

Хасанов А.Р. Динамическое расширение цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде. Анализ сопротивления среды динамическому прониканию остроконечного ударника // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 126-137. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.10

Khasanov A.R. A dynamic expansion of a cylindrical cavity in a compressible elastic-plastic medium. The analysis of medium resistance to dynamic penetration of a sharp-nosed impactor. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 126-137. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.10



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.10

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ. АНАЛИЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ ДИНАМИЧЕСКОМУ ПРОНИКАНИЮ ОСТРОКОНЕЧНОГО УДАРНИКА

А.Р. Хасанов

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 17 ноября 2019 г.
Принята: 30 января 2020 г.
Опубликована: 30 марта 2020 г.

Ключевые слова:

расширение цилиндрической полости, упругопластическая среда, нелинейная сжимаемость, прикладная теория проникания, металлы, грунты, модель динамического проникания, модель радиального расширения отверстия, диапазон средних скоростей удара, критерий Кулона, тонкий заостренный ударник.

АННОТАЦИЯ

Приведено решение задачи о динамическом расширении цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде с учетом конечных деформаций, нелинейной сжимаемости, зависимости предела текучести от давления. Главная цель настоящего исследования – разработка новой инженерной модели проникания остроконечных ударников в диапазоне средних скоростей удара на основе полученных результатов анализа задачи о расширении цилиндрической полости в полупространстве («цилиндрическая» аналогия).

На базе аналитического подхода получена модель, определяющая сопротивление среды динамическому расширению полости. Ключевые параметры модели зависят от механических свойств среды, для этих зависимостей предложены аппроксимирующие соотношения на основе обработки механических характеристик ряда материалов (некоторые сплавы и грунты).

Для вывода модели динамического проникания использовалось основное допущение А.Я. Сагомоняна о радиальном расширении отверстия: частицы материала преграды движутся в радиальном направлении от поверхности проникающего в преграду ударника. Такое допущение будет оправданным для класса ударников в виде тонких заостренных тел вращения.

На базе введенных допущений получена модель сопротивления среды динамическому прониканию тонкого заостренного тела вращения. Новая модель, помимо «стандартных» прочностной и инерционной составляющих, содержит «присоединенную массу», которая меняется в ходе процесса проникания.

Проведена верификация новой модели проникания с использованием ряда экспериментальных работ по прониканию ударников различной формы в алюминиевые сплавы. Изучено влияние «присоединенной массы» и инерционных сил сопротивления среды прониканию. Получены условия применимости новой модели: модель проникания предлагается использовать при оценке сопротивления сжимаемой среды прониканию тонкого заостренного тела вращения при скоростях удара 200–800 м/с.

© ПНИПУ

© Хасанов Артур Раисович – ассистент, e-mail: artur_raisovich@rambler.ru, iD: [0000-0003-0776-6909](https://orcid.org/0000-0003-0776-6909).

Artur R. Khasanov – Assistant, e-mail: artur_raisovich@rambler.ru, iD: [0000-0003-0776-6909](https://orcid.org/0000-0003-0776-6909).

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



A DYNAMIC EXPANSION OF A CYLINDRICAL CAVITY IN A COMPRESSIBLE ELASTIC-PLASTIC MEDIUM. THE ANALYSIS OF MEDIUM RESISTANCE TO DYNAMIC PENETRATION OF A SHARP-NOSED IMPACTOR

A.R. Khasanov

Perm State National Research University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 17 November 2019
Accepted: 30 January 2020
Published: 30 March 2020

Keywords:

cylindrical cavity expansion, elastic-plastic medium, nonlinear compressibility, applied theory of penetration, metals, soils, dynamic penetration model, hole radial expansion model, middle impact velocities range, Mohr-Coulomb criterion, slender sharp-nosed impactor.

ABSTRACT

This paper presents the solution of the problem related to the dynamic cylindrical cavity expansion in a compressible elastic-plastic medium. Finite strains, nonlinear compressibility and dependence of the yield stress versus pressure are taken into account in the problem formulation. The study targets at developing a new engineering model on the penetration of a sharp-nosed impactor in the range of middle impact velocities based on the problem analysis results of the cylindrical cavity expansion in a half-space (cylindrical cavity expansion approximation).

Based on the analytical approach a model is obtained that determines the resistance of the medium to dynamic cavity expansion. The main parameters of the model depend on the mechanical properties of the medium. For these dependences we proposed approximating relations based on manipulation of the mechanical properties of a number of materials (some alloys and soils).

To derive the dynamic penetration model the A.Ya. Sagomonyan assumption of the radial expansion of the hole is used. It is assumed that particles of the medium material move in a radial direction from the surface of the impactor penetrating into the shield. Such assumption can be applied for the class of impactors in the form of slender sharp-nosed bodies of revolution.

Based on the assumptions we obtained a model of the medium resistance to the dynamic penetration of a slender sharp-nosed body of revolution. The new model, in addition to the "standard" strength and inertial components, contains the "attached mass", which changes during the penetration process.

The experimental validation of the new penetration model using a series of experimental studies on the penetration of various forms of impactors into aluminum alloys is considered. The influence of the "attached mass" and inertial forces of the medium resistance to the penetration is estimated. The conditions of applicability of the new model are obtained: the penetration model is applicable for estimation of the resistance of a compressible medium to penetration of a thin sharp-nosed body of revolution at impact velocities of 200-800 m/s.

© PNRPU

Введение

Настоящая работа является логическим продолжением исследования [1], в котором была поставлена и решена задача о статическом расширении цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде. Также подчеркнем, что аналогичная задача о расширении сферической полости была рассмотрена в работах [2, 3].

Заметим, что вывод моделей, описывающих расширение полости в среде, – один из эффективных способов оценки сопротивления среды прониканию. Развитию этого подхода посвящено большое число работ, отметим классические работы: исследования советских [4–6] и зарубежных ученых [7–10]; обширные монографии [11, 12]; исследования последних лет, среди которых выделяются работы нижегородских [13–21] и израильских специалистов [22, 23], также отметим обзорные работы [24, 25] и монографию [26], которые содержат важные выводы о связи моделей локального взаимодействия с моделями, описывающими расширение полости. Более подробно обзорная часть представлена в работе [1].

В настоящей статье рассмотрена задача о динамическом расширении цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде с учетом конечных де-

формаций, нелинейной сжимаемости, зависимости предела текучести от давления. Получена модель сопротивления среды динамическому прониканию тонкого заостренного тела вращения, проведена верификация модели на базе ряда экспериментальных результатов, взятых из справочника [27].

1. Постановка задачи и построение аналитического решения

Приведенная в работе [1] постановка задачи о статическом расширении цилиндрической полости в полупространстве содержит основные соотношения, которые также используются в настоящей работе, отличие возникает только для уравнения движения, в которое включена инерционная составляющая. Поэтому здесь ограничимся перечислением основных формул и уравнений.

