

Столбова О.С., Тихомирова К.А. Два метода расчета напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов из сплавов с памятью формы с учетом различия свойств на растяжение и сжатие // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 109-125. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.09

Stolbova O.S., Tikhomirova K.A. Two methods for calculating the stress-strain state of shape memory alloy constructions taking into account tension-compression asymmetry. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 109-125. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.09



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.09

УДК 539.3

## ДВА МЕТОДА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧИЯ СВОЙСТВ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

О.С. Столбова, К.А. Тихомирова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 01 октября 2019 г.  
Принята: 03 февраля 2020 г.  
Опубликована: 30 марта 2020 г.

#### Ключевые слова:

сплавы с памятью формы, феноменологическая модель, фазовая и структурная деформации, диаграмма прямого превращения, диаграмма мартенситной неупругости, конструкционный метод, конечные деформации, разносопротивляемость.

### АННОТАЦИЯ

Исследование посвящено разработке двух методов расчета фазово-структурных деформаций конструктивных элементов из сплавов с памятью формы (СПФ), находящихся в условиях сложного напряженного состояния. Оба метода базируются на одномерной феноменологической модели, основанной на взаимосвязи диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости, что позволяет единообразно описать деформации фазовых и структурных превращений, поскольку обе составляющие деформации связаны с образованием ориентированного мартенсита. В предыдущих работах была показана способность данной модели описывать ряд основных макромеханических эффектов, связанных с мартенситными превращениями в СПФ. После обобщения этой модели на случай сложного напряженного состояния она может быть использована для решения прикладных задач. Первый способ такого обобщения, изложенный в настоящей статье, состоит в построении трехмерных определяющих соотношений на основе ранее разработанных одномерных, с добавлением некоторых упрощающих гипотез, и последующей численной реализации данных соотношений методом конечных элементов. Второй метод – конструкционный – применим для конструкций, напряженно-деформированное состояние которых описывается одним кинематическим и одним силовым параметром. Этот способ предполагает использование конструкционных диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости, которые аналогичны соответствующим материальным диаграммам, но определяют зависимость фазово-структурной составляющей кинематического параметра от силового, а не фазово-структурной деформации от напряжения. Недостаток конструкционного метода состоит в необходимости экспериментального определения конструкционных диаграмм, однако его преимуществом является существенная экономия вычислительных ресурсов. Кроме того, в статье приведено сравнение двух способов учета свойства разносопротивляемости в СПФ, а также изложен вариант обобщения трехмерных определяющих соотношений на случай конечных деформаций.

© ПНИПУ

© Столбова Ольга Серафимовна – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: [sos@icmm.ru](mailto:sos@icmm.ru), [iD: 0000-0002-2190-4311](https://orcid.org/0000-0002-2190-4311)  
Тихомирова Ксения Алексеевна – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: [tikhomirova.k@icmm.ru](mailto:tikhomirova.k@icmm.ru), [iD: 0000-0002-0228-2801](https://orcid.org/0000-0002-0228-2801)

Olga S. Stolbova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: [sos@icmm.ru](mailto:sos@icmm.ru),

[iD: 0000-0002-2190-4311](https://orcid.org/0000-0002-2190-4311)

Ksenia A. Tikhomirova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher,

e-mail: [tikhomirova.k@icmm.ru](mailto:tikhomirova.k@icmm.ru), [iD: 0000-0002-0228-2801](https://orcid.org/0000-0002-0228-2801)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## TWO METHODS FOR CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE OF SHAPE MEMORY ALLOY CONSTRUCTIONS TAKING INTO ACCOUNT TENSION–COMPRESSION ASYMMETRY

O.S. Stolbova, K.A. Tikhomirova

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences,  
Perm, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 01 October 2019  
Accepted: 03 February 2020  
Published: 30 March 2020

#### Keywords:

shape memory alloys, phenomenological model, phase and structural deformations, direct transformation diagram, martensitic inelasticity diagram, structural method, finite deformations, tension–compression asymmetry.

### ABSTRACT

Two methods for calculating the phase-structural deformations of shape memory alloy (SMA) structures under complex stress conditions are considered. They both are based on the one-dimensional phenomenological model, which is built upon the relationship between the direct transformation and martensitic inelasticity diagrams, which makes it possible to uniformly describe strains in the phase and structural transformations, since both of the strain components are associated with the formation of oriented martensite. The ability of the model to describe a number of basic macromechanical effects caused by martensitic transformations in SMA was shown in our previous work. After the generalization to the case of a complex stress state it can successfully be used for solving certain engineering problems. The generalization of the model can be accomplished in two ways. The first method involves the construction of three-dimensional constitutive relations, proceeding from the previously developed one-dimensional relations and some simplifying hypotheses, and the numerical implementation of these relations by the finite element method. The second is the structural method, applicable to structures, in which the stress-strain state is described by one kinematic and one force parameter. This method suggests the use of structural diagrams of direct transformation and martensitic inelasticity, which are similar to the corresponding material diagrams, but establish the dependence of the phase-structural component of the kinematic parameter on the force parameter (not the dependence of phase-structural strains on the stress). Although the structural method is associated with the necessity to experimentally determine the structural diagrams, it has the advantage of significantly reducing the computational costs. Additionally, the article presents a comparison of two methods for describing the tension–compression asymmetry, and also develops a method taking finite deformations into account.

© PNRPU

### Введение

Сплавы с памятью формы (СПФ) широко используются в промышленности для изготовления конструктивных элементов различного назначения, а биосовместимость некоторых из них позволяет применять их в медицине в качестве имплантов [1–3]. Несмотря на большое количество имеющихся математических моделей для этих сплавов, как микроструктурных, так и макрофеноменологических (см. обзоры [3, 4], а также работы [5–8] и литературу к ним), вопрос разработки методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций из СПФ остается актуальным. Это связано с тем, что применение большинства моделей к решению прикладных задач затруднено либо сложностью их численной реализации и экспериментальной идентификации параметров, либо их недостаточной описательной способностью.

В работе [9] была предложена одномерная феноменологическая модель, способная описать ряд основных макромеchanических эффектов, связанных с мартенситными превращениями в СПФ: эффекты монотонной и реверсивной памяти формы, перекрестного упрочнения, мартенситной неупругости, сверхупругости, а также явления, связанные с неоднородным фазовым деформи-

рованием. Вместе с тем модель обладает сравнительной простотой реализации и возможностью определения материальных констант из стандартных макромеchanических экспериментов, в связи с чем после обобщения на случай сложного напряженного состояния модель могла бы успешно применяться для решения прикладных задач. В настоящей работе предложены основанные на этой модели два расчетных метода, позволяющие определять НДС конструктивных элементов из СПФ: первый связан с обобщением одномерных определяющих соотношений работы [9] на трехмерный случай и последующей их реализацией методом конечных элементов, второй – конструкционный – предполагает перенесение идеологии одномерной модели на расчет конструкций, НДС которых может быть охарактеризовано одним кинематическим и одним силовым параметром.

При изготовлении деталей из СПФ в материале возникают внутренние ориентированные микронапряжения, изменяется текстура и размер зерна, что оказывает существенное влияние на параметры фазовых и структурных превращений. Поэтому материальные функции, полученные на стандартных образцах из СПФ, часто оказываются неприменимы для расчета деталей, изготовленных из того же материала. Для решения этой проблемы в [10] было предложено экспериментально

определять необходимые для расчета материальные параметры непосредственно на детали, реализуя схему нагружения, воспроизводящую условия ее последующей эксплуатации. Развиваемый в настоящей работе конструкционный метод, основанный на одномерной модели [9], также требует экспериментального определения материальных функций на готовой детали, аналогично [10].

Предлагаемый конструкционный метод можно отнести к методам строительной механики. Как правило, такие методы более охотно используются инженерами для расчета конструкций, чем подходы механики сплошной среды, так как они не требуют серьезных затрат вычислительных ресурсов и позволяют быстро выполнить расчет, зачастую, однако, в ущерб его точности. Среди таких методов, разработанных для конструкций из сплавов с памятью формы, можно отметить описанные в литературе модель пространственного стержня [11], способ расчета изгиба балки [12], а также инженерный подход [10], основанный на анализе экспериментальных термомеханических диаграмм образцов из СПФ – зависимостей максимального реактивного напряжения, развиваемого при нагреве образцов с фиксированной деформацией недовосстановления, от величины этой деформации.

Из экспериментальных данных [13, 14] известно, что материальные константы, характеризующие накопление фазово-структурной деформации при растяжении и сжатии, значительно различаются (свойство разносопротивляемости), и принятие во внимание этого свойства приводит к существенным неточностям расчета. Однако среди моделей, реализующих макрофеноменологический подход, сравнительно немногие учитывают это свойство: в [15, 16] вводится зависимость материальных констант от параметра вида напряженного состояния, в [12, 17] это свойство рассматривается при решении задач об изгибе балки. В данной статье предложен способ учета разносопротивляемости путем перехода к главным значениям тензора напряжений, обычно используемый в разномодульной теории упругости [18].

Поскольку обратимые деформации, развиваемые в процессе фазовых и структурных превращений в СПФ, достаточно большие по величине (до 6 % в никелиде титана), то во многих задачах возникает необходимость учета конечных деформаций при расчете. В работах [19–23] представлены соотношения, описывающие прямой и обратный фазовый переход в рамках конечных деформаций, а также приведены результаты численного решения краевых задач методом конечных элементов. В [20, 23] показана необходимость использования соотношений, записанных в рамках конечных деформаций, для задач, в которых требуется учет квадратичного слагаемого в тензоре деформаций (изгиб балки, кручение цилиндрического образца).

Целью настоящей работы является формулировка и апробация двух методов расчета конструктивных эле-

ментов из СПФ и сопоставление их с имеющимися в литературе. Выполняется исследование существенности влияния ряда факторов – структурного деформирования, свойства разносопротивляемости, зависимости характерных температур превращений от действия напряжения, а также учета конечных деформаций – на результаты расчета. Апробация моделей производится на примере расчета кольцевого силового элемента из СПФ, используемого в малогабаритных прессах [24].

