



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.06

УДК 532.517:539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ПРИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДЕМПФИРУЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

В.Н. Паймушин^{1, 2}, В.А. Фирсов¹, В.М. Шишкин³

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань, Россия

²Казанский федеральный университет, Казань, Россия

³Вятский государственный университет, Киров, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 апреля 2019 г.
Принята: 17 февраля 2020 г.
Опубликована: 30 марта 2020 г.

Ключевые слова:

пластина, интегральное демпфирующее покрытие, колебания, резонанс, конечный элемент, логарифмический декремент колебаний.

АННОТАЦИЯ

Обсуждаются классические способы поверхностного демпфирования с использованием свободного и связанного демпфирующих слоев. Приведена структура перспективного интегрированного варианта демпфирующего покрытия, состоящего по толщине из двух слоев материала с ярко выраженными вязкоупругими свойствами, между которыми располагается тонкий армирующий слой из высокомодульного материала. Дается обобщение модели Томпсона-Кельвина – Фойгта для описания вязкоупругих свойств материала при растяжении-сжатии на случай сложного напряженного состояния. Разработана конечно-элементная методика определения динамической реакции удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием на основе четырехслойного конечного элемента с 14 степенями свободы: основной материал работает в рамках гипотез Кирхгофа – Лява, демпфирующие слои находятся в плоском напряженном состоянии, армирующий слой работает на растяжение-сжатие. Это позволяет учитывать эффект поперечного обжатия демпфирующих слоев пластины, который существенно увеличивает ее демпфирующие свойства на высоких частотах колебаний. Получены матрицы жесткости, матрицы демпфирования и матрицы масс составляющих слоев для получения аналогичных полных матриц конечного элемента. Получена система разрешающих уравнений на основе уравнений Лагранжа второго рода относительно вектора узловых перемещений конечно-элементной модели пластины при произвольной динамической нагрузке. В случае гармонической нагрузки с частотой, совпадающей с одной из частот свободных колебаний пластины, возможен переход к модальному уравнению относительно нормальной координаты, соответствующей данной частоте. Проведены численные эксперименты по апробации разработанной конечно-элементной методики на примере шарнирно-опертой удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием, показавшие качественное изменение состава напряжений в демпфирующих слоях пластины на высоких частотах колебаний, существенно влияющее на ее демпфирующие свойства.

© ПНИПУ

© Паймушин Виталий Николаевич – д.ф.-м.н., проф., г.н.с., e-mail: vpajmushin@mail.ru, ID: [0000-0003-4070-2579](https://orcid.org/0000-0003-4070-2579).

Фирсов Вячеслав Анатольевич – д.т.н., проф., e-mail: vafirsov_49@mail.ru, ID: [0000-0002-8948-1570](https://orcid.org/0000-0002-8948-1570).

Шишкин Виктор Михайлович – д.т.н., доц., e-mail: tism1@rambler.ru, ID: [0000-0002-1237-2309](https://orcid.org/0000-0002-1237-2309).

Vitaly N. Paimushin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher, e-mail: vpajmushin@mail.ru, ID: [0000-0003-4070-2579](https://orcid.org/0000-0003-4070-2579).

Vyacheslav A. Firsov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: vafirsov_49@mail.ru, ID: [0000-0002-8948-1570](https://orcid.org/0000-0002-8948-1570).

Viktor M. Shishkin – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: tism1@rambler.ru,

ID: [0000-0002-1237-2309](https://orcid.org/0000-0002-1237-2309).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MODELING A DYNAMIC RESPONSE AT RESONANT VIBRATIONS OF AN ELONGATED PLATE WITH AN INTEGRAL DAMPING COATING

V.N. Paimushin^{1,2}, V.A. Firsov¹, V.M. Shishkin³

¹Kazan National Research Technical University A.N. Tupolev, Kazan, Russian Federation

²Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

³Vyatka State University, Kirov, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 April 2019
Accepted: 17 February 2020
Published: 30 March 2020

Keywords:

plate, integral damping coating, vibrations, resonance, finite element, logarithmic decrement of vibrations.

ABSTRACT

Classical methods of surface damping using free and constraining damping layers are discussed. The structure of a perspective integrated version of a damping coating is presented. This integral damping coating consists of two layers of a material with pronounced viscoelastic properties, between which there is a thin reinforcing layer of a high modulus material. A generalization of the Thompson-Kelvin–Voigt model is given for the description of viscoelastic properties of the material under tension-compression in the case of a complex stress state. A finite-element method was developed to determine the dynamic response of an elongated plate with the integral damping coating. This method is based on a four-layer finite element with 14 degrees of freedom: the main material is within the Kirchhoff-Love's model, the damping layers are in a flat stress state, the reinforcing layer perceives tension and compression. This model allows us to take into account the effect of transverse compression of the damping layers of the plate, which significantly increases its damping properties at high vibration frequencies. The stiffness matrices, the damping matrices, and the mass matrices of the constituent layers aim at obtaining similar complete matrices of a finite element. A system of resolving equations was obtained on the basis of the Lagrange equations of the second kind with respect to the vector of nodal displacements of the finite element model of the plate with an arbitrary dynamic load. In the case of a harmonic load with a frequency that coincides with one of the frequencies of free vibrations of the plate, a transition to a modal equation with respect to the normal coordinate corresponding to the given frequency is possible. Numerical experiments were carried out to test the developed finite element method using the example of a hingedly supported elongated plate with an integral damping coating. The numerical experiments showed a qualitative change in the composition of stresses in the damping layers of the plate at high vibration frequencies, which significantly affects its damping properties.

© PNRPU

Введение

Одним из наиболее опасных режимов динамического деформирования конструкций является резонансный, реализующийся в конструкции при совпадении частот ее собственных колебаний с частотой внешнего циклического воздействия. При таком режиме нагружения, как известно, многократно возрастают амплитудные значения параметров динамического напряженно-деформированного состояния. Корректное и достоверное их теоретическое определение с необходимой для практических целей точностью требует надлежащего учета в расчетных соотношениях демпфирующих свойств материалов конструкции, обусловленных внутренним трением. Методам их определения и построению для их описания соответствующих математических моделей посвящена обширная научная литература [1–12 и др.].

Традиционные конструкционные материалы (металлы и их сплавы), характеризующиеся большими значениями упругих и прочностных параметров, как правило, обладают малыми показателями демпфирующих свойств [9, 10]. В связи с этим для снижения виброактивности и динамической напряженности элементов тонкостенных конструкций широко используются различные по исполнению демпфирующие покрытия [13–16].

В фундаментальной монографии [17] рассмотрен широкий круг вопросов по проблеме демпфирования колебаний реальных конструкций и, в частности, тонкостенных конструкций с использованием поверхностных демпфирующих слоев. Показано влияние на демпфирование различных физических факторов: температуры, частоты колебаний, толщины слоев, уровня нагружения и т.д. Результаты этих исследований легли в основу создания международного стандарта по экспериментальному методу измерения демпфирующих свойств материалов¹.

В качестве материалов для демпфирующих слоев используются эластомеры на основе каучука или термопласты на основе битума с различного рода наполнителями: волокнами, известняком, глиной, усилителем клейкости и т.д. для достижения необходимых характеристик демпфирования [18–20]. При этом классически являются однослойные покрытия со свободным и связанным демпфирующими слоями [17]. В первом случае демпфирование колебаний происходит в основном за счет деформаций растяжения-сжатия, во вто-

¹ ASTM E756-05: Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials, ASTM International, PA, 2010.

ром – за счет поперечного сдвига демпфирующего слоя, что не позволяет эффективно демпфировать колебания во всех областях конструкции при колебаниях на высоких собственных формах.

С этой точки зрения более перспективным является интегрированный вариант демпфирующего покрытия, состоящего по толщине из двух слоев материала с ярко выраженными вязкоупругими свойствами, между которыми располагается тонкий армирующий слой из высококомодульного материала (металлической фольги, углеклани и пр.), обладающего высокой жесткостью при растяжении-сжатии и ничтожной жесткостью на изгиб (рис. 1). При статических и низкочастотных режимах деформирования можно принять классическую модель, в которой связанный слой находится в состоянии однородного поперечного сдвига, а свободный слой – в состоянии неоднородного растяжения-сжатия. Однако при резонансных колебаниях на более высоких частотах напряженно-деформированное состояние демпфирующих слоев может быть качественно другим за счет влияния на него сил инерции, что приводит к необходимости учета всех компонент напряженного состояния при определении рассеяния энергии в демпфирующих слоях пластины.