Рассматривается пространственно-одномерная задача (с осевой симметрией) о динамическом расширении цилиндрической полости в полупространстве под действием нормальной распределенной нагрузки σ_0 на границе. Вводятся следующие обозначения: r, x – лагранжевая и эйлерова координата; R_0, R – начальный

и конечный радиус полости (рис. 1). Расширение цилиндрического отверстия в материале осуществляется от начального R_0 до конечного радиуса R , в области $R \leq x_* \leq x(r_*)$ расположена зона пластических деформаций, за границей $x_* > x(r_*)$ – упругая зона. Кроме того, справедливы соотношения:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad x(r, t) = r + u(r, t), \quad (1)$$

где $u(r, t)$ – перемещение частицы с координатой r .

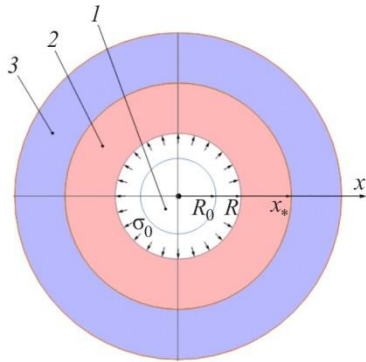


Рис. 1. Схема расширения полости: 1 – полость; 2 – область пластических деформаций; 3 – область упругих деформаций

Fig. 1. The scheme of the cavity expansion: 1 is a cavity; 2 is a plastic regime; 3 is anelastic regime

Закон сохранения массы выделенного материального объема $\rho dV = \rho_0 dV_0$ принимается в форме [28]

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{x}{r}\right) \frac{\partial x}{\partial r}, \quad (2)$$

где ρ_0, ρ – начальная и текущая плотность; dV_0, dV – начальный и текущий элементарный объем частицы.

Связь между главными компонентами лагранжевого (отмечены символом «*») и эйлерового тензоров напряжений [28] записывается в виде:

$$\sigma_r^* = \sigma_r \frac{x}{r}, \quad \sigma_\theta^* = \sigma_\theta \frac{\partial x}{\partial r}. \quad (3)$$

Уравнение движения примем в форме [5, 28]

$$\rho_0 r \frac{dv}{dt} = x \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{\partial x}{\partial r}. \quad (4)$$

В упругой области девиаторные компоненты тензора напряжений в главных осях определяются из соотношений закона Гука в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = 2G \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (5)$$

где G – модуль сдвига; S_i, ε_i – главные компоненты девиатора тензора напряжений и деформаций.

Условие пластичности принимается в форме Кулона [4]:

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi, \quad (6)$$

где τ, σ – касательное и нормальное напряжение на площадке; c – сцепление; φ – угол внутреннего трения.

В компонентах тензора напряжений σ_r и σ_θ для пространственно-одномерного случая с осевой симметрией условие (6) принимает вид [4]

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \pm \tau_0 + \mu(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (7)$$

где $\tau_0 = 2c \cos \varphi$, $\mu = \sin \varphi$, знак перед τ_0 – «минус», если $\sigma_r < \sigma_\theta$, в противном случае «плюс».

Уравнение состояния запишем в единой форме (для металлов и пористых сред):

$$p = 3K'\varepsilon - 3K''\varepsilon_p \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_p}, \quad (8)$$

где K', K'' – коэффициенты (объемные модули) при линейном и нелинейном слагаемом.

Начальный (касательный) объемный модуль материала имеет вид

$$K = \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = K' + K''. \quad (9)$$

Выражение (8), записанное в общем виде, позволяет переходить к частным случаям.

Вариант А. Поскольку металлы являются пластически несжимаемыми, то $K'' \rightarrow 0$ и из (8) следует известное уравнение состояния (рис. 2, кривая 1):

$$p = 3K\varepsilon. \quad (10)$$

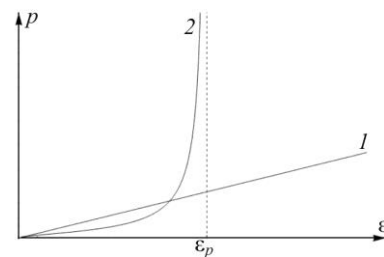


Рис. 2. Зависимость уравнения состояния: 1 – для металла; 2 – для пористого материала

Fig. 2. The dependence for the equation of state in the metal (1) and porous material (2)

Вариант Б. Для описания сжимаемости пористой среды ($K' \rightarrow 0$) необходимо учесть экспериментальный факт существования некоторой степени уплотнения ρ_0 / ρ_p , начиная с которой сопротивление уплотнению существенно возрастает. Этот эффект связан с выборкой начальной пористости материала. В этом случае уравнение состояния принимаем в форме [2]:

$$p = -3K\varepsilon_p \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_p}, \quad (11)$$

где ε_p – предельная деформация пористой среды (рис. 2, кривая 2).

Существует предельный объем V_p , связанный с предельной деформацией зависимостью $(V_p - V_0)/V_0 = 3\varepsilon_p$. Переходя в этой формуле от объемов к плотностям, получим связь между предельной деформацией грунта ε_p и предельной плотностью ρ_p в виде соотношения $\rho_p = \rho_0 / (1 + 3\varepsilon_p)$.

Используя второе соотношение (5), можно получить связь между текущей плотностью, предельной деформацией и давлением для пористых сред:

$$p = -3K\varepsilon_p \frac{\ln \rho_0 - \ln \rho}{\ln \rho_0 - \ln \rho - 3\varepsilon_p}, \quad (12)$$

и металлов:

$$p = K(\rho_0 / \rho - 1). \quad (13)$$

Предполагаем отсутствие деформации в направлении оси цилиндрической полости $\varepsilon_z = 0$, поэтому в упругой области справедлива связь $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$. Также полагаем, что это соотношение сохраняется и в пластической области для $\nu = 1/2$ [29]. Используя условие пластичности (7) в условиях цилиндрической симметрии, можно выразить все компоненты тензора напряжений в пластической области через давление:

$$\sigma_r = (1 + \mu)p - \frac{\tau_0}{2}, \quad \sigma_\theta = (1 - \mu)p + \frac{\tau_0}{2}. \quad (14)$$

Полагая, что τ_0 и μ – постоянные величины, преобразуем уравнение (4) к виду

$$x \frac{\partial p}{\partial r} + 2 \frac{\mu}{1 + \mu} p \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\tau_0}{1 + \mu} \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\rho_0}{1 + \mu} r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Обозначим $\mu^* = \frac{\mu}{1 + \mu}$, умножим уравнение (15) на $x^{2\mu^* - 1}$ и проинтегрируем по лагранжевой координате от R_0 до r с учетом граничных условий $p(R_0) = -p_0$ и $x(R_0) = R$. Получим выражение для распределения давления в пластической области при $R_0 \leq r \leq r_*$ (или $R \leq x \leq x_*$):

$$p = \frac{\tau_0}{2\mu} - \left(p_0 + \frac{\tau_0}{2\mu} \right) \left(\frac{R}{x} \right)^{2\mu^*} + \frac{\rho_0}{1 + \mu} x^{-2\mu^*} \int_{R_0}^r r x^{2\mu^* - 1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr, \quad (16)$$

где $x_* = x(r_*)$ – внешняя граница пластической области. Необходимо отметить, что в выражение (16) входит интеграл (обозначим его $I(r) = \int_{R_0}^r r x^{2\mu^* - 1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr$), который отражает влияние сил инерции.