## 1. Феноменологическая модель фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы

### 1.1. Основные понятия

Для описания термомеханического поведения СПФ обычно используется параметр  $q$ , соответствующий объемной доле мартенситной фазы в представительном объеме материала и изменяющийся от 0 до 1 при фазовом превращении. Мартенситный элемент – это совокупность равномерно распределенных по объему материала кристаллических ячеек мартенситной фазы, образование которых в ходе прямого фазового превращения происходит одновременно и сообщает элементарное приращение  $dq$  объемной доле мартенсита. Прямым фазовым превращением называется образование низкосимметричной мартенситной фазы из высокосимметричной аустенитной при охлаждении и/или действии напряжения, структурным превращением – процесс переориентации ячеек мартенсита в результате возрастания или изменения направления нагрузки (может происходить при постоянной температуре). Деформация, возникающая в образце в результате фазового и структурного превращений, определяется степенью ориентированности кристаллических ячеек в мартенситных элементах по направлению, соответствующему наибольшему главному значению девиатора действующих при переходе напряжений, и называется фазово-структурной. В процессе нагрева при обратном фазовом превращении из мартенситной фазы вновь образуется аустенитная и происходит снятие фазово-структурной деформации, обусловленной наличием в материале ориентированного мартенсита. При этом вводится гипотеза, используемая во многих моделях и имеющая экспериментальное подтверждение [25]: мартенситные элементы при обратном фазовом переходе исчезают в порядке, противоположном порядку их возникновения.

### 1.2. Описание модели для одномерного случая

Используемая в данной работе феноменологическая модель для одномерного случая изложена в статье [9]. В основе модели лежат две материальные функции: диаграммы прямого превращения  $F_1$  и мартенситной неупругости  $F_2$  [26]. Первая из них описывает зависи-

мость фазово-структурной деформации полного прямого превращения, накапливаемой после охлаждения под постоянным напряжением, от величины этого напряжения, вторая – зависимость фазово-структурной деформации от напряжения при изотермическом деформировании неориентированного мартенсита.

Основное соотношение модели в одномерном случае имеет вид

$$\varepsilon_{\text{phst}} = \int_0^{q_0} F_1(\sigma^*(q)) dq + q_0 \varepsilon_v. \quad (1)$$

Здесь  $q_0$  – текущая доля мартенситной фазы,  $\varepsilon_{\text{phst}}$  – фазово-структурная деформация;  $\sigma^*(q)$  – управляющее напряжение – напряжение, действующее в момент образования мартенситного элемента  $dq$ ;  $\varepsilon_v$  – осевая компонента шаровой части тензора фазово-структурной деформации, которая не зависит от напряжения и может считаться константой материала. Отсчет истории деформирования в (1) должен начинаться от полностью аустенитного состояния ( $q = 0$ ).

Учет деформации структурного превращения при сохранении направления нагрузки осуществляется следующим образом: если в процессе деформирования текущее напряжение  $\sigma$  в материале превысит предел структурного превращения какого-либо мартенситного элемента, равный  $\sigma_{\text{st}} = F_2^{-1}(F_1(\sigma^*(q)))$ , то управляющее напряжение для значения  $q$ , соответствующего данному элементу, принимает новое значение  $\sigma^*(q) = F_1^{-1}(F_2(\sigma))$ :

$$\text{если } \sigma > F_2^{-1}(F_1(\sigma^*)), \text{ то } \sigma^*(q) = F_1^{-1}(F_2(\sigma)). \quad (2)$$

Штрихом здесь обозначено новое значение управляющего напряжения после переориентации мартенситного элемента. Индексом «-1» здесь и далее обозначается обратная функция. После структурного превращения интеграл (1) необходимо пересчитать. Условие структурного превращения при изменении знака нагрузки здесь рассматриваться не будет.

При обратном превращении, когда интеграл в соотношении (1) получает отрицательное приращение, функция управляющего напряжения при вычислении деформации «воспроизводится» в обратной последовательности. Тем самым подтверждается гипотеза об обратном порядке исчезновения мартенситных элементов.

Необходимо отметить, что для процесса прямого превращения без учета структурной деформации данная модель эквивалентна феноменологической модели, описанной в работах [26, 27]. Дифференциальное уравнение этой модели

$$d\varepsilon_{\text{ph}} = [(1 - q\xi(q))(\varepsilon_v + F_1(\sigma)) + \xi(q)\varepsilon_{\text{ph}}] dq, \quad dq > 0 \quad (3)$$

для фазовой деформации  $\varepsilon_{\text{ph}}$  является аналогом интегрального соотношения (1) в случае, если материальная

функция  $\xi(q)$ , определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов при прямом фазовом переходе, принимается равной нулю.

### 1.3. Обобщение модели на случай сложного напряженного состояния

Экспериментальные данные работы [28] свидетельствуют, что теоретическое представление о взаимосвязи диаграмм  $F_1$  и  $F_2$ , лежащее в основе изложенной в подразд. 1.2 модели, справедливо не только при растяжении, но и при сжатии. Однако для фазово-структурных деформаций в СПФ характерна разносопротивляемость, заключающаяся в том, что диаграммы прямого превращения и мартенситной неупругости для растяжения и сжатия существенно различаются [13, 14]. Так, при сжатии большим по абсолютной величине напряжениям соответствуют меньшие значения фазово-структурной деформации, чем при растяжении, тогда как формы диаграмм аналогичны. Причина этого, как указывается в [16], состоит в существенном различии по модулю линейных деформаций кристаллической решетки в разных направлениях при переходе аустенитной фазы в мартенсит. В связи с этим в [29] было предложено получать материальные функции для сжатия путем масштабирования соответствующих функций для растяжения по осям напряжения и деформации; этот способ будет использоваться и в настоящей работе. Коэффициенты масштабирования по напряжению  $k_\sigma$  и деформации  $k_\varepsilon$  были определены в [29] на основании экспериментальных данных [13]:

$$k_\sigma = \frac{|\sigma^-|}{\sigma^+} = 2, \quad k_\varepsilon = \frac{|\varepsilon^-|}{\varepsilon^+} = 0,6. \quad (4)$$

Здесь и далее верхними индексами «+» и «-» обозначаются величины, относящиеся к растяжению и сжатию соответственно. Следует отметить, что способ масштабирования является достаточно приближенным и не позволяет учесть качественное различие диаграмм; более предпочтительным является независимое экспериментальное определение материальных функций на растяжение и сжатие.

При обобщении определяющего соотношения (1) на трехмерный случай объемная доля мартенсита  $q$  и объемная деформация фазового превращения  $\varepsilon_v$  остаются скалярами, функция управляющего напряжения  $\sigma^*(q)$  становится тензорной функцией скалярного аргумента  $\sigma^*(q)$ , фазово-структурная деформация также становится тензорной величиной  $\varepsilon_{\text{phst}}$ . В общем случае и материальная функция  $F_1$  преобразуется в тензорную функцию  $\mathbf{F}_1$ . Из экспериментальных данных известно, что при гидростатическом нагружении возникает толь-

ко шаровая часть тензора фазово-структурной деформации, которая не зависит от величины действующего напряжения. На основании этого делается предположение о том, что на величину фазово-структурной деформации оказывает влияние только девиаторная составляющая тензора напряжения. Поэтому при обобщении модели на трехмерный случай аргументом функции  $F_1$  служит девиатор тензора управляющего напряжения  $S^*(q)$ . Тогда соотношение (1) в общем виде можно записать как

$$\epsilon_{\text{phst}} = \int_0^{q_0} F_1(S^*(q)) dq + q_0 \epsilon_v \mathbf{g}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{g}$  – единичный тензор. Первое слагаемое является девиаторной частью тензора  $\epsilon_{\text{phst}}$ , второе – шаровой; шаровая составляющая тензора управляющего напряжения в расчете фазово-структурной деформации не участвует.

Однако мы будем пользоваться упрощающим подходом, позволяющим и в трехмерной модели ограничиваться скалярными материальными функциями  $F_1^+$  и  $F_1^-$ , не вводя в рассмотрение тензорную функцию  $F_1$ . Один из способов определения НДС материала в разномодульной теории упругости состоит в том, что в исследуемой области переходят к главным осям тензора напряжений и для главных значений этого тензора в зависимости от их знака используют модуль упругости на растяжение или на сжатие [18]. В данной работе применяется аналогичный подход: определяются главные значения и главные направления девиатора тензора управляющего напряжения  $S_{ii}^*$ , для них вычисляются главные значения тензора фазово-структурной деформации  $\epsilon_{\text{phst-ii}}$  с помощью соотношения (1), которое трансформируется в следующее выражение:

$$\epsilon_{\text{phst-ii}} = \int_0^{q_0} F_1(S_{ii}^*(q)) dq + q_0 \epsilon_v, \quad (6)$$

где функция  $F_1$  в зависимости от знака главного напряжения является диаграммой прямого превращения на растяжение или на сжатие ( $F_1^+$  или  $F_1^-$ ), а затем для тензора фазово-структурной деформации выполняется переход к исходной системе координат.

Если в процессе деформирования главные оси тензора управляющего напряжения поворачиваются, то интеграл в (6) необходимо разбить на участки интегрирования, на которых тензор управляющего напряжения сохраняет главные направления, а затем каждое слагаемое привести к исходной системе координат и просуммировать. Если изменение главных направлений происходит непрерывно, то суммарную фазово-структурную деформацию в (6) можно определить численно путем дискретизации переменной интегрирования  $q$ , полагая,

что на элементарном приращении  $dq$  главные направления тензора управляющего напряжения не меняются.

В качестве функции, аппроксимирующей  $F_1$ , будем использовать экспоненциальную зависимость [27]:

$$F_1(S_{ii}^*) = (1 - \exp(-S_{ii}^* / S_0)) e_{\text{phst}}^{\text{max}}. \quad (7)$$

Здесь  $S_0$  и  $e_{\text{phst}}^{\text{max}}$  – константы материала, различные для растяжения и сжатия. Для случая растяжения эти константы были определены экспериментально в [30] на образцах из проволоки из равноатомного никелида титана и составили  $S_0^+ = 100$  МПа и  $e_{\text{phst}}^{\text{max}+} = 4,7\%$ . С учетом коэффициентов масштабирования (4) можно вычислить аналогичные параметры на сжатие:  $S_0^- = k_\sigma S_0^+ = 200$  МПа,  $e_{\text{phst}}^{\text{max}-} = k_\epsilon e_{\text{phst}}^{\text{max}+} = 2,8\%$ . В случае анизотропии материала с точки зрения деформации фазового перехода, которая может быть вызвана наличием текстуры и полей внутренних ориентированных напряжений в изделии, константы  $S_0^+$ ,  $S_0^-$  и  $e_{\text{phst}}^{\text{max}+}$ ,  $e_{\text{phst}}^{\text{max}-}$  могут различаться для разных направлений, однако в данной работе такой случай рассматриваться не будет.

