



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.11

УДК 539.4

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 15 октября 2019 г.
Принята: 03 марта 2020 г.
Опубликована: 30 марта 2020 г.

Ключевые слова:

цилиндрические оболочки, эквидистантное армирование, вязкоупругопластическое деформирование, геометрическая нелинейность, динамическое нагружение взрывного типа, теория Редди, уточненные теории деформирования оболочек, модель тела Максвелла – Больцмана, теория пластического течения, явная численная схема «крест».

АННОТАЦИЯ

Сформулирована начально-краевая задача вязкоупругопластического изгибного поведения цилиндрических круговых оболочек, перекрестно армированных по эквидистантным поверхностям. Мгновенное упругопластическое деформирование компонентов композиции оболочек описывается определяющими уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Вязкоупругое деформирование этих материалов описывается определяющими соотношениями модели тела Максвелла – Больцмана. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Используемая система двумерных разрешающих уравнений и соответствующие им начальные и граничные условия позволяют с разной степенью точности определять перемещения и напряженно-деформированное состояние (в том числе остаточные) в материалах композиции гибких цилиндрических оболочек. При этом учитывается слабое сопротивление рассматриваемых композитных конструкций поперечным сдвигам. В первом приближении использованные уравнения, начальные и граничные условия соответствуют соотношениям широко применяемой неклассической теории Редди. Численное решение поставленной начально-краевой задачи строится с использованием явной пошаговой схемы типа «крест». Исследовано упругопластическое и вязкоупругопластическое динамическое деформирование относительно тонкой длинной круговой цилиндрической оболочки. Конструкция рационально армирована в окружном направлении и нагружена внутренним давлением взрывного типа. Продемонстрировано, что при интенсивном кратковременном нагружении даже относительно тонкой цилиндрической армированной оболочки внутренним давлением традиционная теория Редди не гарантирует получения величины максимума остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции с точностью до 10 % по сравнению с расчетами, выполненными по уточненной теории. Различие в результатах соответствующих расчетов возрастает с увеличением относительной толщины композитной конструкции. Обнаружено, что после пластического деформирования длинной армированной цилиндрической оболочки в ее остаточном состоянии проявляются не только зоны краевых эффектов, но и локальная зона интенсивного деформирования, расположенная в окрестности центрального сечения конструкции. Протяженность локальной центральной зоны сопоставима с протяженностью зон краевых эффектов. Показано, что амплитуда поперечных колебаний армированной оболочки в окрестности начального момента времени существенно (на порядок) превышает величину максимального по модулю остаточного прогиба. Поэтому расчеты, выполненные в рамках теории упругопластического деформирования материалов композиции, не позволяют даже весьма приближенно оценить величины остаточных перемещений и остаточного деформированного состояния компонентов композиции цилиндрической оболочки при ее динамическом нагружении.

© ПНИПУ

© Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru, ID: 0000-0002-2602-8357.

Andrey P. Yankovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research, e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru, ID: 0000-0002-2602-8357.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE REFINED MODEL OF VISCOELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF REINFORCED CYLINDRICAL SHELLS

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 15 October 2019

Accepted: 03 March 2020

Published: 30 March 2020

Keywords:

cylindrical shells, equidistant reinforcement, viscoelastic-plastic deformation, geometric nonlinearity, explosive dynamic loading, Reddy's theory, refined theories of shell deformation, Maxwell – Boltzmann body model, plastic flow theory, explicit numerical "cross" scheme.

