим движения сферической частицы по дуге кубической параболы // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – 2013. – Вип. 43, част. I. – С. 35–41.
41. Горбушин Н.А., Волков Г.А., Петров Ю.В. О влиянии геометрической формы частицы на пороговую энергию при эрозионном разрушении // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83, вып. 3. – С. 79–83.
42. Калганков Е.В., Новикова А.В. К задаче об ударе шара о вязкоупругую плоскость // Геотехнічна механіка. – 2013. – № 108. – С. 104–109.
43. Ломакин Е.В. Теории деформирования композитных материалов с изменяющимися упругими свойствами // Колесания и волны в механических системах: материалы междунар. науч. конф. / под ред. акад. Р.Ф. Ганиева. – М.: Изд-во «Институт компьютерных исследований», 2012. – С. 16–17.
44. Денисов Д.Г. Моделирование процесса измельчения в дробилках ударного действия // Вестник ИГЭУ. – 2006. – Вып. 2. – С. 17–20.
45. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 352 с.
46. Колесников Ю.В., Морозов Е.М. Механика контактного разрушения. – М.: Наука, 1989. 224 с.
47. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стойиздат, 1978. – 204 с.
48. Hertz H.R. Die Prinzipien der Mechanik. – Leipzig, J.A. Barth, 1894. – 312 s.
49. Yong Th. A course of lectures on natural philosophy and the Mechanical arts. – London, printed for J. Johnson, 1807, vol. 1, XXIV + 796 p. (С. 144.)
50. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М.И. Рейтмана под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
51. Штаерман И.Ф. Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
52. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 596 с.
53. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностроительных специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.
54. Инженерные методы исследования ударных процессов / Г.С. Батуев, Ю.В. Голубков, А.К. Ефремов, А.А. Федосов. – М.: Машиностроение, 1969. – 251 с.
55. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов / пер. с англ. Л.Г. Корнейчука под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1976. – 672 с.
56. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 608 с.
57. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972. – 256 с.
58. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев [и др.]; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1958. – 976 с. (С. 434–449.)
59. Писаренко Г.С., Яковлев А.Г., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975. – 704 с.
60. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний: учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1975. – 248 с.
61. Baigereyev S., Guryanov G. New method for increase in product fineness in stirred mills // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. – 2019. – № 19. – P. 768–778.

References

1. Eremin N.F. Protsessy i apparaty v tekhnologii stroitelnykh materialov [Processes and apparatus in the technology of building materials]. Moscow, Vysshaya shkola, 1986, 286 p.
2. Borschev V.Ya. Oborudovanie dlya izmel'chenia materialov: drobilki i mel'nitsy: uchebnoe posobie [Equipment for grinding materials: crushers and mills: a manual]. Tambov: Izdatel'stvo TGTU, 2004, 91 p.
3. Andreev S.E., Perov V.A., Zverevich V.V. Droblenie, izmelchenie i grokhochenie poleznykh iskopaemykh [Crushing, grinding and screening of minerals]. Moscow, Nedra, 1990, 415 p.
4. Verigin Iu.A. Razrabotka i sozdanie apparatov dlya prigotovleniya stroimaterialov na osnove analizov protsessov aktivatsii dispersnykh sred: dis. ...dok. tekhn. nauk: 05.05.04 [Development and creation of apparatus for the preparation of building materials on the basis of analysis of the processes of activation of disperse media: dis. ... doc. technical sciences: 05.05.04] / MISI-M., 1990. – 322 s.
61. Demidov A.R., Chirkov S.E. Sposoby izmel'chenia i otsenka ikh effektivnosti [Grinding methods and evaluation of their effectiveness]. Moscow, TSINTI, 2009, 49 p.
5. Anferov V.A. Opredelenie osnovnykh parametrov rotornosharovoi melnitsy: dis. kand. tekhn. nauk: 05.05.04 [Determination of the main parameters of the rotor-ball mill: dis. cand. tech. sciences: 05.05.04]. Moscow, MADI, 1990, 187 p.
6. Sartakov A.V. Modelirovanie i intensifikatsia rabochikh protsessov vibratsionnykh izmelchitelei: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.05.04 [Modeling and intensification of working processes of vibratory shredders: dis. ... cand. tech. sciences: 05.05.04]. – Barnaul, 2004. – 177 s.
7. Potemkina S.P. Issledovanie i raschet optimalnykh uslovii tonkogo izmelchenia v apparatakh udarno-istirajushego tipa:

dis.... kand. tekhn. nauk: 05.15.08 [Investigation and calculation of optimal conditions for fine grinding in shock-abrasive devices: dis.... cand. tech. sciences: 05.15.08]. – Irkutsk, 1997. – 109 s.