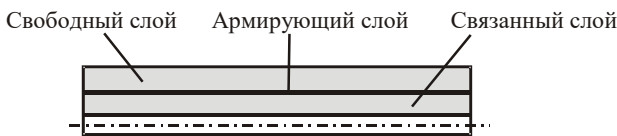


Рис. 1. Структура интегрального демпфирующего покрытия

Fig. 1. The structure of the integral damping coating

1. Физические зависимости для вязкоупругого материала

При динамическом деформировании вязкоупругого материала связь компонент тензора напряжений σ_{ij} с компонентами тензоров деформаций ϵ_{ij} и скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij} = \partial \epsilon_{ij} / \partial t$ может быть представлена в виде зависимостей $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij})$. В случае одноосного напряженно-деформированного состояния простейшая из таких зависимостей соответствует известной модели Кельвина – Фойгта [2, 7, 10, 21 и др.]

$$\sigma = E\epsilon + \beta\dot{\epsilon}. \tag{1.1}$$

Здесь E – динамический модуль упругости [22–24]; β – коэффициент вязкости материала. Рассмотрим случай, когда материал деформируется по гармоническому закону: $\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t$ (ϵ_0 – амплитуда деформации, ω – круговая частота). Найдем площадь петли гистерезиса, образуемой зависимостью (1.1) за один цикл колебаний с периодом T :

$$\Delta W = \int_0^T \sigma d\epsilon = \int_0^T (E\epsilon + \beta\dot{\epsilon}) d\epsilon =$$

$$= \int_0^T (E\epsilon_0 \sin \omega t + \beta\epsilon_0 \omega \cos \omega t) \epsilon_0 \omega \cos \omega t dt = \\ = E\epsilon_0^2 \omega \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt + \beta\epsilon_0^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt. \tag{1.2}$$

Определенные интегралы в (1.2) имеют значения

$$\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0, \quad \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \pi/\omega.$$

С учетом этого получаем $\Delta W = \beta\epsilon_0^2 \pi \omega$. Максимальная энергия за цикл колебаний: $W_{\max} = E\epsilon_0^2/2$. Это дает возможность определить логарифмический декремент колебаний материала (ЛДК) как половину относительного рассеяния энергии в единице объема за один цикл колебаний [2, 7, 9 и др]: $\delta = \Delta W/(2W) = \beta\pi\omega/E$. Отсюда следует усредненный за цикл колебаний коэффициент β , выраженный через ЛДК δ , определяющий демпфирующие свойства материала при растяжении-сжатии:

$$\beta = E\delta/(\pi\omega). \tag{1.3}$$

С учетом (1.3) модель (1.1) принимает вид

$$\sigma = E\epsilon + E\delta\dot{\epsilon}/(\pi\omega). \tag{1.4}$$

Зависимость (1.4) можно обобщить на случай сложного напряженного состояния вязкоупругого материала:

$$\sigma = D\epsilon + D_g \dot{\epsilon}. \tag{1.5}$$

Векторы σ , ϵ содержат компоненты напряженного и деформированного состояний; D , D_g – соответственно матрица жесткости и матрица вязкого демпфирования материала. Для изотропного вязкоупругого материала, находящегося в плоском напряженном состоянии, матрицы D и D_g будут такими:

$$D = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & E\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ E\nu/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}; \tag{1.6}$$

$$D_g = \frac{1}{\pi\omega} \begin{bmatrix} E\delta_\epsilon/(1-\nu^2) & E\delta_\nu\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ E\delta_\nu\nu/(1-\nu^2) & E\delta_\epsilon/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G\delta_\gamma \end{bmatrix}.$$

Здесь E , G , δ_ϵ , δ_ν , δ_γ – динамические модули упругости и ЛДК материала соответственно при растяжении-сжатии и сдвиге; ν – коэффициент Пуассона.

2. Конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием, аппроксимация перемещений и геометрические зависимости

Для моделирования динамической реакции удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием предлагается использовать метод конечных элементов [25–28 и др.]. При этом возможно использо-

вание традиционных подходов, состоящих в представлении пластины по длине и толщине в виде совокупности типовых конечных элементов: основной и демпфирующие слои можно представить прямоугольными элементами [28]; армирующий слой – стержневыми безмоментными элементами. Однако проведенные численные эксперименты при статическом нагружении недемпфированной пластины показали, что для достижения приемлемых результатов число элементов по толщине и длине пластины должно быть достаточно большим. Исходя из этого разработан специальный четырехслойный конечный элемент с 14 степенями свободы (рис. 2): слой 1 (основной материал) работает в рамках гипотез Кирхгофа – Лява; демпфирующие слои 2 и 4 находятся в плоском напряженном состоянии; армирующий слой 3 работает на растяжение-сжатие (толщина данного слоя считается пренебрежимо малой). Независимыми узловыми параметрами элемента являются перемещения u_i, w_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) и углы поворота ϕ_1, ϕ_4 поперечных сечений слоя 1, представляемые вектором

$$\mathbf{r}^{(e)} = \{u_1 \ w_1 \ \phi_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3 \ u_4 \ w_4 \ \phi_4 \ u_5 \ w_5 \ u_6 \ w_6\}.$$

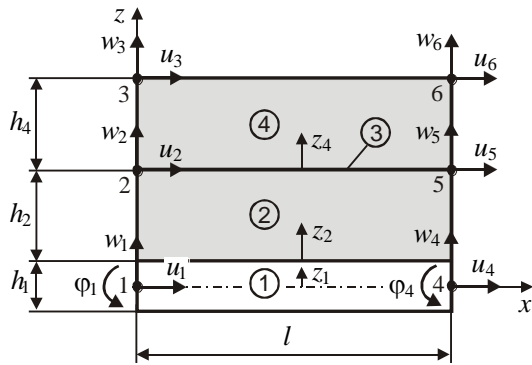


Рис. 2. Конечный элемент удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием

Fig. 2. The finite element of the elongated plate with the integral damping coating

Слой 1 элемента находится в состоянии растяжения-сжатия и изгиба. Для воспроизведения данного состояния перемещения $u^{(1)}, w^{(1)}$ произвольной точки, расположенной на оси данного слоя, аппроксимируются зависимостями

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \{H_1 \ 0 \ 0 \ H_2 \ 0 \ 0\}^T \mathbf{r}^{(1)}, \\ w^{(1)} &= \{0 \ N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4\}^T \mathbf{r}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

с вектором узловых перемещений $\mathbf{r}^{(1)} = \{u_1 \ w_1 \ \phi_1 \ u_4 \ w_4 \ \phi_4\}$ и базисными функциями

$$H_1 = 1 - x/l, \quad H_2 = x/l,$$

$$N_1 = 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3, \quad N_2 = x - 2x^2/l + x^3/l^2,$$

$$N_3 = 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3; \quad N_4 = -x^2/l + x^3/l^2.$$

Деформация $\epsilon_x^{(1)}$ в точке, расположенной на расстоянии z_1 от оси слоя 1, определяется геометрической зависимостью

$$\epsilon_x^{(1)} = \frac{d}{dx}(u^{(1)} - \phi^{(1)}z_1) = \frac{d}{dx}(u^{(1)} - w^{(1)}z_1) = u'^{(1)} - w''^{(1)}z_1.$$

С учетом аппроксимаций (2.1) последнюю зависимость можно привести к виду

$$\epsilon_x^{(1)} = (\mathbf{B}^{(1)})^T \mathbf{r}^{(1)}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{B}^{(1)} = \{H'_1 \ 0 \ 0 \ H'_2 \ 0 \ 0\} - \{0 \ N'_1 \ N''_2 \ 0 \ N'_3 \ N''_4\}z_1.$$