Для модели (3) в случае равенства нулю функции  $\xi(q)$  трехмерный вариант определяющих соотношений, описанный в [31], имеет вид

$$d\epsilon_{\text{ph}} = \frac{3}{2} \frac{F_1(\sigma_i)}{\sigma_i} S dq + \mathbf{g} \epsilon_v dq, \quad dq > 0. \quad (8)$$

Для обратного фазового перехода в [31] предлагается следующее соотношение:

$$d\epsilon_{\text{ph}} = \frac{\epsilon_{\text{ph}}}{q} dq, \quad dq < 0. \quad (9)$$

В соотношении (8) используется другой способ учета разностойкости, не требующий перехода к главным осям тензора напряжений. Вводится параметр вида напряженного состояния  $\mu_\sigma = \frac{27 I_3(\mathbf{S})}{2 (\sigma_i)^3}$  [32],

где  $I_3(\mathbf{S})$  – третий инвариант девиатора тензора напряжений. Параметр  $\mu_\sigma$  изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$  и принимает значения  $+1$  для одноосного растяжения,  $-1$  для одноосного сжатия и  $0$  для чистого сдвига. В зависимости от этого параметра выбираются материальные константы  $\sigma_0$  и  $e_{\text{phst}}^{\text{max}}$  для функции  $F_1(\sigma_i)$ , в настоящей работе принята линейная зависимость:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\sigma_0^+ + \sigma_0^-}{2} + \mu_\sigma \cdot \frac{\sigma_0^+ - \sigma_0^-}{2}; \\ e_{\text{phst}}^{\text{max}} &= \frac{e_{\text{phst}}^{\text{max}+} + e_{\text{phst}}^{\text{max}-}}{2} + \mu_\sigma \cdot \frac{e_{\text{phst}}^{\text{max}+} - e_{\text{phst}}^{\text{max}-}}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом поскольку аргументом функции  $F_1(\sigma_i)$  является интенсивность напряжений, а не компонента девиатора тензора напряжения, то в аппроксимирующем выражении (7) вместо констант  $S_0^+$  и  $S_0^-$  используются параметры  $\sigma_0^+ = \frac{3}{2}S_0^+ = 150$  МПа и  $\sigma_0^- = \frac{3}{2}S_0^- = 300$  МПа.

При построении трехмерных определяющих соотношений для фазово-структурных деформаций в СПФ особого внимания требует вопрос учета структурного превращения, так как в общем случае оно может быть вызвано не только возрастанием нагрузки по абсолютной величине, но и поворотом главных осей тензора напряжения и сменой знака главных напряжений. Для корректного учета структурной деформации необходимо, во-первых, сформулировать критерий структурного превращения в мартенситном элементе, а во-вторых, установить, какое новое значение примет тензор управляющего напряжения в данном мартенситном элементе в случае достижения критерия. Это требует дополнительного экспериментального и теоретического исследования процессов структурного превращения в СПФ при различных вариантах нагружения. В данной работе мы ограничимся частным случаем режима нагружения, характерным для процесса эксплуатации многих конструктивных элементов из СПФ: будем полагать, что изменение направления нагрузки несущественно и не может вызвать структурное превращение. Кроме того, для простоты будем рассматривать случай тождественного равенства диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости:

$$F_1^+ = F_2^+, F_1^- = F_2^-, \quad (11)$$

что справедливо, в частности, для никелида титана при осуществлении структурного деформирования вблизи температуры начала прямого превращения [33]. Тогда введем следующее условие структурного превращения, сходное с условием (2) в одномерном случае: если интенсивность текущего напряжения  $\sigma_i$  превышает интенсивность управляющего напряжения  $\sigma_i^*$  в мартенситном элементе, то девиатор тензора управляющего напряжения данного элемента становится равным девиатору тензора текущего напряжения:

$$\text{если } \sigma_i^*(q) < \sigma_i, \text{ то } \mathbf{S}^*(q) = \mathbf{S}. \quad (12)$$

Здесь  $\sigma_i^*$  и  $\sigma_i$  – интенсивности управляющего и текущего напряжений;  $\mathbf{S}^*(q)$  – новое значение девиатора управляющего напряжения в точке  $q$ ;  $\mathbf{S}$  – девиатор текущего напряжения. Также можно предложить альтернативный вариант, в котором в качестве критерия структурного превращения выступает не интенсивность напряжения, а максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \quad (\sigma_1 \text{ и } \sigma_3 - \text{главные значения соответствующих тензоров напряжений}):$$

$$\text{если } \tau_{\max}^*(q) < \tau_{\max}, \text{ то } \mathbf{S}^*(q) = \mathbf{S}. \quad (13)$$

#### 1.4. Уравнения, замыкающие модель

Изложенная выше модель, отражающая связь фазово-структурной деформации с действующими в материале напряжениями, может быть интегрирована стандартным образом в любую систему уравнений, составляющих математическую постановку задачи на определение НДС конструкции. В данном разделе представлены соотношения, которые используются в настоящей работе для замыкания математической модели.

При осуществлении расчета в рамках малых деформаций полная деформация системы определяется суммированием упругой  $\epsilon_e$ , фазово-структурной  $\epsilon_{\text{phst}}$  и температурной  $\epsilon_T$  составляющих:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_{\text{phst}} + \epsilon_T. \quad (14)$$

При необходимости к сумме в (14) добавляется также пластическая составляющая деформации, но в данной работе она не учитывается. Упругая деформация вычисляется по закону Гука, причем модули упругости аустенитной  $E_A$  и мартенситной  $E_M$  фаз различны, а коэффициент Пуассона  $\nu$  считается одинаковым, что справедливо для никелида титана. При этом зависимость модуля упругости от объемной доли мартенсита определяется по правилу смеси:

$$E(q) = \frac{E_A \cdot E_M}{q \cdot E_A + (1-q) \cdot E_M}. \quad (15)$$

Коэффициент линейного температурного расширения, также имеющий различные значения для аустенитной и мартенситной фаз ( $\alpha_A$  и  $\alpha_M$ ), определяется аналогично:

$$\alpha(q) = \frac{\alpha_A \cdot \alpha_M}{q \cdot \alpha_A + (1-q) \cdot \alpha_M}, \quad (16)$$

при этом температурная деформация вычисляется как

$$\epsilon_T = \alpha(q) \cdot (T - T_0) \mathbf{g}, \quad (17)$$

где  $T$  и  $T_0$  – текущая и начальная температуры.

Для описания зависимости объемной доли мартенсита от температуры будем использовать следующую аппроксимацию [34]:

$$q = \begin{cases} 0, & \zeta \leq 0, \\ (1 - \cos(\pi\zeta)) / 2, & 0 < \zeta < 1, \\ 1, & \zeta \geq 1; \end{cases}$$

$$\zeta = \frac{M_s^* - T}{M_s - M_f}, \quad M_f \leq T \leq M_s^*, \quad (A \rightarrow M), \quad (18)$$

$$\zeta = 1 + \frac{A_s^* - T}{A_f - A_s}, \quad A_s^* \leq T \leq A_f^*, \quad (M \rightarrow A).$$

Температуры  $M_s$ ,  $M_f$ ,  $A_s$ ,  $A_f$  соответствуют началу и окончанию прямого и обратного превращений при отсутствии нагрузки; звездочкой отмечены температуры границ переходных интервалов с учетом их сдвига от действия напряжений. В предположении, что ширина температурных интервалов при осуществлении фазового перехода под действием постоянной нагрузки остается неизменной, величина сдвига равна сдвигу их средних температур  $T_c$ , который определяется с помощью обобщенного уравнения Клаузиуса – Клапейрона [35]. Предполагая, что выделяемая (поглощаемая) при переходе теплота не зависит от величины действующего напряжения, обобщенное уравнение Клаузиуса – Клапейрона можно представить в виде [9]

$$T_c = T_{c0} + k\sigma \cdot [\epsilon_{\text{phst}}]. \quad (19)$$

Здесь  $T_{c0}$  – средняя температура интервала фазового перехода (прямого или обратного) в отсутствие напряжений;  $\sigma$  – действующее при переходе напряжение;  $[\epsilon_{\text{phst}}]$  – изменение фазово-структурной деформации;  $k$  – константа материала, имеющая положительное значение для прямого фазового перехода и отрицательное для обратного. Двумя точками обозначена операция двойного скалярного произведения тензоров.

Соотношения (18)–(19) для вычисления объемной доли мартенсита необходимо дополнить условиями прямого и обратного фазовых превращений, исключающими исчезновение мартенситных элементов в процессе прямого превращения и их возникновение в процессе обратного. Прямое превращение происходит в случае, когда, во-первых, текущее значение температуры  $T$  оказывается ниже  $M_s^*$ , а во-вторых, значение доли мартенситной фазы  $q$ , вычисленное согласно (18)–(19) для изменившихся термосиловых условий, превышает величину  $q_0$  до изменения температуры и нагрузки:

$$\begin{cases} T < M_s^* (\sigma, [\epsilon_{\text{phst}}]); \\ q(T, \sigma, [\epsilon_{\text{phst}}]) > q_0. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогично обратный фазовый переход реализуется, когда текущая температура превышает  $A_s^*$ , а вычисленное значение  $q$  оказывается меньше  $q_0$ :

$$\begin{cases} T > A_s^* (\sigma, [\epsilon_{\text{phst}}]); \\ q(T, \sigma, [\epsilon_{\text{phst}}]) < q_0. \end{cases} \quad (21)$$

Говоря о термодинамическом замыкании математической модели, также требовалось бы записать связанное уравнение энергетического баланса, учитывающее выделение (поглощение) латентного тепла при фазовых переходах. Но поскольку в настоящей работе рассматривается конструкция небольшой толщины, для которой предполагается, что вся выделяемая теплота успевает рассеиваться, а температурное поле однородно и определяется температурой окружающей среды, то уравнение энергетического баланса здесь не приводится.