При вычислении интеграла будем опираться на предположение о постоянстве плотности (это предположение применяется только при оценке сил инерции) $\rho \approx \rho_0$, откуда следует:

$$x^2 = r^2 + R^2 - R_0^2.$$

Дифференцируем два раза последнее выражение, получим:

$$2x \cdot \dot{x} = 2R \cdot \dot{R},$$

$$2x \cdot \ddot{x} + 2\dot{x}^2 = 2R \cdot \ddot{R} + 2\dot{R}^2.$$

Выразим \ddot{x} :

$$\ddot{x} = x^{-1} \left[R \cdot \ddot{R} + \dot{R}^2 \cdot \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right) \right]. \quad (17)$$

С учетом (17) преобразуем интеграл $I(r)$ и перейдем к интегрированию по x :

$$I(x) = \int_R^x x^{2\mu^* - 1} \left[\dot{R}^2 \cdot \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right) + R\ddot{R} \right] dx. \quad (18)$$

Вычислим интеграл (18):

$$I(x) = \frac{\dot{R}^2 + R\ddot{R}}{2\mu^*} \left(x^{2\mu^*} - R^{2\mu^*} \right) - \frac{R^2 \dot{R}^2}{2\mu^* - 2} \left(x^{2\mu^* - 2} - R^{2\mu^* - 2} \right). \quad (19)$$

Предполагаем, что во внешней (упругой) области при $r > r_*$ (или $x > x_*$) справедливо обычное упругое статическое решение при малых деформациях. Общее решение упругой задачи, следуя [29]:

$$\sigma_r = \frac{D}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -\frac{D}{r^2}, \quad u = -\frac{3}{2E} \frac{D}{r}, \quad (20)$$

где D – неизвестная постоянная.

Следуя методике [2, 3] получения решения задачи о расширении сферической полости, требуем на границе упругой и пластической областей [29] непрерывности напряжений σ_r , σ_θ и радиального перемещения u , откуда находим значение неизвестной D и значение

$$p_0(x) = \frac{\tau_0}{2\mu} \left[-1 + \left(\frac{R}{x_*} \right)^{-2\mu^*} \right] + \frac{\rho_0}{1 + \mu} R^{-2\mu^*} I(x_*).$$

Подставляя последнее выражение в (16) и используя связь (18), получим:

$$\bar{p}(\xi) = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \xi^{-2\mu^*} \right) - \frac{1}{1 + \mu} \Omega \times \left[\frac{1 + \Psi}{2\mu^*} \left(\xi^{-2\mu^*} - 1 \right) - \frac{1}{2\mu^* - 2} \left(\frac{\bar{R}}{\xi} \right)^2 \left(\xi^{-2\mu^* + 2} - 1 \right) \right], \quad (21)$$

где $\Omega = \frac{\rho_0 \dot{R}^2}{\tau_0}$, $\Psi = \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}$, $\bar{R} = \frac{R}{x_*}$, $\xi = \frac{x}{x_*}$, $\bar{p} = \frac{p}{\tau_0}$.

Аналогичным образом определяется удельное сопротивление $\sigma_0 = -\sigma_r(R)$ материала расширению полости:

$$\sigma_0 = \frac{\tau_0}{2\mu} \left[-1 + (1 + \mu) \left(\frac{R}{x_*} \right)^{-2\mu^*} \right] + \rho_0 R^{-2\mu^*} I(x_*), \quad (22)$$

где σ_0 – нормальное напряжение на границе полости (внешнее воздействие).

Связь между параметрами x_* и r_* имеет вид

$$x_* = r_* \left(1 + \frac{3\tau_0}{4E} \right).$$

Чтобы получить соответствующие (21), (22) выражения для металлов, осуществим предельный переход при $\mu \rightarrow 0$. Воспользовавшись правилом Лопиталя, получим:

$$\bar{p}(\xi) = \ln \xi + \Omega \left[(1 + \psi) \ln \xi - \frac{1}{2} \bar{R}^2 \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \right], \quad (23)$$

$$\sigma_0 = \frac{\tau_0}{2} - \tau_0 \ln \bar{R} + \rho_0 \bar{R}^2 \left[\ln \frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{2} (\bar{R}^2 - 1) \right] + \rho_0 R \bar{R} \ln \frac{1}{\bar{R}}. \quad (24)$$

Из соотношения (12), выразив ρ_0 / ρ и подставив его в уравнение неразрывности, получим окончательное нелинейное уравнение для определения радиуса цилиндрической полости R в пористой среде с заданными характеристиками под действием внутреннего давления σ_0 :

$$\int_R^{x_*} \exp \left(- \frac{3\varepsilon_p \cdot p(x)}{p(x) + 3K\varepsilon_p} \right) dx = \frac{1}{2} (r_*^2 - R_0^2). \quad (25)$$

Проводя аналогичные выкладки для соотношения (13), получим нелинейное уравнение для определения радиуса цилиндрической полости в металле:

$$\int_R^{x_*} \frac{Kx dx}{p(x) + 3K} = \frac{1}{2} (r_*^2 - R_0^2). \quad (26)$$

Выражение для σ_0 (22) и (24) позволяет оценить сопротивление среды динамическому расширению полости:

$$\sigma_d = \sigma_c + \rho_0 \dot{R}^2 \cdot k_1 + \rho_0 R \ddot{R} \cdot k_2, \quad (27)$$

где первое слагаемое σ_c отражает собственное сопротивление, второе и третье слагаемые характеризуют инерционное сопротивление. Безразмерные параметры определяются соотношениями:

– для металлов:

$$\bar{\sigma}_c = \frac{\sigma_c}{\tau_0} = \frac{1}{2} - \ln \bar{R}, \quad k_1 = k_2 + \frac{1}{2} (\bar{R}^2 - 1), \quad k_2 = \ln \frac{1}{\bar{R}}; \quad (28)$$

– для пористых сред (грунтов):

$$\bar{\sigma}_c = \frac{1}{2\mu} \left[1 - (1 + \mu) \bar{R}^{-2\mu^*} \right],$$

$$k_1 = k_2 - \frac{\bar{R}^{-2\mu^* + 2} - 1}{2\mu^* - 2}, \quad k_2 = \frac{\bar{R}^{-2\mu^*} - 1}{2\mu^*}. \quad (29)$$

Оценка параметра \bar{R} , входящего в соотношения (28) и (29), получена в [1], где предложена следующая аппроксимирующая зависимость:

$$\bar{R} = \frac{C}{\sqrt{\bar{K}}}, \quad (30)$$

где $\bar{K} = K / \tau_0$. В работе [1] также был проведен комплекс расчетов для ряда сплавов и геологических сред на основе большого числа данных и получены следующие параметры аппроксимирующей зависимости (30): $C = 1,300$ (магниеые сплавы); $C = 1,435$ (алюминиевые сплавы); $C = 1,359$ (титановые сплавы); $C = 1,283$ (стали); $C = 1,319$ (пески); $C = 1,313$ (супеси); $C = 1,460$ (суглинки); $C = 1,888$ (глины). Отметим, что относительная ошибка аппроксимации для всех зависимостей не превосходит 1 %.