Перемещения $u^{(2)}, w^{(2)}$ произвольной точки слоя 2 с координатами x, z_2 аппроксимируются билинейными зависимостями:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \left[\left(u_1 - \phi_1 \frac{h_1}{2} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \left(u_4 - \phi_4 \frac{h_1}{2} \right) \frac{x}{l} \right] \times \\ &\times \left(1 - \frac{z_2}{h_2} \right) + \left[u_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + u_5 \frac{x}{l} \right] \frac{z_2}{h_2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} w^{(2)} &= \left[w_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_4 \frac{x}{l} \right] \left(1 - \frac{z_2}{h_2} \right) + \\ &+ \left[w_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_5 \frac{x}{l} \right] \frac{z_2}{h_2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Деформации $\epsilon_x^{(2)}, \epsilon_z^{(2)}$ и угол сдвига $\gamma_{xz}^{(2)}$ рассматриваемого слоя определяются геометрическими зависимостями:

$$\epsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}, \quad \epsilon_z^{(2)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z_2}, \quad \gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_2}.$$

С учетом аппроксимаций (2.3) и (2.4) величины $\epsilon_x^{(2)}, \epsilon_z^{(2)}$ и угол сдвига $\gamma_{xz}^{(2)}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(2)} \\ \epsilon_z^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^{(2)}] \mathbf{r}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(2)} \ | \ \mathbf{B}_2^{(2)}] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1^{(e)} \\ \mathbf{r}_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{B}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -(1-z_2/h_2)/l & 0 & h_1(1-z_2/h_2)/(2l) & -z_2/(h_2l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-x/l)/h_2 & 0 & 0 & (1-x/l)/h_2 & 0 & 0 \\ -(1-x/l)/h_2 & -(1-z_2/h_2)/l & (1-x/l)h_1/(2h_2) & (1-x/l)/h_2 & -z_2/(h_2l) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} (1-z_2/h_2)/l & 0 & -h_1(1-z_2/h_2)/(2l) & z_2/(h_2l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x/(h_2l) & 0 & 0 & x/(h_2l) & 0 & 0 \\ -x/(h_2l) & (1-z_2/h_2)/l & xh_1/(2h_2l) & x/(h_2l) & z_2/(h_2l) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{r}_1^{(e)} = \{u_1 \ w_1 \ \phi_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3\}, \quad \mathbf{r}_2^{(e)} = \{u_4 \ w_4 \ \phi_4 \ u_5 \ w_5 \ u_6 \ w_6\}.$$

Перемещение $u^{(3)}$ произвольной точки армирующего слоя 3 аппроксимируется зависимостью $u^{(3)} =$

$= u_2(1-x/l) + u_5x/l$, которая дает постоянную в пределах элемента деформацию

$$\varepsilon_x^{(3)} = \frac{1}{l} \{-1 \ 1\}^T \mathbf{r}^{(3)}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_5 \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

Перемещения $u^{(4)}$, $w^{(4)}$ точки слоя 4 с координатами x , z_4 представляются зависимостями:

$$u^{(4)} = \left[u_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + u_5 \frac{x}{l} \right] \left(1 - \frac{z_4}{h_4} \right) + \left[u_3 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + u_6 \frac{x}{l} \right] \frac{z_4}{h_4}, \quad (2.9)$$

$$w^{(4)} = \left[w_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_5 \frac{x}{l} \right] \times \left(1 - \frac{z_4}{h_4} \right) + \left[w_3 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + w_6 \frac{x}{l} \right] \frac{z_4}{h_4}. \quad (2.10)$$

Деформации $\varepsilon_x^{(4)}$, $\varepsilon_z^{(4)}$ и угол сдвига $\gamma_{xz}^{(4)}$ рассматриваемого слоя определяются геометрическими зависимостями:

$$\varepsilon_x^{(4)} = \frac{\partial u^{(4)}}{\partial x}; \quad \varepsilon_z^{(4)} = \frac{\partial w^{(4)}}{\partial z_4}; \quad \gamma_{xz}^{(4)} = \frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(4)}}{\partial z_4}.$$

С учетом представлений (2.9) и (2.10) получаем связь $\varepsilon_x^{(4)}$, $\varepsilon_z^{(4)}$ и $\gamma_{xz}^{(4)}$ с узловыми перемещениями $\mathbf{r}^{(e)}$ конечного элемента:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(4)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(4)} \\ \varepsilon_z^{(4)} \\ \gamma_{xz}^{(4)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^{(4)}] \mathbf{r}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(4)} \mid \mathbf{B}_2^{(4)}] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1^{(e)} \\ \mathbf{r}_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B}_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1-z_4/h_4)/l & 0 & -z_4/(h_4l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-x/l)/h_4 & 0 & (1-x)/h_4 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-x/l)/h_4 & -(1-z_4/h_4)/l & (1-x/l)/h_4 & -z_4/(h_4l) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{B}_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1-z_4/h_4)/l & 0 & z_4/(h_4l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x/(h_4l) & 0 & x/(h_4l) \\ 0 & 0 & 0 & -x/(h_4l) & (1-z_4/h_4)/l & x/(h_4l) & z_4/(h_4l) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

3. Формирование матрицы жесткости, матрицы демпфирования и матрицы масс конечного элемента

Матрица жесткости, матрица демпфирования и матрица масс элемента получаются путем прямого сложения соответствующих вкладов слоев, формируемых относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(e)}$:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}^{(i)}; \quad \mathbf{C}^{(e)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}^{(i)}; \quad \mathbf{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{M}^{(i)}.$$

Матрицы $\mathbf{K}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, 4$) можно получить из выражений для потенциальной энергии деформации $U^{(i)}$ соответствующих слоев элемента. Найдем $U^{(1)}$:

$$U^{(1)} = 0,5bE_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_0^l (\varepsilon_x^{(1)})^2 dx dz_1. \quad (3.1)$$

Здесь b – ширина элемента, E_1 – динамический модуль упругости материала первого слоя. Величину $(\varepsilon_x^{(1)})^2$ с учетом (2.2) можно представить в виде

$$(\varepsilon_x^{(1)})^2 = (\mathbf{r}^{(1)})^T \mathbf{B}^{(1)} (\mathbf{B}^{(1)})^T \mathbf{r}^{(1)}.$$

Подставляя последнее выражение в (3.1), получаем

$$U^{(1)} = 0,5bE_1 (\mathbf{r}^{(1)})^T \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_0^l \mathbf{B}^{(1)} (\mathbf{B}^{(1)})^T dx dz_1 \mathbf{r}^{(1)}.$$

После нахождения определенных интегралов выражение для $U^{(1)}$ можно привести к виду

$$U^{(1)} = 0,5(\mathbf{r}^{(1)})^T \mathbf{K}_0^{(1)} \mathbf{r}^{(1)},$$

где $\mathbf{K}_0^{(1)}$ – матрица жесткости первого слоя относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(1)}$:

$$\mathbf{K}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} EF_1/l & 0 & 0 & -EF_1/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_1/l^3 & 6EI_1/l^2 & 0 & -12EI_1/l^3 & 6EI_1/l^2 \\ 0 & 6EI_1/l^2 & 4EI_1/l & 0 & -6EI_1/l^2 & 2EI_1/l \\ -EF_1/l & 0 & 0 & EF_1/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_1/l^3 & -6EI_1/l^2 & 0 & 12EI_1/l^3 & -6EI_1/l^2 \\ 0 & 6EI_1/l^2 & 2EI_1/l & 0 & -6EI_1/l^2 & 4EI_1/l \end{bmatrix},$$

$$EF_1 = E_1bh_1, \quad EI_1 = E_1bh_1^3/12.$$

Для перехода к матрице $\mathbf{K}^{(1)}$ относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(e)}$ всего элемента необходимо воспользоваться преобразованием

$$\mathbf{K}^{(1)} = (\mathbf{L}^{(1)})^T \mathbf{K}_0^{(1)} \mathbf{L}^{(1)},$$

где $\mathbf{L}^{(1)}$ – матрица связи вектора $\mathbf{r}^{(1)}$ с вектором $\mathbf{r}^{(e)}$:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{r}^{(e)}; \quad \mathbf{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потенциальная энергия деформации второго и четвертого слоев элемента:

$$U^{(i)} = 0,5b \int_0^l \int_{-h_i/2}^{h_i/2} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} dx dz_i \quad (i=2, 4). \quad (3.3)$$

Матрицы жесткости материала $\mathbf{D}^{(i)}$ имеют вид

$$\mathbf{D}^{(i)} = \begin{bmatrix} E_i/(1-\nu_i^2) & E_i\nu_i/(1-\nu_i^2) & 0 \\ E_i\nu_i/(1-\nu_i^2) & E_i/(1-\nu_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_i \end{bmatrix}.$$

Выражение (3.3) с учетом зависимостей (2.5) и (2.11) можно записать как

$$U^{(i)} = 0,5(\mathbf{r}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{r}^{(e)} \quad (i = 2, 4),$$

где

$$\mathbf{K}^{(i)} = b \int_0^{h_i} \int_0^l (\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} dx dz_i \quad (3.4)$$

есть вклад слоя i в матрицу жесткости $\mathbf{K}^{(e)}$ конечного элемента.