## 2. Конструкционный метод расчета фазово-структурной деформации

Помимо построения трехмерных определяющих соотношений (5), для решения ряда прикладных задач можно предложить еще один – конструкционный – метод, также основанный на модели (1), но не требующий введения тензорных выражений. Для задач, в которых НДС конструкции может быть описано только одним кинематическим и одним силовым параметром (например, прогиб балки в зависимости от приложенной сосредоточенной силы, изменение диаметра трубы в зависимости от действующего внутреннего давления и т.д.), вводятся понятия конструкционных диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости  $F_1^k$  и  $F_2^k$ , в качестве которых выбираются зависимости фазово-структурной составляющей кинематического параметра от соответствующего силового (зависимость фазово-структурной составляющей прогиба от усилия, изменения диаметра от давления и т.д.). Так, в задаче об изгибе балки, нагруженной сосредоточенной силой, для экспериментального построения конструкционной диаграммы прямого превращения требуется провести ряд экспериментов по охлаждению балки через температурный интервал прямого превращения под действием постоянной силы, измеряя величину прогиба после упругой разгрузки при конечной температуре. После выполнения нескольких экспериментов при различных значениях силы по полученным точкам строится аппроксимирующая диаграмма  $F_1^k$ , которая представляет собой зависимость фазово-структурной составляющей прогиба от действующего при прямом переходе усилия. В свою очередь, конструкционная диаграмма мартенситной неупругости  $F_2^k$  строится как зависимость прогиба от приложенной силы при изотермическом нагружении балки, находящейся в состоянии неориентированного (хаотического) мартенсита, за вычетом упругой составляющей прогиба.

Аналогично соотношению (14), в настоящем подходе предполагается, что полное значение кинематического параметра  $w$  складывается из упругой  $w_e$ , фазово-структурной  $w_{\text{phst}}$  и температурной  $w_T$  составляющих:

$$w = w_e + w_{\text{phst}} + w_T. \quad (22)$$

При этом задача нахождения фазово-структурной составляющей кинематического параметра остается одномерной, тогда как его упругая составляющая может быть найдена любым доступным способом: методами сопротивления материалов, методом конечных элементов и др. Температурная составляющая кинематического параметра также находится независимо, с учетом соотношений (16)–(17).

Одномерное определяющее соотношение (1) в конструкционном подходе трансформируется в следующее выражение для нахождения фазово-структурной составляющей кинематического параметра:

$$w_{\text{phst}} = \int_0^{q_0} F_1^k(P^*(q)) dq. \quad (23)$$

Здесь  $P^*(q)$  – функция управляющего силового параметра. Аналогично  $\sigma^*(q)$ , она содержит значения силового параметра, действующего в момент возникновения каждого мартенситного элемента. Деформация структурного превращения учитывается по аналогии с (2): если текущее значение силового параметра превысит предел структурного превращения какого-либо мартенситного элемента, равный  $P_{st} = (F_2^k)^{-1}(F_1^k(P^*(q)))$ , то управляющий силовой параметр для значения  $q$ , соответствующего данному элементу, принимает новое значение  $P^*(q) = (F_1^k)^{-1}(F_2^k(P))$ :

$$\begin{aligned} &\text{если } P > (F_2^k)^{-1}(F_1^k(P^*(q))), \\ &\text{то } P^*(q) = (F_1^k)^{-1}(F_2^k(P)). \end{aligned} \quad (24)$$

Штрихом обозначено новое значение управляющего силового параметра после переориентации мартенситного элемента. Заметим, что условие (24) соответствует типу нагружения, при котором силовой параметр сохраняет знак. Случай знакопеременного нагружения здесь рассматриваться не будет.

Под мартенситным элементом здесь, как и прежде, понимается совокупность кристаллических ячеек мартенситной фазы, зародившихся одновременно и сообшивших элементарное приращение  $dq$  интегралу (23), однако распределенных равномерно не по представительному объему, как предполагалось ранее, а по всей конструкции. В этом состоит существенный недостаток конструкционного метода: во-первых, объемная доля мартенсита  $q$  должна быть одинакова для всей конструкции, что может быть обеспечено только за счет ее равномерного прогрева при осуществлении мартенситных превращений; во-вторых, невозможно учесть влияние напряжений на сдвиг характерных температур превращений, описываемое соотношением (19), поскольку тензоры напряжений и деформаций в конструкционном подходе не вычисляются. Несмотря на это, данный под-

ход может успешно применяться для конструкций небольшой толщины, для которых возможно обеспечить равномерный прогрев, для задач с невысоким уровнем напряжений, не оказывающих существенного влияния на сдвиг характерных температур превращений, а также для расчета НДС конструкций из СПФ в изотермических условиях нагружения.

Еще один существенный недостаток конструкционного метода состоит в необходимости экспериментального исследования готовой детали, а не образцов стандартной формы из материала, предназначенного для ее изготовления. С другой стороны, проведение измерений непосредственно на детали позволяет учесть ряд факторов, которые могут быть упущены при использовании результатов испытаний стандартных образцов: влияние текстуры материала, особенностей химического состава, методов обработки поверхности, наличие внутренних ориентированных микронапряжений и т.д. Кроме того, конструкционный метод при сохранении точности расчета существенно экономит вычислительные ресурсы. Однако поскольку в данном методе применяется суммирование кинематических величин, то он может быть использован только в рамках малых деформаций.

### 3. Особенности численной реализации расчетных методов

Выше были изложены два подхода к расчету НДС конструкций из сплавов с памятью формы, основанные на одномерной модели [9]. Для реализации первого из них, включающего трехмерные определяющие соотношения (6), (12), (13), в данной работе используется метод конечных элементов. Поскольку в рассматриваемой в разделе 5 задаче реализуется плоское напряженное состояние, для ее решения выбран плоский треугольный симплекс-элемент с линейной аппроксимацией перемещений. При этом деформация, напряжение и доля мартенситной фазы внутри конечного элемента постоянны. Предполагается, что температура во всей конструкции одинакова, поэтому неоднородность фазового состояния (различные значения доли мартенсита в разных конечных элементах) может быть вызвана только неоднородностью напряжений, однако в конструкционном методе эта неоднородность не учитывается.

Оба подхода оперируют понятием мартенситного элемента, который в дискретной постановке эквивалентен приращению объемной доли мартенсита на конечную величину  $\Delta q = \frac{1}{n}$  ( $n$  – число разбиений интервала  $[0-1]$ , в котором изменяются значения  $q$ ). При этом шаг  $\Delta q$  рекомендуется выбирать достаточно мелким – так, чтобы на каждом шаге нагружения превращалось конечное, округляемое до целых число мартенситных элементов. Под шагом нагружения здесь понимается шаг по температуре или внешней нагрузке. Каждому мартенситному элементу соответствует управляющая

силовая характеристика, которая, согласно соотношениям (6) и (23), определяет величину фазово-структурной деформации. В трехмерных определяющих соотношениях это девиатор тензора управляющего напряжения, в конструкционном методе – одномерный управляющий силовой параметр. Данные характеристики на протяжении всего расчета хранятся в памяти в виде числового массива, в первом случае для плоского напряженного состояния имеющего размерность  $3 \cdot n$  (значения  $S_{11}^*$ ,  $S_{12}^*$  и  $S_{22}^*$  девиатора управляющего напряжения в каждом маренситном элементе) для каждого конечного элемента, во втором –  $1 \cdot n$  (значения управляющего силового параметра в каждом маренситном элементе) для всей конструкции. Таким образом, размер сохраняемого в памяти массива, содержащего данные об управляющих параметрах, для плоской задачи в первом методе в  $3 \cdot N$  раз больше, чем во втором ( $N$  – число конечных элементов).

Для организации вычислительного алгоритма вводится сетка по параметру процесса нагружения – температуре и/или внешней нагрузке, при этом отчет истории деформирования должен начинаться от полностью аустенитного состояния (начальная температура выше  $M_s$ , маренситных элементов нет,  $q = 0$ ). При выполнении условия прямого превращения (20) на текущем шаге нагружения появляются маренситные

элементы количеством  $m = \frac{q - q_0}{\Delta q}$  ( $q_0$  – объемная доля

маренсита на предыдущем шаге нагружения), и заполняется  $m$  ячеек числового массива управляющих силовых характеристик. Если в процессе последующего деформирования оказывается превышенным предел структурного превращения какого-либо маренситного элемента, также определяемый управляющей силовой характеристикой (условия (12) или (13) для первого метода и (24) для второго), то соответствующее этому маренситному элементу значение в числовом массиве заменяется на новое, вычисляемое по соотношениям (12) или (13) и (24). При этом интегралы (6) и (23) пересчитываются заново. При выполнении условия обратного

превращения (21) исчезает  $m = \frac{q_0 - q}{\Delta q}$  маренситных

элементов, и из числового массива управляющих силовых характеристик удаляется  $m$  последних значений.

При реализации метода конечных элементов напряжения, действующие на текущем шаге нагружения, являются неизвестными. Однако от них зависит, во-первых, значение тензора управляющего напряжения вновь образующихся маренситных элементов, во-вторых, величина текущей доли маренситной фазы, и в-третьих, они определяют модернизацию числового массива управляющих силовых характеристик при структурном превращении, что существенно для вычисления фазово-структурных деформаций. Для решения этой проблемы на каждом шаге нагружения реали-

зуется итерационная процедура, в которой фазово-структурные деформации в начальном приближении вычисляются по напряжениям с предыдущего шага нагружения. Критерием завершения итерационной процедуры может служить, например, разность перемещений в какой-либо точке конструкции, вычисленная на текущей и предыдущей итерациях.