2. Модель динамического проникания

Построим инженерную модель динамического проникания жесткого заостренного тела в пластичную преграду при условии вязкого образования кратера. В качестве основного допущения используем известную модель А.Я. Сагомояна [5] – модель радиального расширения отверстия, справедливую для заостренных ударников.

Предполагаем, что частицы материала преграды движутся в радиальном направлении в процессе проникания и образования кратера.

Будем предполагать, что радиус кратера $R(y)$ ограничен поверхностью ударника, за исключением лицевых слоев преграды, где наблюдается инерционное расширение отверстия. Пренебрегая последним, при средних скоростях проникания (при ударе по нормали) примем радиус кратера равным границе поверхности ударника $f(\zeta)$:

$$R(y) = f(\zeta), \quad (31)$$

где f – уравнение образующей ударника; ζ – координата, отсчитываемая от кончика ударника вдоль его оси (рис. 3).

Уравнение образующей кратера зависит от текущего положения ударника при проникании, поэтому в зависимости (31) удобно перейти к координате y , отсчитываемой от лицевой поверхности, и к текущей глубине проникания ударника L : $y = L - \zeta$. Тогда (31) перейдет к виду

$$R(y) = f(L - y). \quad (32)$$

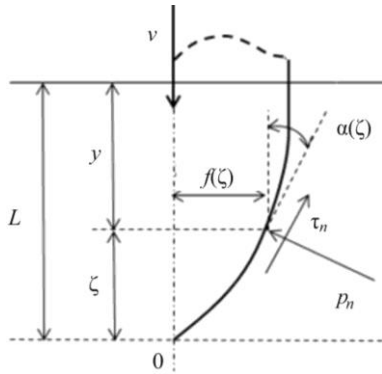


Рис. 3. Схема проникания ударника в преграду

Fig. 3. The scheme of the impactor penetration into the shield

Отметим, что для цилиндрического ударника с конической головной частью высотой h и углом полураствора конуса при вершине α уравнение образующей имеет вид

$$f(L-y) = \begin{cases} (L-y) \cdot \operatorname{tg}\alpha, & (L-y) < h, \\ h \cdot \operatorname{tg}\alpha, & (L-y) > h. \end{cases} \quad (33)$$

Найдем производные первого и второго порядка от выражения (32):

$$\dot{R} = f'(L-y) \cdot \dot{L} = f'(L-y) \cdot v, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= f''(L-y) \cdot \dot{L} + f'(L-y) \cdot \ddot{L} = \\ &= f''(L-y) \cdot v^2 + \frac{1}{2} f'(L-y) \cdot \frac{d(v^2)}{dL}. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что в общем случае (см. рис. 3)

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} = f'(L-y) = \operatorname{tg}\alpha(\zeta). \quad (36)$$

Для ударника с конической головной частью с учетом (33) получим:

$$\dot{R} = v \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad \ddot{R} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dL} \operatorname{tg}\alpha. \quad (37)$$

Формулы (37) справедливы при условии $(L-y) < h$, что соответствует скорости и ускорению расширения радиуса кратера для конической части ударника. Цилиндрическая часть ударника (согласно допущению) не приводит к расширению кратера, и производная в этом случае будет равна нулю.

Используем основное предположение модели А.Я. Сагомояна о радиальном расширении частиц материала преграды при проникании жесткого заостренного ударника, а именно: полагаем, что сопротивление материала p_n образованию кратера (см. рис. 3) совпадает с удельным сопротивлением расширению цилиндрической полости σ_d , определяемым формулой (27):

$$p_n = \sigma_d. \quad (38)$$

В этом случае нормальное на границе удельное сопротивление прониканию для цилиндрического ударника с конической головной частью согласно (37):

– для конической части

$$p_n = \sigma_c + k_1 \rho_0 v^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{2} k_2 \rho_0 \operatorname{tg} \alpha R \frac{d(v^2)}{dL}, \quad (39)$$

– для цилиндрической части

$$p_n = \sigma_c.$$

Сопротивление прониканию ударника, обусловленное удельным сопротивлением материала p_n ,

$$F_C = 2\pi \int_0^L f(\zeta) p_n(\zeta) \operatorname{tg} \alpha(\zeta) d\zeta, \quad (40)$$

и трением –

$$F_T = 2\pi \int_0^L f(\zeta) \tau_n(\zeta) d\zeta. \quad (41)$$

Тогда уравнение движения ударника массы m примет вид

$$\frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dL} = -F_C - F_T = -2\pi \int_0^L f(\zeta) p_n(\zeta) [\operatorname{tg} \alpha(\zeta) + k_T] d\zeta. \quad (42)$$

В выражении (42) принято, что $\tau_n = k_T p_n$, где k_T – коэффициент трения.

Уравнение движения (42) с учетом соотношений (34), (35), (27) можно привести к виду (43), по форме совпадающему с известным уравнением, основанным на эмпирической двухчленной зависимости сопротивления прониканию [30]:

$$\frac{1}{2} \{m + A(L)\} \frac{d(v^2)}{dL} = -B(L) - C(L)v^2. \quad (43)$$

Принципиальное отличие уравнения (43) от эмпирической зависимости состоит в наличии «присоединенной массы» $A(L)$, которая меняется в ходе процесса проникания. В результате этого получаем уравнение движения материальной точки с переменной массой.

В уравнении (43)

$$A(L) = 2\pi \int_0^L f(\zeta) [\operatorname{tg} \alpha(\zeta) + k_T] k_2 \rho_0 R f'(\zeta) d\zeta, \quad (44)$$

$$B(L) = 2\pi \int_0^L f(\zeta) [\operatorname{tg} \alpha(\zeta) + k_T] \sigma_c(\zeta) d\zeta, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} C(L) &= 2\pi \int_0^L f(\zeta) [\operatorname{tg} \alpha(\zeta) + k_T] \times \\ &\times [k_1 \rho_0 (f'(\zeta))^2 + k_2 \rho_0 R f''(\zeta)] d\zeta. \end{aligned} \quad (46)$$

Следуя [23, 26], можно вывести формулы в явном виде для «интегральных характеристик» проникания, а именно – баллистического предела (БП) v_{bl} :

$$v_{bl}^2 = \int_0^{b+h} \frac{2B(L)}{m + A(L)} \exp\left(\int_0^L \frac{2C(\gamma)}{m + A(\gamma)} d\gamma\right) dL, \quad (47)$$

и остаточной скорости (ОС) v_{res} :

$$v_{res}^2 = (v_0^2 - v_{bl}^2) \exp\left(-\int_0^{b+h} \frac{2 \cdot C(L)}{m + A(L)} dL\right), \quad (48)$$

где v_0 – начальная скорость (скорость удара); h – высота головной (конической или оживальной) части ударника; b – толщина плиты.

Под баллистическим пределом v_{bl} понимается такая скорость удара, при которой ударник пробивает преграду конечной толщины b и покидает ее с нулевой остаточной скоростью $v_{res} = 0$.