Введем замену координат:

$$x = (1 + \xi)l/2; \quad z_i = (1 + \eta)h_i/2; \quad -1 \leq \xi \leq 1; \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (3.5)$$

С учетом этого выражение (3.5) принимает вид

$$\mathbf{K}^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} d\xi d\eta. \quad (3.6)$$

Интеграл в (3.6) находится численно. Из выражений (2.6), (2.7), (2.12), (2.13) и введенной замены (3.5) следует, что произведение $(\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)}$ под интегралом квадратично зависит от координат ξ, η . В этом случае для точного вычисления интеграла следует использовать квадратурную формулу Гаусса с двумя точками по каждому координатному направлению [25, 29, 30]:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (\mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n) P_m Q_n. \quad (3.7)$$

Здесь $\xi_1 = \eta_1 = -0,57735$, $\xi_2 = \eta_2 = 0,57735$ – координаты точек Гаусса, $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 1$ – весовые множители.

Потенциальная энергия деформации третьего (армирующего) слоя

$$U^{(3)} = 0,5EF_3 \int_0^l (\varepsilon_x^{(3)})^2 dx.$$

Здесь EE_3 – динамическая жесткость слоя при растяжении-сжатии. С учетом соотношения (2.8) выражение для $U^{(3)}$ приводится к виду

$$U^{(3)} = 0,5(\mathbf{r}^{(3)})^T \mathbf{K}_0^{(3)} \mathbf{r}^{(3)},$$

где

$$\mathbf{K}_0^{(3)} = \frac{EF_3}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

есть матрица жесткости армирующего слоя относительно узловых перемещений $\mathbf{r}^{(3)} = \{u_2, u_5\}$. Для перехода к матрице $\mathbf{K}^{(3)}$ относительно вектора узловых перемещений $\mathbf{r}^{(e)}$ всего элемента необходимо воспользоваться преобразованием

$$\mathbf{K}^{(3)} = (\mathbf{L}^{(3)})^T \mathbf{K}_0^{(3)} \mathbf{L}^{(3)},$$

где $\mathbf{L}^{(3)}$ – матрица связи вектора $\mathbf{r}^{(3)}$ с вектором $\mathbf{r}^{(e)}$:

$$\mathbf{r}^{(3)} = \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{r}^{(e)}; \quad \mathbf{L}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T.$$

Перейдем к определению матриц демпфирования $\mathbf{C}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) слоев элемента. Матрицы демпфирования слоев 1 и 3 (если учитывать их демпфирующие свойства), как следует из (1.4), могут быть получены путем умножения матриц жесткости $\mathbf{K}^{(i)}$ ($i = 1, 3$) соответственно на величины $\delta_i/(\pi\omega)$, где δ_i – ЛДК материала данных слоев при циклическом растяжении-сжатии:

$$\mathbf{C}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} \delta_i/(\pi\omega).$$

Матрицы демпфирования слоев 2 и 4 получаются путем замены в соотношении (3.7) матриц $\mathbf{D}^{(i)}$ ($i = 2, 4$) матрицами $\mathbf{D}_g^{(i)}$, определяемыми согласно второму выражению в (1.6):

$$\mathbf{C}^{(i)} = \frac{bh_i l}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (\mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T \mathbf{D}_g^{(i)} \mathbf{B}^{(i)}(\xi_m, \eta_n) P_m Q_n.$$

При формировании матриц масс $\mathbf{M}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) слоев элемента считается, что их кинетическая энергия $T^{(i)}$ определяется только скоростями $\dot{w}^{(i)}$ в направлении оси $1z$ (см. рис. 2). Для представления данных скоростей используются аппроксимации:

$$\dot{w}^{(1)} = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{r}}^{(1)}, \quad \mathbf{N} = \{0 \ N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4\}, \quad (3.8)$$

$$\dot{w}^{(i)} = (\mathbf{N}^{(i)})^T \dot{\mathbf{r}}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_1^{(i)} \\ \mathbf{N}_2^{(i)} \end{Bmatrix}^T \dot{\mathbf{r}}^{(e)} \quad (i = 2, 4), \quad (3.9)$$

$$\dot{w}^{(3)} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{Bmatrix}, \quad H_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad H_2 = \frac{x}{l}. \quad (3.10)$$

Векторы $\mathbf{N}^{(i)}$ состоят из блоков $\mathbf{N}_1^{(i)}$ и $\mathbf{N}_2^{(i)}$:

$$\mathbf{N}_1^{(2)} = \left\{ 0 \ \left| \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{z_2}{h_2} \right) \right| \ 0 \ \left| \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{z_2}{h_2} \right| \ 0 \ \left| 0 \right. \right\}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{N}_2^{(2)} = \left\{ 0 \ \left| \frac{x}{l} \left(1 - \frac{z_2}{h_2} \right) \right| \ 0 \ \left| \frac{x}{l} \frac{z_2}{h_2} \right| \ 0 \ \left| 0 \right. \right\}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{N}_1^{(4)} = \left\{ 0 \ \left| 0 \ \left| 0 \ \left| \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{z_4}{h_4} \right) \right| \ 0 \ \left| \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{z_4}{h_4} \right| \right. \right\}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{N}_2^{(4)} = \left\{ 0 \ \left| 0 \ \left| 0 \ \left| \frac{x}{l} \left(1 - \frac{z_4}{h_4} \right) \right| \ 0 \ \left| \frac{x}{l} \frac{z_4}{h_4} \right| \right. \right\}. \quad (3.14)$$

Найдем кинетическую энергию первого слоя:

$$T^{(1)} = 0,5 m_1 \int_0^l (\dot{w}^{(1)})^2 dx.$$

Здесь $m_1 = \rho_1 b h_1$ – погонная масса слоя (ρ_1 – плотность материала). С учетом (3.8) выражение для $T^{(1)}$ принимает вид

$$T^{(1)} = 0,5 m_1 (\dot{\mathbf{r}}^{(1)})^T \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \dot{\mathbf{r}}^{(1)}.$$

Отсюда следует матрица масс первого слоя относительно узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(1)}$:

$$\mathbf{M}_0^{(1)} = m_1 \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx.$$

После нахождения определенного интеграла получаем

$$\mathbf{M}_0^{(1)} = m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13l/35 & 11l^2/210 & 0 & 9l/70 & -13l^2/420 \\ 0 & 11l^2/210 & l^3/105 & 0 & 13l^2/420 & -l^3/140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9l/70 & 13l^2/420 & 0 & 13l/35 & -11l^2/210 \\ 0 & -13l^2/420 & -l^3/140 & 0 & -11l^2/210 & l^3/105 \end{bmatrix}.$$

Для перехода к матрице $\mathbf{M}^{(1)}$ относительно вектора узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$ элемента необходимо использовать преобразование

$$\mathbf{M}^{(1)} = (\mathbf{L}^{(1)})^T \mathbf{M}_0^{(1)} \mathbf{L}^{(1)}$$

с матрицей $\mathbf{L}^{(1)}$, определяемой выражениями (3.2).