ABSTRACT

The paper formulates the initial-boundary-value problem of the viscoelastic-plastic bending behavior of cylindrical circular shells cross-reinforced along equidistant surfaces. The instant elastoplastic deformation of the shell composition components is described by the governing equations of the theory of plastic flow with isotropic hardening. The viscoelastic deformation of these materials is described by the defining relations of the Maxwell – Boltzmann model of body. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The used system of two-dimensional resolving equations and the corresponding initial and boundary conditions make it possible to determine displacements and stress-strain state (including residual one) in materials of the composition of flexible cylindrical shells with varying degrees of accuracy. In this case, the weak resistance of the considered composite structures to transverse shears is taken into account. In the first approximation, the equations are used, the initial and boundary conditions correspond to the relations of the widely used non-classical Reddy theory. A numerical solution of the initial-boundary-value problem posed is constructed using an explicit step-by-step "cross" scheme. The elastoplastic and viscoelastic-plastic dynamic deformation of a relatively thin long circular cylindrical shell is investigated. The structure is rationally reinforced in the circumferential direction and is loaded with an internal pressure of an explosive type. It has been demonstrated that under intense short-term loading even of a relatively thin cylindrical reinforced shell by internal pressure, the traditional Reddy theory does not guarantee that the maximum residual deflection and the intensity of residual deformations of the components of the composition are accurate to within 10% compared to calculations performed by the refined theory. The difference in the results of the corresponding calculations increases with an increase in the relative thickness of the composite shell. It was found that after plastic deformation of a long reinforced cylindrical shell in its residual state, not only appear zones of edge effects, but also a local zone of an intense deformation located in the vicinity of the central section of the shell. The length of the local central zone is comparable with the length of the zones of edge effects. It is shown that the amplitude of the transverse vibrations of the reinforced shell in the vicinity of the initial moment of time significantly (by an order of magnitude) exceeds the value of the maximum modulus of the residual deflection. Therefore, the calculations performed in the framework of the theory of elastoplastic deformation of composition materials do not allow a very approximate determination of the magnitude of the residual displacements and the magnitude of the residual deformed state of the components of the composition of the cylindrical shell.

© PNRPU

Введение

Цилиндрические оболочки из композиционных материалов (КМ) широко используются в инженерных приложениях в качестве тонкостенных силовых элементов [1–5]. Поэтому актуальной является проблема математического описания механического поведения таких оболочек, особенно при воздействии высокоинтенсивных динамических нагрузок [5].

В рамках классической теории деформирования слоистые и анизотропные оболочки изучались в [6–8], но при этом игнорируется экспериментально установленный факт слабого сопротивления КМ-оболочек поперечным сдвигам, которые традиционно учитываются в рамках теории Рейсснера – Миндлина [5, 9–14] или теории Редди [7, 15–18], реже используются теории более высоких порядков точности [19–23]. При этом в подавляющем большинстве публикаций рассматривается линейно-упругое или линейно-вязкоупругое деформирование тонкостенных конструкций из КМ [5–7, 9–11, 13–17, 19–22]. Однако известно, что компоненты

композиции могут деформироваться и пластически [4, 8, 18, 23–26]. Проблема моделирования неупругого поведения КМ-конструкций при высокоинтенсивных нагрузках находится сейчас на стадии становления. Так, в [8] исследовалось предельное состояние армированных цилиндрических оболочек на базе модели жесткопластического деформирования компонентов композиции; в [12] изучалось динамическое упруго-пластическое поведение слоистых тонкостенных конструкций с изотропными слоями; в [23] моделировалось упругопластическое деформирование волокнистых цилиндрических оболочек. Ранее в [15] было продемонстрировано, что при линейно-упругом деформировании компонентов композиции оболочек не требуется уточнять результаты расчетов, выполненные по теории Редди. Но в [23] показано, что для адекватного описания динамического неупругого поведения армированных цилиндрических оболочек необходимо использовать более точные, чем теория Редди, модели деформирования таких тонкостенных элементов КМ-конструкций.

Механическое поведение материалов композиции в [12, 23] описывалось определяющими соотношениями теории Прандтля – Рейсса – Хилла (ТПРХ) [27], в которых не учитываются демпфирующие свойства реальных материалов при осциллирующем деформировании [28]. Следовательно, модели, использованные в [12, 23], не позволяют рассчитывать остаточные перемещения и остаточное напряженно-деформированное состояние (НДС) в компонентах композиции при интенсивных динамических воздействиях на КМ-оболочки. Демпфирующие свойства материалов композиции волокнистых пластин учтены в [18], где была разработана структурная модель вязкоупругопластического поведения перекрестно армированного по эквидистантным поверхностям тонкостенного КМ-элемента.

Для численного решения динамических задач механики тонкостенных элементов КМ-конструкций используют явные схемы, например типа «крест» [12, 18, 23], или неявные методы, как правило, Ньюмарка [29–32].

В связи с вышеизложенным настоящее исследование посвящено математическому моделированию вязкоупругопластического поведения гибких цилиндрических волокнистых оболочек в рамках уточненной теории их изгиба при использовании явной численной схемы типа «крест».