#### 4. Учет конечных деформаций

В данном разделе приводится способ обобщения на случай конечных деформаций определяющих соотношений (8), (9) модели [31], которые для прямого фазового перехода без структурного превращения являются аналогом соотношения (6). При этом структурная деформация не учитывается, и объемной составляющей фазовой деформации пренебрегается. Весь процесс деформирования (переход от начальной конфигурации в текущую) представляется в виде последовательного перехода между промежуточными конфигурациями, близкими друг к другу ([35]). Приращение полной деформации на каждом шаге определяется суммированием приращения упругой  $d\mathbf{E}_e$ , фазовой  $d\mathbf{E}_{ph}$  и температурной  $d\mathbf{E}_T$  составляющих (см. [23] и [35]):

$$d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_e + d\mathbf{E}_{ph} + d\mathbf{E}_T, \quad (25)$$

откуда  $d\mathbf{E}_e = d\mathbf{E} - d\mathbf{E}_{ph} - d\mathbf{E}_T$ . При этом  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_e$ ,  $\mathbf{E}_{ph}$  и  $\mathbf{E}_T$  – тензоры деформации Коши – Грина [36],  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_* + d\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_*$  – деформация, полученная на предыдущем расчетном шаге (в некоторой промежуточной конфигурации, близкой к текущей).

Соотношения для приращения фазовой деформации для прямого и обратного превращений имеют вид:

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}_{ph} &= \frac{3}{2} \frac{F_1(\sigma_i)}{\sigma_i} \mathbf{S} dq, dq > 0; \\ d\mathbf{E}_{ph} &= \frac{\mathbf{E}_{ph}}{q} dq, dq < 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\mathbf{S}$  – девиатор второго (симметричного) тензора напряжений Пиола – Кирхгофа  $\mathbf{P}_\Pi$ . Свойство разносопротивляемости здесь учитывается с помощью параметра вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$ , от которого зависят материальные константы (10).

Приращение температурной деформации при изменении температуры на величину  $dT = T - T_0$  зададим, обобщая соотношение (17) на случай конечных деформаций (см. [23] и [35]):

$$d\mathbf{E}_T = \alpha(q) dT \mathbf{C}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{C}$  – мера деформации Коши – Грина,  $dT$  – приращение температуры, полученное на текущем расчетном шаге. Зависимость  $\alpha(q)$  определяется соотношением (16).

Для описания упругого поведения материала используется упрощенный закон Синьорини [37]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{II} &= \sqrt{I_3(\mathbf{C}_e)} \left[ (k_1 + k_2) \mathbf{C}_e^{-1} - 2k_2 \mathbf{C}_e^{-2} \right], \\ k_1 &= \lambda(q) \left[ 3 - I_1(\mathbf{C}_e^{-1}) \right] / 2 + \\ &+ (\lambda(q) + G(q)) \left[ 3 - I_1(\mathbf{C}_e^{-1}) \right]^2 / 8, \\ k_2 &= G(q) - (\lambda(q) + G(q)) \left[ 3 - I_1(\mathbf{C}_e^{-1}) \right] / 2. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $\mathbf{C}_e$  – мера упругих деформации Коши – Грина;  $I_1$  и  $I_3$  – первый и третий главные инварианты соответствующего тензора.

Приращение второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа может быть записано в следующем виде:

$$d\mathbf{P}_{II} = 2 \frac{\partial \mathbf{P}_{II}}{\partial \mathbf{C}_e} \cdot d\mathbf{E}_e = 2 \frac{\partial \mathbf{P}_{II}}{\partial \mathbf{C}_e} \cdot (d\mathbf{E} - d\mathbf{E}_{ph} - d\mathbf{E}_T), \quad (29)$$

при этом  $\mathbf{P}_{II} = \mathbf{P}_{II^*} + d\mathbf{P}_{II}$ .

Алгоритм решения краевой задачи в рамках конечных деформаций, использующий соотношения (25)–(29), подробно изложен в [23]. Последовательность расчета следующая: процессы нагружения образца, его охлаждения в интервале температур прямого фазового перехода и нагревание в интервале температур обратного фазового перехода разбиваются на ряд достаточно малых шагов, на каждом шаге задается приращение усилия или температуры, находятся приращения неупругих деформаций  $d\mathbf{E}_{ph}$  и  $d\mathbf{E}_T$  и из решения краевой задачи в вариационной постановке в перемещениях определяется приращение полной деформации, после чего приращение упругой деформации находится как разность  $d\mathbf{E}_e = d\mathbf{E} - d\mathbf{E}_{ph} - d\mathbf{E}_T$ . Затем вычисляется приращение  $d\mathbf{P}_{II}$  по формуле (29) и находятся напряжения и деформации на текущем шаге.

### 5. Расчет кольцевого силового элемента из сплава с памятью формы

Одним из используемых в промышленности типов прессов на основе СПФ являются малогабаритные прессы с кольцевыми силовыми элементами из никелида титана, конструктивная схема которых показана на рис. 1 [24]. Такая конструкция используется, в частности, в технологическом процессе изготовления слоистых материалов. Кольцо с наружным диаметром  $d_0$ , состоящее из пучка проволоки или из сплошной ленты из никелида титана, имеет в нижней части неподвижный захват; к верхнему подвижному захвату прикладывается усилие, и в результате охлаждения кольца под этим усилием либо в результате изотермического деформирования из состояния хаотического мартенсита (мартенситной неупругости) кольцу сообщается начальная фазово-структурная деформация, и оно принимает продолговатую форму с вертикальным наруж-

ным диаметром  $d_1$ . После изотермической разгрузки снимается упругая составляющая деформации и сохраняется фазово-структурная, при этом вертикальный диаметр  $d_1$  уменьшается до значения  $d_2$ . Затем при последующем нагреве вследствие снятия фазово-структурной деформации и восстановления формы кольца в процессе обратного мартенситного превращения производится сжатие контртела, расположенного между двумя захватами. В испытательных установках, используемых для исследования механических характеристик кольцевых силовых элементов, роль контртела играет упругая пружина, расположенная вдоль вертикального диаметра между подвижными захватами. Степень сжатия и реактивное усилие со стороны пружины увеличиваются по мере сближения захватов в процессе нагрева. При расчете НДС силовых элементов реактивное усилие со стороны контртела также может быть описано как противодействие упругой сжимаемой пружины.

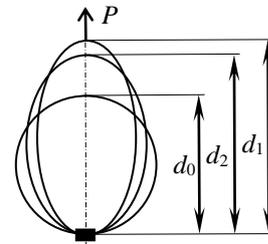


Рис. 1. Расчетная схема кольцевого силового элемента

Fig. 1. The design scheme of the ring power element

Используются следующие типы конструкций кольцевого силового элемента: бухты из четырех витков проволоки диаметром 2,5 мм, пяти витков диаметром 2 мм, а также кольцо из ленты прямоугольного сечения 11,5×1,5 мм. При моделировании будем рассматривать упрощенный вариант конструкции – кольцо сплошного квадратного сечения, площадь которого равна суммарной площади пучка проволоки из четырех витков. Это позволит решать задачу в рамках плоского напряженного состояния. Принимаются следующие размеры кольца: наружный диаметр в недеформированном состоянии  $d_0 = 63$  мм, толщина и ширина поперечного сечения  $H = 4,4$  мм.

Постановка задачи, моделирующей работу кольцевых силовых элементов, включает следующие этапы: 1) создание начального деформированного состояния, характеризуемого величиной вертикального наружного диаметра  $d_2$ , в результате охлаждения под действием постоянной силы  $P_1$  или изотермического нагружения кольца в мартенситном состоянии силой  $P_2$  и последующей разгрузки; 2) нагрев при противодействии упругой пружины жесткостью  $k_{пр}$ , которая в начальном состо-

янии не деформирована. Согласно данным работы [24] жесткость пружины составляет 140 кН/м. В настоящей работе значение диаметра  $d_2$  после сообщения кольцу начальной фазово-структурной деформации принимается равным 73 мм.

Решение задачи выполняется тремя методами: методом конечных элементов, реализующим трехмерные определяющие уравнения (6) для малых деформаций и (26) для больших, а также с помощью конструкционного метода (22)–(24). При реализации метода конечных элементов для малых и больших деформаций учитываются соотношения (7), (11)–(21), (25), (27)–(29). В конструкционном методе в качестве кинематического параметра выбирается приращение вертикального диаметра кольца ( $d_2 - d_0$ ), равное перемещению верхнего подвижного захвата, а в качестве силового – приложенная к вершине кольца сила. Конструкция, изображенная на рис. 1, имеет две оси симметрии, поэтому для решения задачи об определении НДС допустимо рассматривать только одну четвертую часть кольца. Для расчета принимаются материальные параметры для никелида титана [38]: модули упругости в мартенситном и аустенитном состоянии  $E_M = 28$  ГПа и  $E_A = 84$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , коэффициенты линейного температурного расширения  $\alpha_M = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  и  $\alpha_A = 11 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Температуры фазовых переходов составляют  $M_s = 40$  °C,  $M_f = 20$  °C,  $A_s = 50$  °C,  $A_f = 70$  °C, коэффициент сдвига температур  $k$  принят равным  $5 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{м}^3/\text{Дж}$ . Поскольку объемная составляющая фазовой деформации  $\epsilon_v$  в никелиде титана мала, то она полагалась равной нулю; значения остальных параметров, входящих в определяющее соотношение (6), приведены в подразд. 1.3.

Предварительное исследование сходимости решения методом конечных элементов, выполненное на тестовой задаче, показало, что оптимальное число элементов по толщине кольца составляет 24, и дальнейшее сгущение сетки не приводит к существенному изменению результатов. Величина шага по температуре принималась равной 0,5 °C, поскольку дальнейшее ее уменьшение не оказывает значительного влияния на результат расчета.

На рис. 2 приведены термомеханические диаграммы – расчетные зависимости перемещения подвижного захвата от температуры при охлаждении под постоянной нагрузкой 500 Н, полученные с учетом различных факторов: сплошная красная линия – без учета разносопротивляемости, структурной деформации и смещения характерных температур фазового перехода от действия напряжений; пунктирная красная – с учетом разносопротивляемости; зеленая – с учетом разносопротивляемости и структурной деформации; черная – с учетом разносопротивляемости и смещения характерных температур фазовых превращений; сплошная синяя – с ис-

пользованием определяющих соотношений для конечных деформаций без учета разносопротивляемости; пунктирная синяя – то же, но с учетом разносопротивляемости.