Кинетическая энергия второго и четвертого слоев элемента

$$T^{(i)} = 0,5 b \rho_i \int_0^h \int_0^l (\dot{w}^{(i)})^2 dx dz_i \quad (i = 2, 4).$$

С учетом представления (3.9) выражение для $T^{(i)}$ можно привести к виду

$$T^{(i)} = 0,5 (\dot{\mathbf{r}}^{(e)})^T \mathbf{M}^{(i)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)},$$

где

$$\mathbf{M}^{(i)} = b \rho_i \int_0^h \int_0^l \mathbf{N}^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^T dx dz_i$$

есть матрица масс слоя i ($i = 2, 4$) элемента относительно узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$. Перейдем к безразмерным координатам ξ, η , используя замену (3.5):

$$\mathbf{M}^{(i)} = \frac{b l h_i \rho_i}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^T d\xi d\eta. \quad (3.15)$$

Из выражений (3.5), (3.9) и (3.11)–(3.14) видно, что произведение $\mathbf{N}^{(i)} (\mathbf{N}^{(i)})^T$ в (3.15) квадратично зависит от координат ξ, η . Для вычисления определенного интеграла берется квадратурная формула Гаусса с двумя точками по каждой координате:

$$\mathbf{M}^{(i)} = \frac{b l h_i \rho_i}{4} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \mathbf{N}^{(i)}(\xi_m, \eta_n) (\mathbf{N}^{(i)}(\xi_m, \eta_n))^T P_m Q_n$$

при $\xi_1 = \eta_1 = -0,57735$, $\xi_2 = \eta_2 = 0,57735$ и $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 1$.

Кинетическая энергия третьего слоя

$$T^{(3)} = 0,5 m_3 \int_0^l (\dot{w}^{(3)})^2 dx.$$

Здесь m_3 – погонная масса слоя. С учетом (3.10) выражение для $T^{(3)}$ можно привести к виду

$$T^{(3)} = 0,5 \begin{Bmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{Bmatrix}^T \mathbf{M}_0^{(3)} \begin{Bmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{Bmatrix},$$

где

$$\mathbf{M}_0^{(3)} = m_3 \int_0^l \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix}^T dx = \frac{m_3 l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

есть матрица масс третьего слоя относительно узловых скоростей \dot{w}_2, \dot{w}_5 . Для перехода к вектору узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$ всего элемента используется преобразование

$$\mathbf{M}^{(3)} = (\mathbf{L}^{(3)})^T \mathbf{M}_0^{(3)} \mathbf{L}^{(3)},$$

где $\mathbf{L}^{(3)}$ – матрица связи скоростей \dot{w}_2 и \dot{w}_5 с вектором $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_5 \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^{(3)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)}; \quad \mathbf{L}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}^T.$$

4. Формирование системы разрешающих уравнений

Предположим, что внешняя нагрузка приведена к узлам элемента и представлена вектором $\mathbf{P}^{(e)}(t)$. Для получения уравнений движения конечного элемента воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода, беря в качестве обобщенных координат его узловые перемещения $\mathbf{r}^{(e)}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \mathbf{r}^{(e)}} = \mathbf{Q}^{(e)}. \quad (4.1)$$

Здесь $T^{(e)}$, $\mathbf{Q}^{(e)}$ – соответственно кинетическая энергия и вектор обобщенных сил, учитывающий упругие, демпфирующие и внешние узловые силы конечного элемента.

Выражение для $T^{(e)}$ можно представить в виде однородной квадратичной формы узловых скоростей $\dot{\mathbf{r}}^{(e)}$ элемента:

$$T^{(e)} = 0,5 (\dot{\mathbf{r}}^{(e)})^T \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)}.$$

Это дает

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{(e)}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)}) = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{r}}^{(e)}, \quad \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \mathbf{r}^{(e)}} = 0. \quad (4.2)$$

Вектор $\mathbf{Q}^{(e)}$ в (4.1) можно определить с использованием выражения

$$\mathbf{Q}^{(e)} = -\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \mathbf{r}^{(e)}} - \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{(e)}} + \mathbf{P}^{(e)}(t), \quad (4.3)$$

где $U^{(e)}$, $\Phi^{(e)}$ – потенциальная энергия деформации конечного элемента и диссипативная функция Релея, представляемые в виде соответствующих квадратичных форм:

$$U^{(e)} = 0,5(\mathbf{r}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{r}^{(e)}, \quad \Phi^{(e)} = 0,5(\dot{\mathbf{r}}^{(e)})^T \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)}.$$

С учетом этого выражение (4.3) принимает вид

$$\mathbf{Q}^{(e)} = -\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{r}^{(e)} - \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)} + \mathbf{P}^{(e)}(t). \quad (4.4)$$

После подстановки (4.2) и (4.4) в (4.1) приходим к системе дифференциальных уравнений движения конечного элемента

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{r}}^{(e)} + \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{r}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{r}^{(e)} = \mathbf{P}^{(e)}(t). \quad (4.5)$$

Объединяя уравнения (4.5) по всем конечным элементам методом прямой жесткости [31, 32], получаем уравнение движения конечно-элементной модели пластины:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{P}(t). \quad (4.6)$$

Здесь \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , \mathbf{r} , $\mathbf{P}(t)$ – соответственно матрица масс, матрица демпфирования, матрица жесткости, вектор узловых перемещений и вектор внешних узловых сил отмеченной модели. Уравнения (4.6) можно использовать без каких-либо ограничений для анализа всевозможных динамических процессов. Рассмотрим резонансные колебания при действии нагрузки $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{ipt}$ с амплитудой \mathbf{P}_0 и частотой $p = \omega_j$, где ω_j – одна из частот свободных колебаний пластины. В этом случае колебания пластины происходят по форме (моде) \mathbf{F}_j , соответствующей частоте ω_j :

$$\mathbf{r} = s_j(t) \mathbf{F}_j, \quad (4.7)$$

где $s_j(t)$ – нормальная координата. Подставляя (4.7) в систему (4.6) при $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{i\omega_j t}$ и применяя после этого процедуру метода Бубнова – Галеркина, получаем уравнение относительно координаты $s_j(t)$:

$$m_j \ddot{s}_j + c_j \dot{s}_j + k_j s_j = p_{0,j} e^{ipt} \quad (4.8)$$

с модальными параметрами

$$m_j = \mathbf{F}_j^T \mathbf{M} \mathbf{F}_j, \quad c_j = \mathbf{F}_j^T \mathbf{C} \mathbf{F}_j, \quad k_j = \mathbf{F}_j^T \mathbf{K} \mathbf{F}_j, \quad p_{0,j} = \mathbf{F}_j^T \mathbf{P}_0.$$

Решение уравнения (4.8) будем искать в виде

$$s_j(t) = s_{0,j} e^{i(pt - \varphi_j)}, \quad (4.9)$$

где φ_j – сдвиг фазы нормальной координаты $s_j(t)$ относительно вектора нагрузки $\mathbf{P}_0 e^{ipt}$. Подставляя (4.9) в уравнение (4.8) и сокращая после этого общий множитель e^{ipt} , приходим к системе уравнений

$$\begin{bmatrix} k_j - p^2 m_j & p c_j \\ p c_j & -k_j + p^2 m_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{a,j} \\ s_{b,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{0,j} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.10)$$

где $s_{a,j} = s_{0,j} \cos \varphi_j$, $s_{b,j} = s_{0,j} \sin \varphi_j$. Из системы (4.10) находятся составляющие $s_{a,j}$ и $s_{b,j}$, по которым можно определить амплитуду $q_{0,j}$ и $\text{tg} \varphi_j$:

$$s_{0,j} = \sqrt{s_{a,j}^2 + s_{b,j}^2}; \quad \text{tg} \varphi_j = s_{b,j} / s_{a,j}.$$

Уравнения (4.10) могут быть использованы для построения амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик пластины при колебаниях в резонансной зоне (при частоте $p = \omega_j$ и незначительном отклонении ее от ω_j). При $p = \omega_j$ в силу равенства $\omega_j^2 = k_j / m_j$ диагональные элементы матрицы системы (4.10) обнуляются, и тогда $s_{a,j} = 0$, $s_{0,j} = s_{b,j} = p_{0,j} / p c_j$, $\varphi_j = \pi/2$.