8. Tatur G.K. Obschy kurs soprotivleniya materialov [General course of materials resistance]. Minsk: Izdatel'stvo «Vysheishaya shkola», 1974, 464 p.

9. Feodosiev V.I. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow, Nauka, 1974, 560 p.

10. Khodakov G.S. Fizika izmelcheniya [Physics of grinding]. – M.: Nauka, 1972.–307 s.

11. Guryanov G.A., Klimenko E.A. Ob odnom podkhode k intensivatsii protsessa pomola [One approach to the intensification of the grinding process]. Vestnik Vostochno-Kazakhstanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. D. Serikbaeva, 2013, no. 1 (59), pp. 27-35.

12. Timoshenko S.P. Prochnost i kolebania elementov konstruktivnykh [Strength and vibrations of structural elements]. Moscow, Nauka, 1975, 704 p.

13. Kilchevskii N.A. Teoria soudarenia tverdykh tel [The theory of collision of solids]. Kiev, Izdatel'stvo «Naukova dumka», 1969, 248 p.

14. Krupenin V.L. Udarnye i vibroudarnye mashiny i ustroystva [Impact and vibroimpact machines and devices]. Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya, 2009, no. 4 (20), pp. 3-32.

15. Bivin Ju.K. Kosoi udar tverdykh sfericheskimi telami po metallicheskoj plastinke [Oblique impact by a spherical solid on a metal plate]. Izvestia rossyskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2013, no. 2, pp. 137-143

16. Makklinton F., Argon A. Deformatsiya i razrushenie materialov [Deformation and destruction of materials]. Moscow, Mir, 2000, 443 p.

17. Leskin A.D. Osnovnye zakonomernosti izmelcheniya materialov [The main regularities of grinding materials]. Sovremennoe izmelchitelnoe oborudovanie, 2008, iss. 3, ser. 7, pp. 2-14.

18. Giio R. Problema izmelcheniya materialov i ee razvitiye [The problem of grinding materials and its development]. Moscow, Stroiizdat, 2004, 112 p.

19. Ekobori T. Fizika i mekhanika razrusheniya i prochnosti tverdykh tel [Physics and Mechanics of Destruction and Strength of Solids]. Moscow, Metallurgia, 1971, 263 p.

20. Parton V.Z. Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya [Mechanics of elastoplastic fracture]. Moscow, Nauka, 1974, 288 p.

21. Rumpf G. Ob osnovnykh fizicheskikh problemakh pri izmelchenii [On the main physical problems in grinding]. Moscow, Stroiizdat, Trudy Evropeiskogo soveschaniya po izmelcheniyu, 1966, pp. 7-40.

22. Khodakov G.S. Tonkoe izmelchenie stroitelnykh materialov [Fine grinding of building materials]. Moscow, Stroiizdat, 1972, 240 p.

23. Sergeev K.F. Khrupkoe razrushenie tverdykh tel [Brittle fracture of solids]. Vladivostok, 1989, 241 p.

24. Rebinder P.A. Poverkhnostnye yavleniya v dispersnykh sistemakh. Kolloidnaya khimiya: izbrannyye trudy [Surface phenomena in disperse systems. Colloid Chemistry: Selected Works]. Moscow, Nauka, 1978, 368 p.

25. Bond F.S. Zakony drobleniya [Laws of crushing]. Moscow, Stroiizdat, Trudy Evropeiskogo soveschaniya po izmelcheniyu, 1966, pp. 195-205.