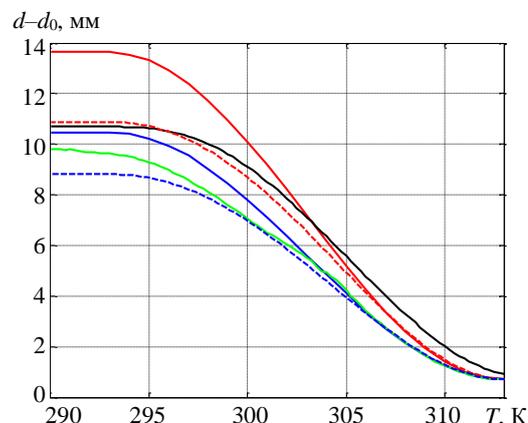


Рис. 2. Термомеханические диаграммы – зависимости приращения диаметра кольца от температуры при охлаждении под действием силы 500 Н

Fig. 2. Thermomechanical diagrams – the dependence of the ring diameter increment on temperature during cooling under the action of a force of 500 N

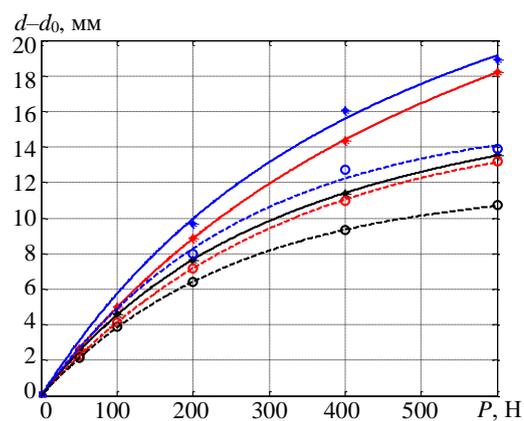


Рис. 3. Конструкционные диаграммы прямого превращения и мартенситной неупругости

Fig. 3. Structural diagrams of direct transformation and martensitic inelasticity

Можно отметить, что при введении разносопротивляемости перемещения становятся значительно меньше, поскольку максимально возможная (по абсолютной величине) фазово-структурная деформация сжатия меньше, чем растяжения. Учет структурной деформации (зеленая линия, см. рис. 2) также приводит к уменьшению конечного значения перемещения, так как в этом случае принимается во внимание изменение ориентации мартенситных элементов, вызванное перераспределением напряжений в конструкции. Учет смещения характерных температур перехода от действия напряжения (черная линия, см. рис. 2) приводит к сдвигу термомеханической диаграммы вправо, а конечная величина

перемещения при этом изменяется незначительно. Также результаты расчета показали, что при использовании определяющих соотношений для больших деформаций величина перемещения подвижного захвата (или приращения вертикального диаметра кольца) получается примерно на 20 % меньше, чем при вычислениях с помощью соотношений для малых деформаций.

Учет разнотензорности при построении термомеханической диаграммы, обозначенной пунктирной красной линией (см. рис. 2), выполнялся двумя способами: с помощью перехода к главным значениям тензора напряжений (определяющие соотношения (6)) и путем введения параметра вида напряженного состояния (определяющие соотношения (8) с учетом (10)). Ранее отмечалось, что соотношения (6) и (8) при описании прямого фазового перехода без структурного превращения дают одинаковые результаты для материала, обладающего симметрией свойств на растяжение и сжатие. В случае различия этих свойств результаты также получились совпадающими в пределах вычислительной точности, из чего можно заключить, что два изложенных в подразд. 1.3 способа учета разнотензорности – путем перехода к главным значениям тензора напряжения и с помощью параметра вида напряженного состояния – являются эквивалентными.

Для применения конструкционного метода к решению задачи требуется информация о конструкционных диаграммах прямого превращения и мартенситной неупругости – зависимостях фазово-структурной составляющей приращения вертикального диаметра кольца от прикладываемой нагрузки, которые необходимо получить экспериментально. В данной работе за неимением экспериментальных данных эти диаграммы строились численно методом конечных элементов с использованием модели (6). При этом используется аппроксимация материальной (не конструкционной) диаграммы прямого превращения  $F_1$  (7) с параметрами, приведенными в подразд. 1.3. Расчетная диаграмма  $F_1^k$  строилась следующим образом: выполнялось несколько расчетов с разными значениями нагрузок, в каждом из которых кольцо подвергалось охлаждению через интервал температур прямого мартенситного превращения под действием постоянного усилия. При этом в расчете учитывалась разнотензорность, но не учитывалась возможность возникновения структурной деформации в процессе нагружения. Результаты расчета – зависимость накопленного после охлаждения приращения вертикального диаметра ( $d_1 - d_0$ ) от действующей силы – приведены на рис. 3 (сплошная красная линия, построенная по нескольким расчетным точкам). Согласно (22) полученное перемещение состоит из упругой, фазово-структурной и температурной составляющих. Поскольку температурная составляющая перемещения пренебрежимо мала, то для получения диаграммы  $F_1^k$  из полного перемещения необходимо вычесть упругую со-

ставляющую, которая вычислялась методом сопротивления материалов по формуле [39]

$$w_e = 0,149 \frac{P \cdot R^3}{EI}. \quad (30)$$

Здесь  $R$  – радиус кольца,  $I$  – момент инерции поперечного сечения кольца, равный в случае квадратного сечения  $H^4/12$ .

Итоговая конструкционная диаграмма  $F_1^k$ , полученная вычитанием из приращения вертикального диаметра ( $d_1 - d_0$ ) упругой составляющей (30), изображена на рис. 3 пунктирной красной линией, аппроксимирующей расчетные точки (красные кружки). Вид аппроксимирующей функции аналогичен (7):

$$F_1^k(P) = (1 - \exp(-P/P_0)) w_{phst}^{max}. \quad (31)$$

Параметры аппроксимации, полученные методом наименьших квадратов, составили  $P_0 = 652$  Н и  $w_{phst}^{max} = 15,6$  мм.

Аналогично была построена конструкционная диаграмма прямого превращения  $F_1^k$  для случая учета больших деформаций, при этом вместо определяющих соотношений (6) использовались соотношения (26). Зависимость накопленного после охлаждения приращения вертикального диаметра ( $d_1 - d_0$ ) от действующей силы, а также диаграмма  $F_1^k$ , полученная после осуществления упругой разгрузки, обозначены на рис. 3 сплошной и пунктирной черными линиями. Параметры аппроксимации соотношением (31) диаграммы  $F_1^k$  в случае учета больших деформаций составляют  $P_0 = 510$  Н и  $w_{phst}^{max} = 11,8$  мм. Таким образом, расхождение в результатах расчетов диаграммы  $F_1^k$  с учетом и без учета больших деформаций достигает 25 %.

Для получения конструкционной диаграммы мартенситной неупругости  $F_2^k$  кольцо нагружалось изотермически при температуре ниже  $M_f$  из начального состояния хаотического мартенсита: объемная доля мартенситной фазы  $q = 1$  и начальные значения тензоров управляющих напряжений для всех мартенситных элементов равны нулю ( $S^*(q) = O$ ). При возрастании нагрузки вертикальный диаметр увеличивается как за счет упругого деформирования, так и за счет переориентации мартенсита (структурная деформация). Было выполнено два варианта расчета с различными условиями структурного превращения: по интенсивности напряжений (12) и по максимальному касательному напряжению (13). Различие между результатами оказалось незначительным, поэтому оба условия структурного превращения могут считаться равноправными; в дальнейших расчетах будет использоваться условие (12). Зависи-

мость приращения вертикального диаметра  $(d_1 - d_0)$  от прикладываемого усилия при деформировании кольца из состояния хаотического мартенсита обозначена на рис. 3 сплошной синей линией. Чтобы построить конструкционную диаграмму мартенситной неупругости  $F_2^k$ , согласно соотношению (22), из величины  $(d_1 - d_0)$  необходимо вычесть упругую составляющую, определяемую выражением (30). Полученной таким образом диаграмме  $F_2^k$  соответствует пунктирная синяя линия на рис. 3. Для конструкционной диаграммы  $F_2^k$  параметры аппроксимации соотношением (31) составляют  $P_0 = 540$  Н и  $w_{\text{phst}}^{\text{max}} = 15,8$  мм.

Принятая в данной работе тождественность диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости в условиях одноосного напряженного состояния (11) позволяет ввести предположение, что и соответствующие конструкционные диаграммы должны быть тождественны:  $F_1^k = F_2^k$ . Полученные графики (см. рис. 3) подтверждают возможность принятия такого предположения, поскольку расхождение между графиками  $F_1^k$  и  $F_2^k$  невелико. Это расхождение можно объяснить несовершенством используемых условий структурного превращения (12) и (13), не позволяющих учесть влияние изменения главных направлений тензоров напряжений на переориентацию мартенситных элементов, а учитывающих только возрастание их интенсивностей. Однако в тех задачах, в которых внешняя нагрузка сохраняет свое направление, влияние поворота главных осей не столь существенно, и условия (12) и (13) могут быть использованы.

Начальное деформированное состояние кольцевого силового элемента, соответствующее значению вертикального диаметра кольца  $d_2 = 73$  мм ( $d_2 - d_0 = 10$  мм), достигается при величине силы 665 Н по расчету, не учитывающему большие деформации, и 960 Н по расчету с учетом больших деформаций (согласно конструкционным диаграммам  $F_1^k$ , обозначенным пунктирной синей и пунктирной черной линиями, см. рис. 3). Для определения сжимающего усилия прессы, использующего кольцевой силовой элемент, моделировался нагрев кольца из начального деформированного состояния, созданного действием этих сил. В процессе нагрева по мере уменьшения вертикального диаметра возрастает сила противодействия сжимаемой пружины, что может приводить к переориентации оставшихся мартенситных элементов и возникновению структурной деформации. Было выполнено четыре варианта расчетов: методом конечных элементов с использованием определяющих соотношений (6) с учетом и без учета структурной деформации, с помощью соотношений (26) для больших деформаций без учета структурной деформации, а также конструкционным методом, учитывающим струк-

турную деформацию. Результаты расчета представлены на рис. 4: зависимость изменения вертикального диаметра кольца (а) и силы противодействия пружины (б) от температуры.