Частоты ω_j и формы \mathbf{F}_j свободных колебаний пластины можно определить из системы однородных уравнений [29, 33 и др.]

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{F} = 0, \quad (4.11)$$

составляющей содержание обобщенной проблемы собственных значений и собственных векторов совокупности матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} . Собственными значениями являются квадраты частот ω_j , собственными векторами – формы \mathbf{F}_j . Для решения проблемы (4.11) можно воспользоваться известным методом Якоби [34, 35 и др.], реализуемым встроенными функциями (решателями) популярных пакетов компьютерной математики MATLAB, Mathcad, Mathematica. Однако эти функции дают полный спектр собственных форм и частот, из которых практический интерес представляют лишь несколько низших собственных пар (форм и частот). Поэтому предпочтительными будут методы, основанные на итерировании матриц [29, 33, 36], из которых наиболее подходящим является метод итераций в подпространстве [29, 33], позволяющий итерировать одновременно несколько низших форм и частот. В работе [37] изложены меры, направленные на обеспечение безусловной устойчивости и повышение скорости сходимости отмеченного метода.

Остановимся на вопросе определения амплитуд напряжений в вязкоупругих (демпфирующих) слоях пластины и ее ЛДК δ_j при резонансных колебаниях по

форме \mathbf{F}_j . Для определения амплитуд напряжений в демпфирующих слоях 2, 4 конечных элементов в качестве исходных можно использовать физические зависимости

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,j}^{(i)} = \mathbf{D}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_{0,j}^{(i)} \quad (i = 2, 4). \quad (4.12)$$

Амплитуды деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{0,j}^{(i)}$ определяются через амплитуды узловых перемещений $\mathbf{r}_{0,j}^{(e)}$ конечных элементов с использованием геометрических соотношений

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{0,j}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} \mathbf{r}_{0,j}^{(e)} \quad (i = 2, 4) \quad (4.13)$$

с матрицами связи $\mathbf{B}^{(i)} = [\mathbf{B}_1^{(i)} \mid \mathbf{B}_2^{(i)}]$, блоки которых определяются выражениями (2.6), (2.7) (для $i = 2$) и (2.12), (2.13) (для $i = 4$). Векторы $\mathbf{r}_{0,j}^{(e)}$ определяются выражением

$$\mathbf{r}_{0,j}^{(e)} = q_{0,j} \mathbf{F}_j^{(e)}, \quad (4.14)$$

где $\mathbf{F}_j^{(e)}$ – компоненты формы \mathbf{F}_j , относящиеся к рассматриваемому конечному элементу. С учетом (4.13) и (4.14) зависимости (4.12) принимают вид

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,j}^{(i)} = q_{0,j} \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} \mathbf{F}_j^{(e)} \quad (i = 2, 4).$$

Величина δ_j определяется выражением $\delta_j = \Delta W_j / (2W_j)$, где ΔW_j и W_j – соответственно рассеянная и максимальная энергии в объеме пластины за один цикл резонансных колебаний по форме \mathbf{F}_j :

$$\Delta W_j = \pi \omega_j (\mathbf{r}_{0,j})^T \mathbf{C}_j \mathbf{r}_{0,j}; \quad W_j = 0,5 (\mathbf{r}_{0,j})^T \mathbf{K} \mathbf{r}_{0,j}.$$

5. Численные эксперименты

Для проведения численных экспериментов выбрана удлиненная шарнирно-опертая пластина с интегральным демпфирующим покрытием (рис. 3). На пластину действует погонная нагрузка $q(t) = q_0 \sin pt$ с амплитудой $q_0 = 0,08$ кН/м и частотой p , совпадающей с одной из собственных частот ω_j . Геометрические параметры пластины: длина $L = 200$ мм; ширина $b = 20$ мм; толщина $h_1 = 1$ мм. Толщины демпфирующих слоев: $h_2 = h_4 = 1,8$ мм. Армирующий слой имеет толщину $h_3 = 0,12$ мм. Материал пластины – алюминиевый сплав Д16АТ с динамическим модулем упругости $E = 5,54 \cdot 10^4$ МПа, ЛДК при растяжении-сжатии $\delta = 0,005$ и плотностью $\rho = 2700$ кг/м³. Материал демпфирующих слоев – техническая резина. Динамические модули упругости и ЛДК резины при растяжении-сжатии и сдвиге (по данным работы [22]): $E = 20,1$ МПа; $G = 2,6$ МПа, $\delta_\varepsilon = 1,23$, $\delta_\gamma = 1,1$. Плотность резины $\rho = 1345$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,49$. Армирующий слой – углерента ЭЛУР-П (динамический модуль упругости $E = 10,5 \cdot 10^4$ МПа, ЛДК при растяжении-сжатии $\delta = 0,006$, плотность $\rho = 1200$ кг/м³). Пластина разбивалась на 100 конечных элементов одинаковой длины.

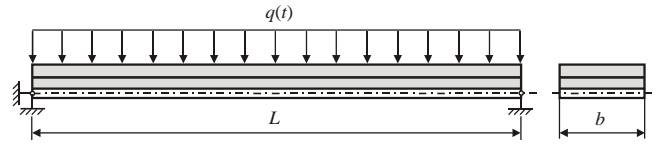
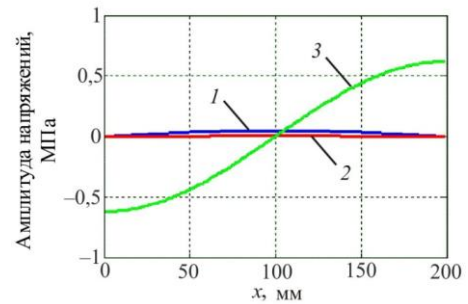


Рис. 3. Удлиненная пластина с интегральным демпфирующим покрытием

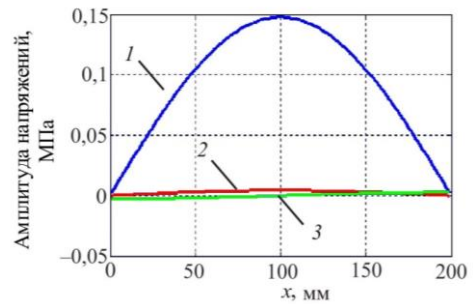
Fig. 3. An elongated plate with the integral damping coating

Определялось напряженно-деформированное состояние пластины при резонансных колебаниях по нескольким нечетным формам \mathbf{F}_j (четные формы не рассматривались, так как модальные силы $p_{0,j}$ от нагрузки $q(t)$ в уравнении (4.8) на данных формах для шарнирно-опертой пластины получаются нулевыми).

На рис. 4, 5 приведены амплитуды нормальных напряжений $\sigma_{x,0}$, $\sigma_{z,0}$ и касательного напряжения $\tau_{xz,0}$ в срединных поверхностях связанного и свободного демпфирующих слоев при резонансных колебаниях пластины соответственно по первой и седьмой формам.



a



b

Рис. 4. Амплитуды напряжений в связанном (а) и свободном (б) демпфирующих слоях пластины при резонансных колебаниях по первой форме: 1 – $\sigma_{x,0}$; 2 – $\sigma_{z,0}$; 3 – $\tau_{xz,0}$

Fig. 4. The amplitudes of the stresses in the bound (a) and free (b) damping plate layers with resonant oscillations in the first form:

$$1 - \sigma_{x,0}; \quad 2 - \sigma_{z,0}; \quad 3 - \tau_{xz,0}$$

Анализ данных результатов показывает, что при резонансных колебаниях пластины по первой (основной) форме в связанном слое доминируют касательные напряжения τ_{xz} (рис. 4, а), а в свободном слое в преобладают нормальные напряжения σ_x (рис. 4, б). При

колебаниях по седьмой форме в связанном слое на фоне напряжений τ_{xz} появляются значительные напряжения σ_x и σ_z (рис. 5, а) (амплитуда $\sigma_{x,0}$ составляет приблизительно 63 % от величины $\tau_{xz,0}$, а амплитуда напряжения $\sigma_{z,0}$ почти сравнивается с $\tau_{xz,0}$). В свободном слое (рис. 5, б) кроме напряжения σ_x появляются значительные напряжения σ_z и τ_{xz} , из которых наиболее существенным является напряжение σ_z от поперечного обжатия слоя.