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую замкнутую круговую цилиндрическую оболочку радиусом R , длиной L и толщиной $2h \ll \min(L, R)$ (рис. 1), с которой связана цилиндрическая система координат x_i , где x_1 – осевая координата ($0 \leq x_1 \leq L$), x_2 – угловая окружная координата ($0 \leq x_2 < 2\pi$), x_3 – радиальная координата ($R-h \leq x_3 \leq R+h$). Оболочка усилена N семействами волокон с плотностями ω_k и углами ψ_k ($1 \leq k \leq N$) армирования, отсчитываемыми от направления x_1 . Волокна уложены по поверхностям, эквидистантным срединной поверхности конструкции ($x_3 = \text{const}$), и структура армирования однородна в радиальном направлении.

Как и в [23], ограничимся исследованием практически важного частного случая, когда на лицевых поверх-

ностях оболочки можно пренебречь действием касательных внешних распределенных сил. Согласно этому предположению для учета слабого сопротивления рассматриваемой КМ-оболочки поперечным сдвигам аппроксимируем усредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения U_i точек конструкции следующими соотношениями [23] (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - z^2}{h^2} \sum_{s=0}^K \left(\frac{z}{h}\right)^s \varepsilon_{i3}^{(s)}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad x_3 \equiv R + z, \quad i = 1, 2;$$

$$\varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) = \partial_1 u_1 - z \partial_1^2 w + \sum_s f_1^{(s)}(z) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(s)} + 0,5(\partial_1 w)^2,$$

$$\varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) = (R+z)^{-1} \left[(R+z) R^{-1} \partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + \sum_s f_2^{(s)}(z) \partial_2 \varepsilon_{23}^{(s)} \right] + 0,5(R+z)^{-2} (\partial_2 w)^2,$$

$$2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) = (R+z)^{-1} \left[\partial_2 u_1 - z \partial_1 \partial_2 w + \sum_s f_1^{(s)}(z) \partial_2 \varepsilon_{13}^{(s)} \right] + (R+z) R^{-1} \partial_1 u_2 + \partial_1 \partial_2 w + \sum_s f_2^{(s)}(z) \partial_1 \varepsilon_{23}^{(s)} + (R+z)^{-1} \partial_1 w \partial_2 w; \tag{2}$$

$$U_1(t, \mathbf{r}) = u_1(t, \mathbf{x}) - z \partial_1 w + \sum_s f_1^{(s)}(z) \varepsilon_{13}^{(s)}(t, \mathbf{x}),$$

$$U_2(t, \mathbf{r}) = (R+z) R^{-1} u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + \sum_s f_2^{(s)}(z) \varepsilon_{23}^{(s)}(t, \mathbf{x}); \tag{3}$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \tag{4}$$

$$\Omega = \{ \mathbf{x}: 0 \leq x_1 \leq L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi \},$$

где

$$f_i^{(s)}(z) \equiv 2h^{-2} \left[h^2 \Phi_i^{(s)}(z) - \Phi_i^{(s+2)}(z) \right] \quad (i = 1, 2),$$

$$\Phi_1^{(s)}(z) \equiv h^{-s} (1+s)^{-1} z^{s+1},$$

$$\Phi_2^{(s)}(z) \equiv h^{-s} (R+z) \Psi_s(z), \tag{5}$$

$$\Psi_s(z) \equiv \sum_{m=0}^{s-1} \frac{(-1)^m R^m z^{s-m}}{s-m} - R^s \ln(R+z);$$

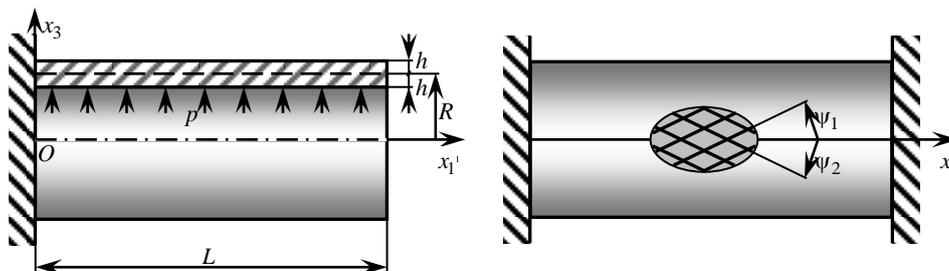


Рис. 1. Цилиндрические КМ-оболочки: а – жестко закрепленная только на левой кромке; б – жестко закрепленная на обеих кромках