Приведем также более простую модель проникания конического ударника без учета влияния присоединенной массы и трения на сопротивление прониканию:

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -\frac{4\pi \text{tg}^2 \alpha}{m} \times \left(\int_0^L \zeta \cdot \sigma_c(\zeta) d\zeta + v^2 \text{tg}^2 \alpha \int_0^L \zeta \cdot k_1(\zeta) \cdot \rho_0(\zeta) d\zeta \right). \quad (49)$$

В случае проникания в однородную пластину в соотношении (49) можно вычислить интегралы и получить следующую зависимость:

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -\frac{4\pi \text{tg}^2 \alpha}{m} (\sigma_c + k_1 \rho_0 \text{tg}^2 \alpha \cdot v^2) \frac{L^2}{2}, \quad (50)$$

где выражение в круглых скобках соответствует удельному сопротивлению проникания (27) при нулевом третьем слагаемом.

3. Верификация модели проникания на основе натуральных экспериментов

Для верификации модели из справочника [27] были выбраны пять экспериментальных работ по прониканию ударников с конической и оживальной головной частью в алюминиевую плиту [8–10, 31, 32]. Выбор экспериментов для верификации был продиктован, во-первых, соответствием условий проникания допущениям модели (тонкий заостренный ударник, средние скорости проникания и т.д.), а во-вторых, доступностью информации по механическим характеристикам испытываемых материалов, в частности, по динамическому пределу текучести. Отметим, что в рамках данной статьи верификация модели на геологических средах не рассматривается, т.е. формулы (29) не использовались, все расчеты проведены с применением формул (28).

Еще одно замечание касается учета трения. Для оценки коэффициента трения использовался результат экспериментальной работы [33]. Основной вывод данной работы: при ударном проникании влияние трения на расход кинетической энергии ударника составляет 3%. Поскольку расход начальной кинетической энергии ударника равен работе силы сопротивления преграды прониканию ударника на конечную глубину по мере его движения в полубесконечной плите, то на базе экспериментальных данных можно оценить коэффициент трения.

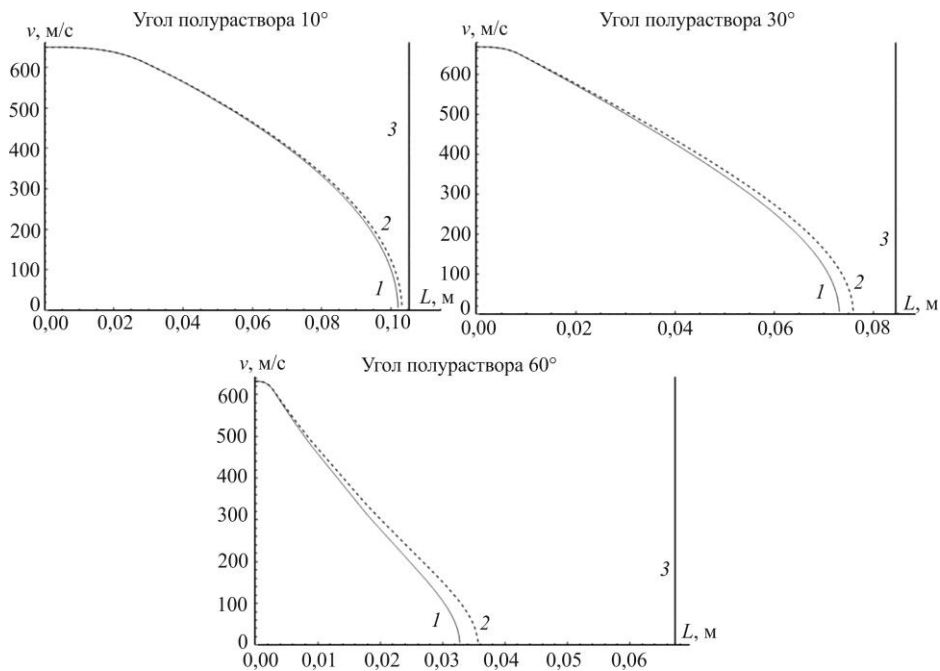


Рис. 4. Зависимость скорости ударника от глубины проникания, расчет на основе экспериментальных данных [32]: 1 – без переменной массы; 2 – с переменной массой; 3 – глубина проникания (эксперимент)

Fig. 4. The dependence of the impactor velocity on the penetration depth, the calculation is based on the experimental data [32]: 1 – without variable mass; 2 – with variable mass; 3 – penetration depth (experiment)

Результаты вычислений по данным экспериментальных работ [8–10, 31, 32] составили $k_T = 0,01...0,02$.

В упомянутых экспериментальных работах в качестве материала преграды использовались следующие алюминиевые сплавы: сплав 6061-T651 в [8], сплав 5083-N131 в [9], сплав 7075-T651 в [10], сплав 6061-T6511 в [31] и сплав 65-S в [32]. Для этих сплавов в расчетах применялись следующие значения динамического предела текучести: 500 МПа для сплавов 6061-T651 и 6061-T6511 (согласно работам [34, 35]), 700 МПа для сплава 7075-T651 (согласно исследованию [36]) и 430 МПа для сплава 5083-N131 (согласно [37]). В перечисленных работах приведены эксперименты и численные расчеты по оценке динамического предела текучести указанных сплавов.

К сожалению, информация по динамическому пределу текучести для сплава марки 65-S отсутствует, однако работа [32] представляет интерес, поскольку в ней варьировались углы при вершине конической части ударника. Поэтому динамический предел текучести подбирался для самого острого ударника ($\alpha = 10^\circ$). Таким способом оценивался диапазон углов полураствора конуса, при котором справедлива используемая модель проникания. Также был оценен вклад «присоединенной массы», образуемой в процессе движения ударника в преграде. Исходя из графиков на рис. 4, можно заключить, что влияние «присоединенной массы» увеличивается с ростом угла полураствора конуса, однако остается незначительным – разница между двумя кривыми на графиках составляет несколько процентов. Учитывая основное допущение о радиальном расширении отверстия, справедливое для заостренных ударников, рассматривать большие углы при вершине конуса не имеет смысла, поэтому вкладом «присоединенной массы» можно пренебречь, полагая $A(L) = 0$. Этот результат подтверждается и по экспериментальным данным других работ. Отметим, что влияние «присоединенной массы» может оказаться значительным для затупленных форм ударника, в таком случае в процессе проникания возможно образование пробки, однако эти варианты проникания выходят за рамки настоящей статьи.

В табл. 1 содержатся результаты сравнения теоретических и экспериментальных значений глубины проникания (ГП). Ошибка отклонения теоретических результатов от экспериментальных вычислялась по формуле

$$\omega = \frac{L_{\text{теор}} - L_{\text{эк}}}{L_{\text{эк}}} \cdot 100\%, \quad (51)$$

где $L_{\text{эк}}$ – ГП, полученная в эксперименте; $L_{\text{теор}}$ – ГП, рассчитанная по формулам (28), (30), (43)–(46), коэффициент трения в расчетах принят $k_T = 0,01$. Согласно полученным результатам относительная ошибка не превосходит 10 % для ударников с углом полураствора не выше 20° . Отметим, что при $\alpha = 25^\circ$ ошибка примерно

равна 10 %, а при $\alpha = 30^\circ$ уже превосходит 20 %. Предлагается следующее условие применимости модели для конических ударников: угол полураствора не выше 25° .