Для вариантов расчета с помощью соотношений для малых деформаций, а также с использованием конструкционного метода, результаты практически совпадают (неразличимы на графике и обозначены синей линией). Это подтверждает корректность использования конструкционного метода в данной задаче как дающего результат, аналогичный полученному методом конечных элементов с использованием трехмерных определяющих соотношений. При этом следует отметить существенную экономию времени расчета при использовании конструкционного метода по сравнению с методом конечных элементов. Влияние структурной деформации в данном случае несущественно потому, что возрастающая сила противодействия пружины достигает предела структурного превращения мартенситных элементов лишь к концу температурного интервала обратного фазового перехода, когда оставшаяся объемная доля мартенсита мала и не способна вызвать значительный прирост деформации даже при полной его переориентации. Учет больших деформаций приводит к несколько отличающемуся результату (черная линия), но расхождения с другими методами расчета в этом случае несущественны.

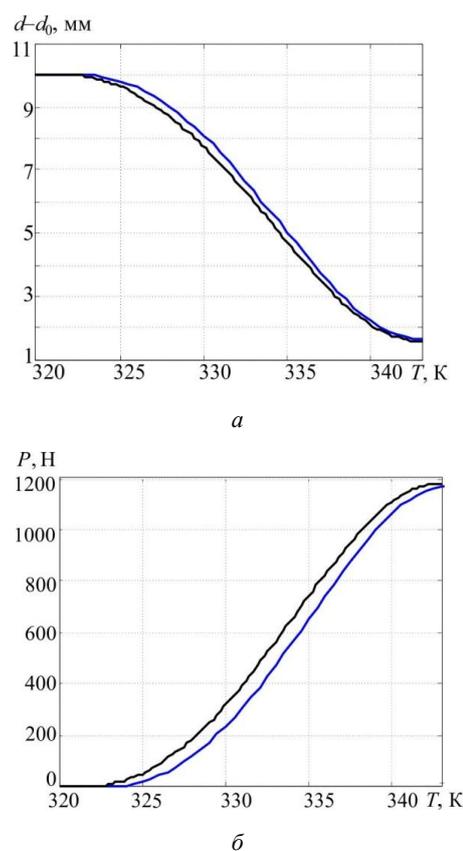


Рис. 4. Зависимость изменения вертикального диаметра кольца (а) и силы противодействия пружины (б) от температуры при нагреве

Fig. 4. Temperature dependence of the vertical ring diameter and the reactive force of the string under heating

## Заключение

В работе представлено развитие одномерной феноменологической модели [9], позволяющей описать основные макромеханические эффекты в СПФ. Предложены основанные на данной модели два расчетных метода решения трехмерных задач прикладного характера: первый метод включает в себя обобщение одномерных определяющих соотношений работы [9] на трехмерный случай и их последующую численную реализацию методом конечных элементов, второй – конструкционный – базируется на построении конструкционных диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости, общих для всего изделия, и предполагает последующее решение задачи в одномерной постановке. Оба метода апробированы на решении задачи о деформировании кольцевого силового элемента из СПФ, сопровождающемся фазовыми и структурными превращениями. Показано, что результаты, полученные двумя методами, практически совпадают.

Приведены два способа учета различия свойств материала на растяжение и сжатие в условиях фазовых и структурных превращений: с помощью перехода к главным направлениям тензора напряжений и путем введения параметра вида напряженного состояния.

## Библиографический список

1. Shape memory alloy engineering: for aerospace, structural and biomedical applications / Ed. L. Lecce, A. Concilio. – Elsevier, 2014. – 422 p.
2. Shape memory alloys: modeling and engineering applications / Ed. D.C. Lagoudas. – New York: Springer Science & Business Media, 2008. – 429 p.
3. Материалы с эффектом памяти формы: справ. издание / С.П. Беляев, А.Е. Волков, В.А. Ермолаев, З.П. Каменцева, С.Л. Кузьмин, В.А. Лихачев, В.Ф. Мозгунов, А.И. Разов, Р.Ю. Хайров; под ред. В.А. Лихачева. – Т. 4. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – 268 с.
4. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol. 76. – P. 244–284. doi.org/10.1016/j.ijplas.2015.08.006
5. Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation / F. Auricchio, E. Bonetti, G. Scalet, F. Ubertini // International Journal of Plasticity. – 2014. – Vol. 59. – P. 30–54. doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.03.008
6. Damanpack A.R., Bodaghi M., Liao W.H. A finite-strain constitutive model for anisotropic shape memory alloys // Mechanics of Materials. – 2017. – Vol. 112. – P. 129–142. DOI: 10.1016/j.mechmat.2017.05.012
7. Kelly A., Stebner A.P., Bhattacharya K. A micromechanics-inspired constitutive model for shape-memory alloys that accounts for initiation and saturation of phase transformation // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2016. – Vol. 97. – P. 197–224. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.02.007

Показано, что оба способа дают идентичные результаты. Отмечено, что непринятие во внимание разносопротивляемости при расчете приводит к получению существенно завышенных значений деформаций и перемещений.

Рассмотрен способ обобщения модели [31], которая для прямого превращения, не сопровождающегося структурным деформированием, является аналогом разрабатываемой трехмерной модели, на случай конечных деформаций. Приведено сопоставление результатов расчетов для случаев с учетом и без учета структурной деформации, разносопротивляемости, конечных деформаций, сдвига характерных температур превращений от действия напряжений; сделан вывод о существенности влияния каждого фактора на результат.

## Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Пермского края (проект № 19-41-590008 p\_a).

## Acknowledgements

The work was made with the financial support by the Russian Foundation for Basic Research and Perm kray authorities

8. A multi-mechanism model describing reorientation and reorientation-induced plasticity of NiTi shape memory alloy / X. Xu, B. Xu, H.M. Jiang, G. Kang, Q. Kan // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2018. – Vol. 31, no. 4. – P. 445–458. DOI: 10.1007/s10338-018-0023-9
9. Тихомирова К.А. Феноменологическое моделирование фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы. Одномерный случай // Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 36–50. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.1.4
10. Шишкин С.В., Махутов Н.А. Расчет и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 412 с.
11. Ганыш С.М., Гаврюшин С.С. Простейшая математическая модель пространственного стержня, выполненного из сплава с эффектом памяти формы // Инженерный вестник. – 2014. – № 10. – С. 69–82.
12. Сафронов П.А. Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разносопротивляемости этих сплавов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 69–89. doi.org/10.25590/mkkm.ras.2017.23.01.069\_089.06
13. Elibol C., Wagner M.F.-X. Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression–shear // Materials Science and Engineering: A. – 2015. – Vol. 621. – P. 76–81. doi:10.1016/j.msea.2014.10.054

14. Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression / Y.I. Yoo, Y.-J. Kim, D.-K. Shin, J.-J. Lee // *International Journal of Solids and Structures*. – 2015. – Vol. 64. – P. 51–61. DOI: 10.1016/j.jisolsolstr.2015.03.013

15. Thermomechanical model for NiTi-based shape memory alloys including R-phase and material anisotropy under multi-axial loadings / P. Sedlak, M. Frost, B. Benesova, T. Ben Zineb, P. Sittner // *International Journal of Plasticity*. – 2012. – Vol. 39. – P. 132–151. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.06.008>

16. Мишустин И.В. Модель деформирования сплава с памятью формы с учетом разносопротивляемости // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2017. – Т. 23, № 4. – С. 484–498. [doi.org/10.25590/mkmc.ras.2017.23.04.484\\_498.03](https://doi.org/10.25590/mkmc.ras.2017.23.04.484_498.03)

17. On superelastic bending of shape memory alloy beams / R. Mirzaeifar, R. Desroches, A. Yavari, K. Gall // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50, no. 10. – P. 1664–1680. DOI: 10.1016/j.jisolsolstr.2013.01.035

18. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. – М.: Наука, 1982. – 317 с.

19. Thamburaja P. A finite-deformation-based phenomenological theory for shape-memory alloys // *International Journal of Plasticity*. – 2010. – No. 26. – P. 1195–1219. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.12.004

20. Reese S., Christ D. Finite deformation pseudo-elasticity of shape memory alloys – Constitutive modelling and finite element implementation // *International Journal of Plasticity*. – 2008. – No. 24. – P. 455–482. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.05.005

21. Modeling of finite deformation of pseudoelastic NiTi shape memory alloy considering various inelasticity mechanisms / S. Dhala, S. Mishra, A. Tewari, A. Alankar // *International Journal of Plasticity*. – 2019. – No. 115. – P. 216–237. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2018.11.018>

22. Xu L., Baxevanis T., Lagoudas D.C. A three-dimensional constitutive model for the martensitic transformation in polycrystalline shape memory alloys under large deformation // *Smart Materials and Structures*. – 2019. – Vol. 28, no. 7. – P. 1163–1175. DOI: 10.1088/1361-665X/ab1acb

23. Столбова О.С. Численное моделирование термомеханического поведения сплавов с памятью формы при конечных деформациях // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 461–476. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2018.24.03.461\_476.09

24. Вьюненко Ю.Н. Исследование механических характеристик силовых элементов из материалов с ЭПФ // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. – 2013. – Т. 18, № 4–2. – С. 2023–2024.

25. Вейман С.М. Деформация, механизм явления и другие характеристики сплавов с эффектом запоминания формы // *Эффект памяти формы в сплавах / под ред. В.А. Займовского*. – М.: Металлургия, 1979. – С. 9–35. DOI: 10.1007/978-1-4684-2211-5

26. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях //

*Известия РАН. МТТ*. – 2010. – № 3. – С. 118–130. DOI: 10.3103/S0025654410030118

27. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // *Известия РАН. МТТ*. – 2014. – № 1. – С. 37–53.

28. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Эффект перекрестного упрочнения сплава с памятью формы при сжатии // *Деформация и разрушение материалов*. – 2019. – № 4. – С. 2–9. DOI: 10.31044/1814-4632-2019-4-2-9

29. Тихомирова К.А. Разработка и численная реализация одномерной феноменологической модели фазовой деформации в сплавах с памятью формы // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 192–206. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.17>

30. Тихомирова К.А. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимосвязи фазовой и структурной деформаций в сплавах с памятью формы // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2018. – № 1. – С. 40–57. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.04

31. Определяющие соотношения для сплавов с памятью формы-микромеханика, феноменология, термодинамика / А.А. Мовчан, Л.Г. Сильченко, С.А. Казарина, Зин Аунг Тант // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 180–194.