26. Balovnev V.I. Opredelenie soprotivleniya i energii pri izmelchenii materialov [Determination of resistance and energy when grinding material]. Stroitelnye i dorozhnye mashiny, 1988, no 1, pp. 24-25.

27. Grigoriev D.P., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Raschet dinamicheskogo razrusheniya v tverdykh deformiruemyykh telakh [Calculation of dynamic destruction in deformable bodies]. Matematicheskoe modelirovaniye, 2017, vol. 29, no. 4, pp. 45-58.

28. Guryanov G.A., Abdееv B.M., Klimenko E.A. Applied grinding model of a solid particle with a simple shape on impact with a hard surface. PNRPU Mechanics Bulletin, 2018, no. 1, pp. 110-120.

29. Abdееv B.M., Baigereyev S.R., Guryanov G.A. Obobshchennaya dinamicheskaya teoriya izmelcheniya chastitsy tverdogo veschestva impulsno-silovym szhatiem dvumya nedeformiruemymi sharami [Generalized dynamic theory of a solid particle grinding by pulse-force compression with two non-deformable balls]. PNRPU Mechanics Bulletin, 2018, no. 4, pp. 280-291.

30. Parton V.Z. Mekhanika razrusheniya. Ot teorii k praktike [Mechanics of destruction. From theory to practice]. Moscow, Nauka, 1990, 240 p.

31. Postnikova I., Blinichev V., Kravchik Ya. Raschet protsessa izmelcheniya chastits pri ikh stolknovenii v protivotochnykh struyakh [Calculation of the grinding process of particles when they collide in countercurrent jets]. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 2008, №2, 2008, pp. 301-310.

32. Promtov M.A., Stepanov A.Ju., Aleshin A.V. Metody rascheta kharakteristik rotornogo impulsnogo apparata: monografiya [Methods for calculating the characteristics of a rotary pulse apparatus: a monograph]. Tambov: Izdatel'stvo FGBOU VPO «TGTV», 2015, 148 p.

33. Fesenko A.V. Analiz energeticheskikh kharakteristik rotnykh apparatov dlya gidrodinamicheskoi aktivatsii zhidkosti [Analysis of the energy characteristics of rotary apparatuses for hydrodynamic activation of liquids]. Visnik NTU «HPI», 2015, no. 4.

34. Tomohiro Iwasaki, TomoyaYabuuchi, Haruki Nakagawa, Satoru Watano Scale-up methodology for tumbling ball mill based on impact energy of grinding balls using discrete element analysis. Advanced Powder Technology, 2010, no. 21, pp. 623-629.

35. Gábor Mucsi, Ádám Rác, Viktor Mádai Mechanical activation of cement in stirred media mill. Powder Technology, 2013, vol. 235, pp. 163-172.

36. Fathollah Sajedi Mechanical activation of cement-slag mortars. Construction and Building Materials, 2012, vol. 26, iss. 1, pp. 41-48.

37. Bayanov E.V., Gulidov A.I. K voprosu o skorosti uprugikh voln v korotkikh osesimmetrichnykh sterzhnyakh [On the question of the velocity of elastic waves in short axisymmetric rods]. Sbornik nauchnykh trudov NGTU, 2010, no. 1(59), pp. 65-72.

38. Zavgorodnii A.I., Hessro Montaser Periodicheskii vibroudarnyi rezhim dvizheniya shara po duge okruzhnosti [Periodic vibro-impact mode of movement of the ball along the arc of a circle]. Vıbratsii v tekhnitsi ta tekhnologiyakh, 2012, no. 2 (66), pp. 35-41.

39. Zavgorodnii A.I., Hessro Montaser Periodicheskii vibroudarnyi rezhim dvizheniya sfericheskoi chastitsy po duge kubicheskoi paraboly [Periodic vibro-impact mode of movement of a spherical particle along the arc of a cubic parabola]. Konstruirovaniya, virobnitstvo ta ekspluatatsiya silskogospodarskikh mashin, 2013, iss. 43, part I, pp. 35-41.

40. Gorbushin N.A., Volkov G.A., Petrov Ju.V. O vliyaniy geometricheskoi formy chastitsy na progovuju energiyu pri erozionnom razrushenii [On the influence of the geometric shape of a particle on the threshold energy during erosion destruction]. Gurnal tekhnicheskoi fiziki, 2013, vol. 83, iss. 3, pp. 79-83.