Таблица 1

Сравнение результатов расчета глубины проникания конического ударника в алюминиевый сплав 65-S с экспериментальными данными [32]

Table 1

Comparing the calculated and measured penetration depths of a conical impactor into the 65-S aluminum shield [32]

Угол α , град.	Скорость удара, м/с	ГП (экспериментальная), мм	ГП (теоретическая), мм	ω , %
10	650	105,2	103,6	-1,5
	762	>137,2	132,6	-3,3
15	644	94,7	92,6	-2,2
	761	127,0	119,8	-5,7
20	661	92,7	87,8	-5,3
	760	118,6	107,6	-9,3
25	654	85,3	78,2	-8,3
	768	111,5	97,2	-12,8
30	670	84,6	72,3	-14,5
	793	113,8	88,9	-21,9
40	657	76,2	54,8	-28,1
	771	99,6	64,5	-35,3
50	646	71,4	39,9	-44,2
	752	90,9	45,2	-50,1
60	632	67,1	26,9	-60,0
	774	92,2	30,7	-66,7

В табл. 2 приведены результаты испытаний, расчетов и их сравнение по глубине проникания (ГП) в полубесконечную преграду оживальных ударников с отношением радиуса дуги окружности оживальной формы к максимальному диаметру (калибру), равным трем. Коэффициент трения в расчетах k_T принят равным 0,02. Как и ранее, относительная ошибка вычисляется по формуле (51).

На рис. 5, 6 сравниваются остаточная скорость (ОС) и баллистический предел (БП) для цилиндрического ударника диаметром 8,31 мм с конической головной частью высотой 14,83 мм ($\alpha \approx 15,7^\circ$) на базе работы [9]. Здесь маркеры – экспериментальные результаты, а кривые – теоретические БП и ОС, вычисленные по формулам (47) и (48) соответственно.

Относительная ошибка вычисления значений ОС и БП, представленных на рис. 5, 6, определялась по формуле, аналогичной (51). В целом можно отметить, что, за исключением случаев сравнения по остаточной скорости для скоростей удара, близких к баллистическому пределу, ошибка отклонения лежит в пределах 10 %.

Отметим, что сопоставление результатов проводилось по значениям, которые удовлетворяли допущениям модели, т.е. высокие скорости проникания опускались. Сравнение с результатами других экспериментальных работ подтвердило непригодность модели в случае про-

никания конических ударников с углами полураствора более 30°. Также модель непригодна при низких ударных скоростях (менее 200 м/с) и при проникании в тонкие преграды.

Таблица 2

Сравнение результатов расчета глубины проникания оживального ударника в алюминиевые сплавы с экспериментальными данными: 6061-T651 [8], 7075-T651 [10], 6061-T6511 [31]

Table 2

Comparing the calculated and measured penetration depths of an ogive impactor into an aluminum shield: 6061-T651 [8], 7075-T651 [10], 6061-T6511 [31]

Источ-ник	Скорость удара, м/с	ГП (экспериментальная), мм	ГП (теоретическая), мм	ω , %
[8]	440	44	43	-3,2
	730	94	91	-3,2
	790	105	102	-2,8
[10]	372	26	28	5,7
	695	70	70	0,4
[31]	569	58	56	-3,9
	570	55	56	1,6
	679	72	73	1,0
	821	102	96	-5,6
	794	103	93	-9,4

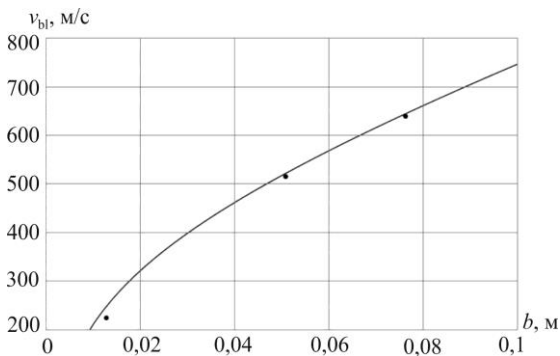


Рис. 5. Зависимость баллистического предела от толщины преграды, расчет на основе экспериментальных данных [9]

Fig. 5. The dependence of the ballistic limit velocity on the shield thickness, the calculation is based on the experimental data [9]

Сравнительный анализ полученной модели проникания с данными натуральных экспериментов позволяет

Библиографический список

1. Аптуков В.Н., Хасанов А.Р. Расширение цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 5–23. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.01
2. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 1. Влияние механических характеристик, свободной поверхности, слоистости // Проблемы прочности. – 1991. – № 12. – С. 1262–1268.

заключить, что новую модель можно применять для тонких конических ударников (и их аналогов в форме оживала) с углом полураствора не более 25°, проникающих в металлические плиты средней толщины и более, при скоростях проникания 200–800 м/с.

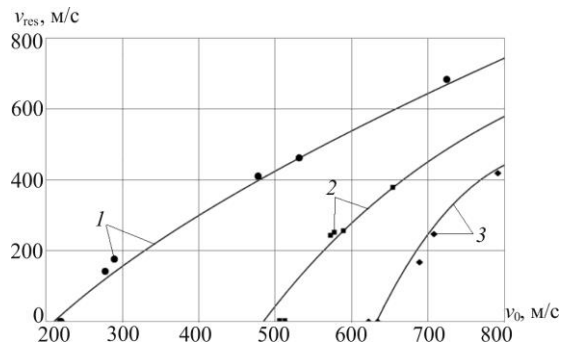


Рис. 6. Зависимость остаточной скорости ударника от скорости удара, расчет на основе экспериментальных данных [9]: 1 – преграда толщиной 12,7 мм; 2 – преграда толщиной 50,8 мм; 3 – преграда толщиной 76,2 мм

Fig. 6. The dependence of the residual velocity of the impactor on the impactor velocity, the calculation is based on the experimental data [9]: 1 – the shield thickness is 12,7 mm; 2 – the shield thickness is 50,8 mm; 3 – the shield thickness is 76,2 mm

Закключение

Представлена новая постановка задачи о динамическом расширении цилиндрической полости в упругопластической сжимаемой среде с учетом конечных деформаций. Приведено разрешающее выражение в виде интегрального уравнения, определяющего сопротивление динамическому расширению полости и размер пластической зоны для различных материалов. Предложены аппроксимирующие соотношения для определения основных параметров, характеризующих сопротивление среды динамическому расширению полости. С учетом полученного решения разработана новая модель проникания при основном допущении радиального расширения полости, предложенном А.Я. Сагомояном. Новая модель применима при оценке сопротивления сжимаемой среды прониканию тонкого заостренного тела при скоростях удара 200–800 м/с.

3. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 2. Влияние инерционных характеристик. Температурные эффекты // Проблемы прочности. – 1991. – № 12. – С. 1269–1274.
4. Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1964. – 237 с.
5. Сагомоян А.Я. Проникание. – М.: Изд-во МГУ, 1974.
6. Сагомоян А.Я. Динамика пробивания преград. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

7. Bishop R.F., Hill R., Mott N.F. The theory of indentation and hardness tests // *Proceedings of the Physics Society*. – 1945. – Vol. 57, № 3. – P. 147–159.
8. Forrestal M.J., Okajima K., Luk V.K. Penetration of 6061-T651 aluminum target with rigid long rods // *Journal of Applied Mechanics*. – 1988. – Vol. 55(4). – P. 755–760.
9. Forrestal M.J., Luk V.K., Brar N.S. Perforation of aluminum armor plates with conical-nose projectiles // *Mechanics of Materials*. – 1990. – Vol. 10(1–2). – P. 97–105.
10. Penetration of 7075-T651 aluminum targets with ogival-nose rods / M.J. Forrestal, V.K. Luk, Z. Rosenberg, N.S. Brar // *Int. J. of Solids and Structures*. – 1992. – Vol. 29(14–15). – P. 1729–1736.
11. Satapathy S. Application of cavity expansion analysis to penetration problems / The Univ. of Texas at Austin, Inst. Adv. Technol., 1997. Report No. IAT.R-0136.
12. Yu H.S. *Cavity Expansion Methods in Geomechanics* // Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. – 2000.
13. Котов В.Л. Исследование применимости автомодельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта «ударник – грунт» // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. – Вып. 70. – С. 123–131.
14. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде / В.Л. Котов [и др.] // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2011. – Вып. 73. – С. 58–63.
15. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны / Е.Ю. Линник [и др.] // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2012. – Вып. 74. – С. 49–57.
16. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. Определение параметров квадратичной модели локального взаимодействия при внедрении сферического ударника в мягкий грунт // *Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб.* – Н. Новгород, 2013. – Вып. 75(1). – С. 47–55.
17. Котов В.Л., Константинов А.Ю. Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде на основе модели локального взаимодействия // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 225–233. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.22
18. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт / В.Л. Котов [и др.] // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 114–125.
19. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Константинов А.Ю. Моделирование процессов динамического внедрения пространственных тел в сжимаемую упругопластическую среду // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2017. – № 4. – С. 92–108. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.4.07
20. Сравнительный анализ методов моделирования проникания и плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде / В.Г. Баженов [и др.] // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2015. – Т. 56, № 3. – С. 44–54. DOI: 10.15372/PMTF20150306
21. Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. Методика численного расчета оптимальных форм тел вращения при движении в грунтовой среде // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2015. – № 2. – С. 5–20. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.01
22. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical Solution for Penetration by Rigid Conical Impactors Using Cavity Expansion Models // *Mech. Res. Commun.* – 2000. – Vol. 27(2). – P. 185–189. DOI: 10.1016/S0093-6413(00)00080-X
23. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analysis of Ballistic Properties of Layered Targets Using Cavity Expansion Model // *Int J. Fract.* – 1998. – Vol. 90(4). – P. 63–67.
24. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical engineering models of high speed normal impact by hard projectiles on metal shields // *Cent. Eur. J. Eng.* – 2013. – Vol. 3(3). – P. 349–373. DOI: 10.2478/s13531-013-0108-7
25. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields // *Cent. Eur. J. Eng.* – 2014. – Vol. 4(1). – P. 1–19. DOI: 10.2478/s13531-013-0135-4
26. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-Speed Penetration Dynamics // *Engineering Models and Methods*. – 2013.
27. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *World Scientific Handbook of Experimental Results on High Speed Penetration into Metals, Concrete and Soils* // World Scientific. – 2016.
28. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред. Ч. 1.* – М.: Наука, 1987. – 464 с.
29. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности.* – М.: Наука, 1969. – 420 с.
30. Витман Ф.Ф., Златин Н.А., Иоффе Б.С. Сопротивление деформированию металлов при скоростях 10^{-6} – 10^2 м/с // *Журнал технической физики*. – 1949. – Т. XIX, вып. 3. – С. 123–128.
31. Penetration of 6061-T6511 aluminum targets by ogive-nose steel projectiles with striking velocities between 0.5 and 3.0 km/s / A.J. Piekutowski, M.J. Forrestal, K.L. Poormon, T.L. Warren // *Int. J. of Impact Engineering*. – 1999. – Vol. 23 (1, part 2). – P. 723–744. DOI: 10.1016/S0734-743X(99)00117-7
32. Brooks P.N. On the prediction of crater profiles produced in ductile targets by the impact of rigid penetrators at ballistic velocities. Rep. DREV R-686/73. Defence Research Establishment Valcartier, Quebec, Canada, 1973.
33. Krafft J.M. Surface Friction in ballistic penetration // *J. Appl. Phys.* – 1955. – Vol. 26, no. 10. – P. 1248–1253.
34. Yadav S., Chichili D.R., Ramesh K.T. The mechanical response of a 6061-T6 Al/Al₂O₃ metal matrix composite at high rates of deformation // *Acta Metallurgica et Materialia*. – 1995. – Vol. 43(12). – P. 4453–4464. DOI: 10.1016/0956-7151(95)00123-D
35. Banerjee B., Bhawalkar A.S. An extended mechanical threshold stress plasticity model: modeling 6061-T6 aluminum alloy // *J. of Mechanics of Materials and Structures*. – 2008. – Vol. 3(3). – P. 391–424. DOI: 10.2140/jomms.2008.3.391
36. High strain rate tensile behavior of aluminum alloy 7075 T651 and IS 2062 mild steel / R. Pothnis Jayaram, Y. Perla, H. Arya, N.K. Naik // *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. – 2011. – Vol. 133(2): 021026. – P. 1–9. DOI: 10.1115/1.4003113
37. Rosenberg Z., Dekel E. Revisiting the perforation of ductile plates by sharp-nosed rigid projectiles // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2010. – Vol. 47(22–23). – P. 3022–3033. DOI: 10.1016/j.jislsstr.2010.07.003