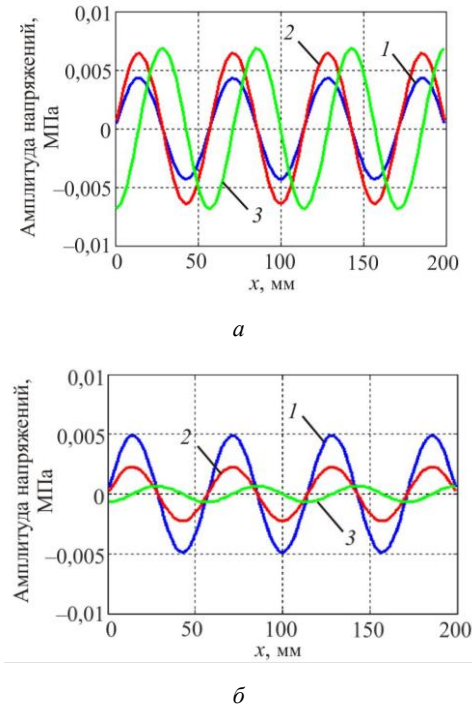


Рис. 5. Амплитуды напряжений в связанном (а) и свободном (б) демпфирующих слоях пластины при резонансных колебаниях по седьмой форме: 1 – $\sigma_{x,0}$; 2 – $\sigma_{z,0}$; 3 – $\tau_{xz,0}$

Fig. 5. The amplitudes of the stresses in the bound (а) and free (б) damping plate layers with resonant vibrations in the seventh form:

1 – $\sigma_{x,0}$; 2 – $\sigma_{z,0}$; 3 – $\tau_{xz,0}$

В табл. 1 приведены циклические частоты $f_j = \omega_j / (2\pi)$ свободных колебаний пластины, найденные из системы (4.10) методом итераций в подпространстве, и ЛДК δ_j при резонансных колебаниях по 8 нечетным формам \mathbf{F}_j . Наблюдаемое увеличение значений δ_j на высоких формах колебаний (начиная с 11-й формы) можно объяснить влиянием нормальных напряжений σ_z на общий уровень демпфирования пластины, возникающих за счет сил инерции в демпфирующих слоях, что важно при решении задач прохождения звуковых волн через конструкции с вязкоупругими демпфирующими слоями и покрытиями. Для сравнения в последнем столбце табл. 1 приведены ЛДК δ_j^* , полученные без учета рассеяния энергии за счет нормальных

напряжений σ_z при поперечном обжатии демпфирующих слоев пластины. Значения δ_j^* , полученные без учета влияния σ_z , по мере увеличения номера формы колебаний становятся существенно меньше ЛДК δ_j , найденных с учетом всех трех компонент напряженного состояния.

Таблица 1

Циклические частоты f_j свободных колебаний пластины и ЛДК δ_j при резонансных колебаниях по формам \mathbf{F}_j

Table 1

The cyclic frequencies f_j of free plate oscillations and LVDs δ_j at resonance oscillations in the forms of \mathbf{F}_j

j	f_j , Гц	δ_j	δ_j^*
1	70,1	0,576	0,575
3	358,7	0,436	0,435
5	859,1	0,239	0,237
7	1594,3	0,157	0,148
9	2554,9	0,137	0,106
11	3705,8	0,165	0,086
13	4974,3	0,243	0,078
15	6241,5	0,382	0,076

Для оценки достоверности полученных результатов проверено условие выполнения энергетического баланса, состоящего в равенстве рассеянной энергии $\Delta W_j = \pi \omega_j (\mathbf{r}_{0,j})^T \mathbf{C}_j \mathbf{r}_{0,j}$ в объеме пластины за один цикл колебаний работе внешних сил $A_j = \pi \mathbf{P}_0^T \mathbf{r}_{0,j}$. В табл. 2 приведены результаты проверки условия $\Delta W_j = A_j$ при резонансных колебаниях пластины по первым трем нечетным формам \mathbf{F}_j .

Таблица 2

Результаты проверки условия $\Delta W_j = A_j$

Table 2

The test results of condition $\Delta W_j = A_j$

j	ΔW_j , Дж	A_j , Дж
1	0,596601	0,596601
3	0,003333	0,003333
5	0,000382	0,000382

Выводы

1. Дано обобщение модели Томпсона-Кельвина – Фойгта для описания вязкоупругих свойств материала при растяжении-сжатии на случай сложного напряженного состояния для учета упругих и демпфирующих свойств материала вязкоупругих слоев интегрального демпфирующего покрытия пластины.

2. Разработана конечно-элементная методика определения динамической реакции удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием на основе четырехслойного конечного элемента с 14 степенями

свободы: основной материал работает в рамках гипотез Кирхгофа – Лява, демпфирующие слои находятся в плоском напряженном состоянии, армирующий слой работает на растяжение-сжатие.

3. Проведены численные эксперименты по апробации разработанной методики на примере удлиненной шарнирно-опертой пластины с интегральным демпфирующим покрытием, состоящим из двух слоев технической резины, между которыми расположен тонкий армирующий слой из углеленты ЭЛУР-П. Выявлено существенное возрастание поперечного напряжения σ_z в демпфирующих слоях пластины при высоких частотах колебаний, приводящее к увеличению ее демпфирующих свойств.

Библиографический список

1. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // Журнал технической физики. – 1938. – Т. 8, вып. 6. – С. 483–499.
2. Дубенец В.Г., Хильчевский В.В. Колебания демпфированных композитных конструкций. – Киев: Вища школа, 1995. – 210 с.
3. Зинер К. Упругость и неупругость металлов. – М.: Иностранная литература, 1954. – 300 с.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
5. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наукова думка, 1985. – 263 с.
6. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
7. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
8. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наукова думка, 1970. – 377 с.
9. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 375 с.
10. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. – М.: Металлургия, 1969. – 330 с.
11. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 129 с.
12. Яковлев А.П. Диссипативные свойства неоднородных материалов и систем. – Киев: Наукова думка, 1985. – 248 с.
13. Чернышев В.М. Демпфирование колебаний механических систем покрытиями из полимерных материалов. – М.: Наука, 2004. – 287 с.
14. Kerwin E. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer // Journal of Acoustical Society of America. – 1959. – Vol. 31, no. 7. – P. 952–962.
15. Ungar E. Loss factors of viscoelastically damped beam structures // Journal of Acoustical Society of America. – 1962. – Vol. 34, no. 8. – P. 1082–1089.
16. Amadori S, Catania G. Damping contributions of coatings to the viscoelastic behaviour of mechanical components // In Proceedings of the International Conference Surveillance 9, Fes. – Morocco, 2017.
17. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний: пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
18. Fisher D.K., Asthana S. Self-adhesive vibration damping tape and composition. Patent US 6828020 B2, 7.12.2004.
19. Паньков Л.А., Фесина М.И., Краснов А.В. Виброшумодемпфирующая плосколистовая прокладка. Патент РФ № 2333545, 10.09.2008.
20. Tesse C., Stopin G. Constrained-layer damping material. Patent EP2474971A1, 11.07.2012.
21. Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. – Киев: Вища школа, 1977. – 252 с.
22. Theoretical-experimental method for evaluating the elastic and damping characteristics of soft materials based on studying the resonance flexural vibrations of test specimens / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gyunal, V.M. Shishkin // Mechanics of Composite Materials. – 2016. – Vol. 52, no. 5. – P. 571–582. DOI: 10.1007/s11029-016-9608-x
23. Accounting for the frequency-dependent dynamic elastic modulus of Duralumin in deformation problems / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gyunal, V.M. Shishkin // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2017. – Vol. 58, no. 3. – P. 517–528. DOI: 10.1134/S0021894417030178
24. Theoretical and experimental method for determining the frequency-dependent dynamic modulus of elasticity and damping characteristics of a titanium alloy OT-4 / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, R.K. Gazizullin, V.M. Shishkin // Journal of Physics: Conf. Series. 1158(2019) 032044. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032044
25. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
26. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
27. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
28. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: пер. с англ. – М.: Мир, 1975. 541 с.
29. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов: пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
30. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
31. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
32. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.
33. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений: пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.