41. Kalgankov E.V., Novikova A.V. K zadache ob udare shara o vyazko upruguyu ploskost [On the problem of hitting a ball on a viscoelastic plane]. Geotekhnichna mekhanika, 2013, vol. 108, pp. 104-109.

42. Lomakin E.V. Teorii deformirovaniya kompozitnykh materialov s izmenyayuschimisya uprugimi svoystvami [Theories of deformation of composite materials with varying elastic properties]. *Moscow, Izdatel'stvo «Institut kompjuternykh issledovaniy», Kolebaniya i volny v mekhanicheskikh sistemakh. Materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii*, 2012, pp. 16-17.
43. Denisov D.G. Modelirovaniye protsessa izmelcheniya v drobilnikakh udarnogo deystviya [Modeling of the grinding process in impact crushers]. *«Vestnik IGEU»*, 2006, iss. 2, pp. 17-20.
44. Popov V.L. Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya i fizika treniya. Ot nanotribologii do dinamiki zemletryaseniya [Contact mechanics and friction physics. From nanotribology to earthquake dynamics]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2013, 352 p.
45. Kolesnikov Ju.V., Morozov E.M. Mekhanika kontaktnogo razrusheniya [Mechanics of contact destruction]. *Moscow, Nauka*, 1989. 224 p.
46. Lukash P.A. Osnovy nelineinoy stroitel'noy mekhaniki [The foundations of nonlinear building mechanics]. *Moscow, Stroizdat*, 1978, 204 p.
47. Hertz H.R. Die Prinzipien der Mechanik. *Leipzig, J.A. Barth*, 1894, 312 p.
48. Yong Th. A course of lectures on natural philosophy and the Mechanical arts. *London, printed for J. Johnson*, 1807, vol. 1, XXIV + 796 p.
49. Timoshenko S.P., Gudier Dzh. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1975, 576 p.
50. Shtaerman I.F. Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti [The contact problem of elasticity theory]. *Moscow, Leningrad, Goctekhnizdat*, 1949, 270 p.
51. Voronkov I.M. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Course of theoretical mechanics]. *Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury*, 1961, 596 p.
52. Dobronravov V.V., Nikitin N.N. Kurs teoreticheskoy mekhaniki: Uchebnik dlya mashinostroytel'nykh spetsialnostey vuzov [Course of theoretical mechanics: A textbook for engineering specialties of universities]. *Moscow, Vysshaya shkola*, 1983, 575 p.
53. Batuev G.S., Golubkov Ju.V., Efremov A.K., Fedosov A.A. Inzhenernyye metody issledovaniya udarnykh protsessov [Engineering methods for studying shock processes]. *Moscow, Mashinostroeniye*, 1969, 251 p.
54. Timoshenko S.P., Gere Dzh. Mekhanika materialov [Mechanics of materials]. *Moscow, Izdatel'stvo «Mir»*, 1976, 672 p.
55. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vuzov [Handbook of mathematics for engineers and students of technical universities]. *Moscow Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury*, 1962, 608 s.
56. Koshkin N.I., Shirkevich M.G. Spravochnik po elementarnoy fizike [Handbook of elementary physics]. *Moscow, Nauka*, 1972, 256 p.
57. Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K. i dr. Raschety na prochnost v mashinostroyenii. Tom II [Strength calculations in mechanical engineering. Volume II]. *Moscow, Mashgiz*, 1958, 976p.
58. Pisarenko G.S., Yakovlev A.G., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Handbook on the resistance of materials]. *Kiev, Izdatel'stvo «Naukova dumka»*, 1975, 704 p.
59. Yablonskii A.A., Noreiko S.S. Kurs teorii kolebaniy: Uchebnoye posobie dlya studentov vtuzov [Course of the theory of oscillations: A manual for students of technical universities]. *Moscow, Vysshaya shkola*, 1975, 248 p.
61. Samat Baigereyev, Georgiy Guryanov New method for increase in product fineness in stirred mills. *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 2019, no. 19, pp. 768-778.