References

1. Aptukov V.N., Khasanov A.R. Rasshiren timericheskoi polosti v szhimaemoi uprugoplasticheskoi srede [Expansion of a cylindrical cavity in a compressible elastic-plastic medium]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 1, pp. 5-23.
2. Aptukov V.N. Rasshiren sfericheskoi polosti v uprugoplasticheskoi srede pri konechnykh deformatsiakh. Soobshchenie 1. Vliianie mekhanicheskikh kharakteristik, svobodnoi poverkhnosti, sloinosti [Expansion of a spherical cavity in a compressible elasto-plastic medium. I. The influence of mechanical characteristics, free surface, and lamination]. *Problemy prochnosti*, 1991, no. 12, pp. 1262-1268.
3. Aptukov V.N. Rasshiren sfericheskoi polosti v uprugoplasticheskoi srede pri konechnykh deformatsiakh. Soobshchenie 2. Vliianie inertsionnykh kharakteristik. Temperaturnye efekty [Expansion of a spherical cavity in a compressible elasto-plastic medium. II. Effect of inertial forces. Temperature effects]. *Problemy prochnosti*, 1991, no. 12, pp. 1269-1274.
4. Rakhmatulin K.A., Sagomonyan A.Ya., Alekseev N.A. Vo-prosy dinamiki gruntov [Soils Dynamics]. *Moscow, Moscow State University Press*, 1964, 237 p.
5. Sagomonyan A.Ya. Pronikanie [Penetration]. *Moscow, Moscow State University Press*, 1974.
6. Sagomonyan A.Ya. Dinamika probivaniia pregrad [Dynamics of Barriers Perforation]. *Moscow, Moscow State University Press*, 1988.
7. Bishop R.F., Hill R., Mott N.F. The theory of indentation and hardness tests. *Proceedings of the Physics Society*, 1945, vol. 57, no. 3, pp. 147-159.
8. Forrestal M.J., Okajima K., Luk V.K. Penetration of 6061-T651 aluminum target with rigid long rods. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, vol. 55(4), pp. 755-760.
9. Forrestal M.J., Luk V.K., Brar N.S. Perforation of aluminum armor plates with conical-nose projectiles. *Mechanics of Materials*, 1990, vol. 10(1-2), pp. 97-105.
10. Forrestal M.J., Luk V.K., Rosenberg Z., Brar N.S. Penetration of 7075-T651 aluminum targets with ogival-nose rods. *Int. J. of Solids and Structures*, 1992, vol. 29(14-15), pp. 1729-1736.
11. Satapathy S. Application of cavity expansion analysis to penetration problems. *The Univ. of Texas at Austin, Inst. Adv. Technol.*, 1997, Report No. IAT.R-0136.
12. Yu H.S. Cavity Expansion Methods in Geomechanics. *Kluwer Acad. Publ.*, Dordrecht, 2000.
13. Kotov V.L. Issledovanie primenimosti avtomodel'nogo resheniia zadachi o rasshirenii sfericheskoi polosti v szhimaemoi srede dlia opredeleniia davleniia na poverkhnosti kontakta «udarnik-grunt» [Investigation of applicability of self-similarity analysis to problem of expansion of a spherical cavity in a compressible medium for determining pressure on striker-soil contact surface]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2008, vol. 70, pp. 123-131.
14. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Makarova A.A., Tarasova A.A. Analiz priblizhennykh reshenii zadachi o rasshirenii sfericheskoi polosti v gruntovoi srede [The analysis of approximate solutions of a spherical cavity expansion in a soil medium problem] *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2011, vol. 73, pp. 58-63.
15. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. Reshenie zadachi o rasshirenii sfericheskoi polosti v gruntovoi srede v predpolozhenii neszhimaemosti za frontom udarnoi volny [The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2012, vol. 74, pp. 49-57.
16. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Tarasova A.A. Opredelenie parametrov kvadrachnoi modeli lokal'nogo vzaimodeistviia pri vnedrenii sfericheskogo udarnika v miagkii grunt [Determining the parameters of a quadratic model of local interaction for a spherical striker penetrating into soft soil]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2013, vol. 75(1), pp. 47-55.
17. Kotov V.L., Konstantinov A.Yu. Chislennoe modelirovaniie ploskoparallel'nogo dvizheniia konicheskikh udarnikov v gruntovoi srede na osnove modeli lokal'nogo vzaimodeistviia [Numerical modeling of the planeparallel motion of conical projectiles in the soil environment based on a local interaction model]. *Computational Continuum Mechanics*. 2014, vol. 7, no 3, pp. 225-233.
18. Kotov V.L. Primenenie modeli lokal'nogo vzaimodeistviia dlia opredeleniia sily soprotivleniia vnedreniiu udarnikov v peschanyi grunt [Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil]. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, no 4, pp. 114-125.
19. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Konstantinov A.Yu. Modeling the processes of dynamic penetration of dimensional bodies in a compressible elastoplastic medium. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 92-108.
20. Bazhenov V.G. Sravnitel'nyi analiz metodov modelirovaniia pronikaniia i ploskoparallel'nogo dvizheniia konicheskikh udarnikov v gruntovoi srede [Comparative Analysis of Methods for Modeling the Penetration and Plane-Parallel Motion of Conical Projectiles in Soil]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 3, pp. 44-54.
21. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Linnik E.Yu. Metodika chislen'nogo rascheta optimal'nykh form tel vrashcheniia pri dvizhenii v gruntovoi srede [Method of numerical calculation of optimal forms of bodies of revolution at movement in soil medium]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 5-20.
22. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical solution for penetration by rigid conical impactors using cavity expansion models. *Mech. Res. Commun.*, 2000, vol. 27(2), pp. 185-189.
23. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analysis of ballistic properties of layered targets using cavity expansion model. *Int J. Fract.*, 1998, vol. 90(4), pp. 63-67.
24. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Analytical engineering models of high speed normal impact by hard projectiles on metal shields. *Cent. Eur. J. Eng.*, 2013, vol. 3(3), pp. 349-373.
25. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Cent. Eur. J. Eng.*, 2013, vol. 4(1), pp. 1-19.
26. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. High-Speed Penetration Dynamics. *Engineering Models and Methods*, 2013.
27. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. World Scientific Handbook of Experimental Results on High Speed Penetration into Metals, Concrete and Soils. *World Scientific*, 2016.
28. Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred. Chast' 1 [Dynamics of Multiphase Media. Part 1]. *Moscow, Nauka*, 1992, 464 p.
29. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the theory of plasticity]. *Moscow, Nauka*, 1969, 420 p.
30. Vitman F.F., Zlatin N.A., Ioffe B.S. Soprotivlenie deformirovaniu metallov pri skorostjah udara 10–6–102 m/s [The resistance of metals to deformation at impact velocities of 10-6–102 m/s]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 1949, vol. XIX., no. 3, pp. 123-128.

31. Piekutowski A.J., Forrestal M.J., Poormon K.L., Warren T.L. Penetration of 6061-T6 aluminum targets by ogive-nose steel projectiles with striking velocities between 0.5 and 3.0 km/s. *Int. J. of Impact Engineering*, 1999, vol. 23(1, part 2), 723-744.
32. Brooks P.N. On the prediction of crater profiles produced in ductile targets by the impact of rigid penetrators at ballistic velocities. Rep. DREV R-686/73. *Defence Research Establishment Valcartier, Quebec, Canada*, 1973.
33. Krafft J.M. Surface Friction in ballistic penetration. *J. Appl. Phys.*, 1955, vol.26, no. 10, pp. 1248-1253.
34. Yadav S., Chichili D.R., Ramesh K.T. The mechanical response of a 6061-T6 Al/Al₂O₃ metal matrix composite at high rates of deformation. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1995, vol. 43(12), pp. 4453-4464.
35. Banerjee B., Bhawalkar A.S. An extended mechanical threshold stress plasticity model: modeling 6061-T6 aluminum alloy. *J. of Mechanics of Materials and Structures*, 2008, vol. 3(3), pp. 391-424.
36. Pothnis Jayaram R., Perla Y., Arya H., Naik N.K. High strain rate tensile behavior of aluminum alloy 7075 T651 and IS 2062 mild steel. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 2011, vol. 133(2): 021026, pp. 1-9.
37. Rosenberg Z., Dekel E. Revisiting the perforation of ductile plates by sharp-nosed rigid projectiles. *Int. J. of Solids and Structures*, 2010, vol. 47(22-23), pp. 3022-3033.