32. Calibration and evaluation of seven fracture models / T. Wierzbicki, Y. Bao, Y. Lee, Y. Bai // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2005. – Vol. 47, no. 4–5. – P. 719–743. DOI: 10.1016/j.jimecs.2005.03.003

33. Малеткина Т.Ю. Влияние деформации на мартенситные превращения и эффект памяти формы в сплавах на основе никелида титана: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Томск, 1999. – 176 с.

34. Мовчан А.А., Чжо Т.Я. Решение связанной термоэлектромеханической задачи для стержня из сплава с памятью формы в рамках теории нелинейного деформирования этих материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2008. – Т. 14, № 3. – С. 443–460.

35. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys // *International Journal of Plasticity*. – 2016. – Vol. 85. – P. 130–155. [doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.07.006](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.07.006)

36. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 940 с.

37. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 512 с.

38. Роговой А.А., Столбова О.С. Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 148–162. DOI: 10.1134/S0021894413020156

39. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Справочник по сопротивлению материалов*. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.

## References

1. Lecce L., Concilio A. Shape memory alloy engineering: for aerospace, structural and biomedical applications. *Elsevier*, 2014, 422 p.

2. Lagoudas D.C. Shape memory alloys: modeling and engineering applications. *New York: Springer Science & Business Media*, 2008, 429 p.

3. Beliaev S.P., Volkov A.E., Ermolaev V.A., Kamentseva Z.P., Kuz'min S.L., Likhachev V.A., Mozgunov V.F., Razov A.I., Khairov R.Iu. *Materialy s efektom pamiati formy [Materials with shape memory effect]*. Saint Petersburg: Izdatel'stvo NIIKh SPbGU, Spravochnoe izdanie. Pod redaktsiei Likhacheva V.A., 1998, vol. 4, 268 p.

4. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys. *International Journal of Plasticity*, 2016, 76, pp. 244-284. DOI: 10.1016/J.IJPLAS.2015.08.006
5. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G., Ubertini F. Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation. *International Journal of Plasticity*, 2014, vol. 59, pp. 30-54. DOI: 10.1016/J.IJPLAS.2014.03.008
6. Damanpack A.R., Bodaghi M., Liao W.H. A finite-strain constitutive model for anisotropic shape memory alloys. *Mechanics of Materials*, 2017, 112, pp. 129-142. DOI: 10.1016/j.mechmat.2017.05.012
7. Kelly A., Stebner A. P., Bhattacharya K. A micromechanics-inspired constitutive model for shape-memory alloys that accounts for initiation and saturation of phase transformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, vol. 97, pp. 197-224. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.02.007
8. Xu X., Xu B., Jiang H.M., Kang G., Kan Q. A multi-mechanism model describing reorientation and reorientation-induced plasticity of NiTi shape memory alloy. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2018, no. 31(4), pp. 445-458. DOI: 10.1007/s10338-018-0023-9
9. Tikhomirova K.A. Fenomenologicheskoe modelirovanie fazovyh i strukturnykh deformacij v splavah s pamyat'yu formy. Odnomernyj sluchaj [Phenomenological modeling of phase and structural deformations in shape memory alloys. one-dimensional case]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred*. 2018, vol. 11, no. 1, pp. 36-50. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.1.4
10. Shishkin S.V., Makhutov N.A. Raschet i proektirovanie silovykh konstrukcij na splavah s efektom pamyati formy [Calculation and design of power structures on alloys with shape memory effect]. *Moscow-Izhevsk, NIC «regulyarnaya i haoticheskaya dinamika»*, 2007, 412 p.
11. Ganysh S.M., Gavryushin S.S. Prostejshaya matematicheskaya model' prostranstvennogo sterzhnya, vypolnennogo iz splava s efektom pamyati formy [The simplest mathematical model of a spatial SMA rod]. *Inzhenernyj vestnik*, 2014, no. 10, pp. 69-82.
12. Safronov P.A. Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashchenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugih deformacij i raznosoprotivlyaemosti etih splavov [Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating in solution the problem of martensitic non-elasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under bend]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 69-89. DOI: 10.25590/mkkm.ras.2017.23.01.069\_089.06
13. Elibol C., Wagner M.F.-X. Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear. *Materials Science and Engineering: A*, 2015, no. 621, pp. 76-81. DOI: 10.1016/J.MSEA.2014.10.054
14. Yoo Y.I., Kim Y.-J., Shin D.-K., Lee J.-J. Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, no. 64, pp. 51-61. DOI:10.1016/J.IJSOLSTR.2015.03.013
15. Sedlak P., Frost M., Benesova B., Ben Zineb T., Sittner P. Thermomechanical model for NiTi-based shape memory alloys including R-phase and material anisotropy under multi-axial loadings, *International Journal of Plasticity*, 2012, no. 39, pp. 132-151. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.06.008
16. Mishustin I.V. Model' deformirovaniya splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Model of shape memory alloy deformation with resistance asymmetry]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 484-498. DOI: 10.25590/mkkm.ras.2017.23.04.484\_498.03
17. Mirzaeifar R., Desroches R., Yavari A., Gall K. On superelastic bending of shape memory alloy beams. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50(10), pp. 1664-1680. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.01.035
18. Ambarcumyan S.A. Raznomodul'naya teoriya uprugosti [Multimodular theory of elasticity] *Moscow, Nauka*, 1982, 317 p.
19. P. Thamburaja. A finite-deformation-based phenomenological theory for shape-memory alloys. *International Journal of Plasticity*, 2010, 26, pp. 1195-1219. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.12.004
20. S. Reese, D. Christ. Finite deformation pseudo-elasticity of shape memory alloys – Constitutive modelling and finite element implementation. *International Journal of Plasticity*, 2008, 24, pp. 455-482. DOI:10.1016/j.ijplas.2007.05.005
21. S. Dhala, S. Mishra, A. Tewari, A. Alankar. Modeling of finite deformation of pseudoelastic NiTi shape memory alloy considering various inelasticity mechanisms. *International Journal of Plasticity*, 2019, 115, pp. 216-237. DOI: 10.1016/j.ijplas.2018.11.018
22. L. Xu, T. Baxevanis, D.C. Lagoudas. A three-dimensional constitutive model for the martensitic transformation in polycrystalline shape memory alloys under large deformation. *Smart Materials and Structures*, 2019, no. 28(7), pp. 1163-1175. DOI: 10.1088/1361-665X/ab1acb
23. Stolbova O.S. Chislennoe modelirovanie termomekhanicheskogo povedeniya splavov s pamyat'yu formy pri konechnykh deformacijah [Numerical modeling of the thermomechanical behavior of shape memory alloys under finite deformations]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 461-476. DOI: 10.33113/mkkm.ras.2018.24.03.461\_476.09
24. Vyunenko Yu.N. Issledovanie mekhanicheskikh harakteristik silovykh elementov iz materialov s EPF [Mechanical characteristics of the power element of materials with SME]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, vol. 18, no. 4-2, pp. 2023-2024.
25. Wayman C.M. Deformation, mechanisms and other characteristics of shape memory alloys. *Shape Memory Effects in Alloys, ed. by J. Perkins. New York, Springer US*, 1975. pp. 1-27. DOI: 10.1007/978-1-4684-2211-5
26. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 406-416. DOI: 10.3103/S0025654410030118
27. Mishustin I.V., Movchan A.A. Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses. *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 27-39.
28. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. Effekt perekrestnogo uprochneniya splava s pamyat'yu formy pri szhatii [Effect of cross-hardening in shape memory alloy under compression]. *Deformatsiia i razrushenie materialov*, 2019, no. 4, pp. 2-9. DOI: 10.31044 / 1814-4632-2019-4-2-9
29. Tikhomirova K.A. Razrabotka i chislennaya realizaciya odnomernoj fenomenologicheskoy modeli fazovoj deformacii v splavah s pamyat'yu formy [Development and numerical implementation of one-dimensional phenomenological model for phase deformation in shape memory alloys]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 192-206. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.17

30. Tihomirova K.A. Experimental and theoretical study of the relation between phase and structural deformations in shape memory alloys. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 1, pp. 40-57. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.04
31. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Kazarina S.A., Tant Zin Aung. Opredeliushchie sootnosheniia dlia splavov s pamiat'iu formy – mikromekhanika, fenomenologiya, termodinamika [Shape memory alloys constitutive relations – micromechanics, phenomenology, thermodynamics]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*. 2010, vol. 152, no. 4, pp.180-194.
32. Wierzbicki T., Bao Y., Lee Y., Bai Y. Calibration and evaluation of seven fracture models, 2005, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(4-5), pp. 719-743. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.03.003
33. Maletkina T.Iu. Vliianie deformatsii na martensitnye prevrashcheniia i effekt pamiati formy v splavakh na osnove nikelida titana [Influence of deformation on martensitic transformations and shape memory effect in TiNi-based alloys]. PhD Dissertation, Tomsk, 1999, 176 p.
34. Movchan A.A., Chzho T.Ja. Reshenie nachal'no-kraevykh zadach o prjamom i obratnom prevrashhenii v ramkah nelinejnoj teorii deformirovaniya splavov s pamjat'ju formy [Solution of boundary problems of forward and inverse transformations in the framework of nonlinear deformation theory of shape memory alloys]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2007, vol. 13, no. 4, pp. 452-468.
35. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys. *International Journal of Plasticity*, 2016, 85, pp. 130-155. DOI:10.1016/j.ijplas.2016.07.006
36. Lur'e A.I. *Teoriia uprugosti [Elasticity theory]*. Moscow, Nauka, 1970. 940 p.
37. Lur'e A.I. *Nelineinaia teoriia uprugosti [Nonlinear elasticity theory]*. Moscow, Nauka, 1980. 512 p.
38. Rogovoi A.A., Stolbova O.S. Modeling elastic-inelastic processes in shape memory alloys at finite deformations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54(2), pp. 295-307. DOI: 10.1134/S0021894413020156
39. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Material Resistance Reference]*. Kiev, Naukova dumka, 1988, 736 p.