Благодарность

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00058).

Acknowledgments

This study was financially supported by a grant of the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00058).

34. Мэтьюз Дж.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование МАТЛАБ: пер. с англ. – 3-е изд. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.
35. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.
36. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 384 с.

References

1. Davidenkov N.N. O rassejanii `energii pri vibratsijah [On energy dissipation during vibrations]. *Zhurnal tehnicheckoj fiziki*. 1938, vol.8, iss. 6, pp. 483-499.
2. Dubenets V.G., Hil'chevskij V.V. Kolebanija dempfirovannykh kompozitnykh konstruksij [Oscillations of damped composite structures]. *Kiev, Vischa shkola*, 1995. 210 p.
3. Ziner K. Uprugost' i neuprugost' metallov [Elasticity and inelasticity of metals]. *Moscow, Inostr. lit.*, 1954, 300 p.
4. Kristensen R. Vvedenie v teoriju vjazkoupugosti [Introduction to the theory of viscoelasticity]. *Moscow, Mir*, 1974. 338 p.
5. Matveev V.V. Dempfirovanie kolebanij deformiruemykh tel [Damping vibrations of deformable bodies]. *Kiev, Naukova dumka*, 1985. 263 p.
6. Pal'mov V.A. Kolebanija uprugo-plasticheskikh tel [Oscillations of elastic-plastic bodies]. *Moscow, Nauka*, 1976. 328 p.
7. Panovko Ja.G. Vnutrennee trenie pri kolebanijah uprugih sistem [Internal friction during vibrations of elastic systems]. *Moscow, Fizmatgiz*, 1960. 193 p.
8. Pisarenko G.S. Kolebanija mehanicheskikh sistem s uchetom nesovershennoj uprugosti materiala [Oscillations of mechanical systems with the imperfect elasticity of the material]. *Kiev, Naukova dumka*, 1970. 377 p.
9. Pisarenko G.S., Jakovlev A.P., Matveev V.V. Vibropogloščajuschie svoystva konstruksionnykh materialov: Spravochnik [Vibration absorption properties of structural materials: a Handbook]. *Kiev, Naukova dumka*, 1971. 375 p.
10. Postnikov V.S. Vnutrennee trenie v metallah [Internal friction in metals]. *Moscow, Metallurgija*, 1969. 330 p.
11. Sorokin E.S. K teorii vnutrennego trenija pri kolebanijah uprugih sistem [On the theory of internal friction when vibrations of elastic systems]. *Moscow, Gosstrojizdat*, 1960. 129 p.
12. Jakovlev A.P. Dissipativnye svoystva neodnorodnykh materialov i sistem [Dissipative properties of inhomogeneous materials and systems]. *Kiev, Naukova dumka*, 1985. 248 p.
13. Chernyshev V.M. Dempfirovanie kolebanij mexanicheskix sistem pokrytymi iz polimernyx materialov [Damping vibrations of mechanical systems with coatings of polymeric materials]. *Moscow, Nauka*, 2004. 287 p.
14. Kerwin E. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer // *Journal of Acoustical Society of America*. 1959, vol. 3, no. 7. pp. 952-962.
15. Ungar E. Loss factors of viscoelastically damped beam structures. *Journal of Acoustical Society of America*. 1962, vol. 34, no. 8. pp. 1082-1089.
16. Amadori S, Catania G. Damping contributions of coatings to the viscoelastic behaviour of mechanical components. *Morocco, 22–24 May, In Proceedings of the International Conference Surveillance 9*, 2017.
17. Nashif A., Dzhouns D., Henderson Dzh. Dempfirovanie kolebanij: Per. s angl [Vibration Damping: Trans. from English]. *Moscow, Mir*, 1988. 448 p.
18. Fisher D.K., Asthana S. Self-adhesive vibration damping tape and composition. Patent US 6828020 B2, 7.12.2004.
19. Pan'kov L.A., Fesina M.I., Krasnov A.V. Vibroshumodempfirujushaja ploskolistovaja prokladka [Vibration damping flat sheet]. Patent RF № 2333545, 10.09.2008.
20. Tesse C., Stopin G. Constrained-layer damping material. Patent EP2474971A1, 11.07.2012.
21. Hil'chevskij V.V., Dubenets V.G. Rassejanie `energii pri kolebanijah tonkostennykh `elementov konstruksij [Energy scattering with the oscillations of thin-walled structural elements]. *Kiev, Vischa shkola*, 1977. 252 p.
22. Theoretical-experimental method for evaluating the elastic and damping characteristics of soft materials based on studying the resonance flexural vibrations of test specimens / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gyunal, V.M. Shishkinю *Mechanics of Composite Materials*. 2016, vol. 52, no. 5. pp. 571-582. DOI: 10.1007/s11029-016-9608-x
23. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M. Accounting for the frequency-dependent dynamic elastic modulus of Duralumin in deformation problems. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2017, Vol. 58, no. 3, pp. 517-528. DOI: 10.1134/S0021894417030178
24. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gazizullin R.K., Shishkin V.M. Theoretical and experimental method for determining the frequency-dependent dynamic modulus of elasticity and damping characteristics of a titanium alloy OT-4. *Journal of Physics: Conf. Series.*, 2019, vol. 11586 032044. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032044
25. Zenkevich O., Morgan K. Konechnye `elementy i approximationsija: Per. s angl [Finite elements and approximation: Trans. from English]. *Moscow, Mir*, 1986. 318 p.
26. Norri D., de Friz Zh. Vvedenie v metod konechnykh `elementov: Per. s angl [Introduction to the finite element method: Trans. from English]. *Moscow, Mir*, 1981. 304 p.
27. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh `elementov: Per. s angl [Application of the finite element method: Trans. from English]. *Moscow, Mir*, 1979. 392 p.
28. Zenkevich O. Metod konechnykh `elementov v tehnike: Per. s angl [The finite element method in technology: Per. from English]. *Moscow, Mir*, 1975. 541 p.
29. Bate K., Vil'son E. Chislennye metody analiza i metod konechnykh `elementov: Per. s angl [Numerical analysis methods and finite element method: Trans. from English]. *Moscow, Strojizdat*, 1982. 447 p.
30. Shup T. Reshenie inzhenernykh zadach na `EVM: Per. s angl [he solution of engineering problems on a computer: Per. from English]. *Moscow, Mir*, 1982. 238 p.
31. Postnov V.A., Harhurim I.Ja. Metod konechnykh `elementov v raschetah sudovykh konstruksij [Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций]. *Leningrd Sudostroenie*, 1974. 344 p.
32. Obraztsov I.F., Savel'ev L.M., Hazanov H.S. Metod konechnykh `elementov v zadachah stroitel'noj mehaniki letatel'nykh apparatov [The finite element method in problems of structural mechanics of aircraft]. *Moscow, Vysshaja shkola*, 1985. 392 p.

33. Klaf R., Penzien Dzh. Dinamika sooruzhenij: Per. s angl [Dynamics of buildings: Trans. from English]. *Moscow, Strojizdat*, 1979. 320 p.

34. M'et'juz Dzhon G., Fink Kurtis D. Chislennye metody. Ispol'zovanie MATLAB, 3-e izdanie. Per. s angl [Numerical methods. Using MATLAB, 3rd Edition. Trans. from English]. *Moscow, Izdatel'skij dom "Vil'jams"*, 2001. 720 p.

35. Boglaev Ju.P. Vychislitel'naja matematika i programmirovanie [Computational Mathematics and Programming]. *Moscow, Vysshaja shkola*, 1990. 544 p.

36. Parlett B. Simmetrichnaja problema sobstvennyh znachenij. Chislennye metody: Per. s angl [Symmetric eigenvalue problem. Numerical methods: Trans. from English]. *Moscow, Mir*, 1983. 384 p.

37. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Modeling the Elastic and Damping Properties of the Multilayered Torsion Bar-Blade Structure of Rotors of Light Helicopters of the New Generation. 1. Finite-Element Approximation of the Torsion Bar. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, no 5. pp. 609-628. DOI: 10.1007/s11029-015-9531-6