Fig. 1. Cylindrical shells clamped only along the left edge (a) and clamped on both edges (b)

$\varepsilon_{i3}^{(k)}$ – коэффициенты частичных сумм разложений деформаций поперечных сдвигов ε_{i3} по степеням переменной z ; K – целое число, равное количеству слагаемых, удерживаемых в этих разложениях; z – введенная для удобства новая радиальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности; w – прогиб точек этой поверхности ($z=0$); u_1, u_2 – продольное и окружное перемещения точек срединной поверхности; t_0 – начальный момент времени t ; \mathbf{r} – вектор места точки конструкции; \mathbf{x} – вектор места точки срединной поверхности; Ω – область, занимаемая этой поверхностью в координатах x_1, x_2 ; суммирование по индексу s проводится от 0 до K , как это указано в (1). Равенство (4) – традиционная для тонкостенных элементов конструкций кинематическая гипотеза, согласно которой изменением поперечного перемещения $U_3(t, \mathbf{r})$ в радиальном направлении x_3 можно пренебречь [5–18, 21–23, 29]. Таким образом, в равенствах (1)–(4) при учете выражений (5) неизвестны функции w, u_i и $\varepsilon_{i3}^{(s)}$ ($i=1, 2, 0 \leq s \leq K$), зависящие от времени t и только двух пространственных переменных x_1 и x_2 . При $K=0$ из (1)–(5) вытекают кинематические соотношения теории Редди [15–17, 23].

Поскольку исследуется динамическое поведение КМ-оболочки как гибкой тонкостенной механической системы, то напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью можно аппроксимировать линейно по поперечной координате z [11]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (6)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на внешней (+) и внутренней (–) лицевых поверхностях, известные из соответствующих силовых граничных условий (так, на рис. 1, *a* изображен случай, когда $\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0$ и $\sigma_{33}^{(-)} = -p$).

Двумерные уравнения движения тонкой цилиндрической оболочки, соответствующие аппроксимации перемещений (3) и (4), при учете (5) и (6) имеют вид [23]:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_1^{(l)} &= \partial_1 (M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w) + \partial_2 (\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w) - \\ &\quad - l M_{13}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_1 w - \\ &\quad - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w + X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ \rho \ddot{u}_2^{(l)} &= \partial_1 (M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w) + \partial_2 (\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2 w) - \\ &\quad - l M_{23}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w - \\ &\quad - h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \times \partial_2 w + \bar{M}_{23}^{(l)} + X_2^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ 2h\rho \ddot{w} &= \partial_1 (M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w) + \\ &\quad + \partial_2 (\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w) - \\ &\quad - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \\ &\quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq l \leq K+1, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \\ X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ \bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz, \\ \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz, \\ u_m^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_m(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \\ l\bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \\ &= \frac{l}{2h} (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_l(h) - \Psi_l(-h)) + \\ &\quad + \frac{l}{2} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h)), \quad 0 \leq l \leq K+1, \\ &\quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = 1, 2; \end{aligned} \quad (8)$$

σ_{ij} – усредненные напряжения в композиции; ρ_0, ρ_k – объемная плотность материала связующего и арматуры k -го семейства; X_i – компоненты объемной нагрузки, действующей на КМ-оболочку; точка – производная по времени t . Согласно четвертому равенству (8), в рамках гипотез, используемых для тонкостенных элементов конструкций, некоторым из введенных силовых факторов можно дать механическую трактовку: $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$, $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$ – приближенные выражения для мембранных усилий и изгибающих и крутящих механических моментов; $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$ ($i, j = 1, 2$) – приближенно представляют собой поперечные силы; остальные силовые факторы $M_{ij}^{(l)}, \bar{M}_{ij}^{(l)}$ и $\bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$, определенные в (8), – моменты высших порядков от напряжений, вычисленные с весами $z^l, (R+z)^{-1} z^l$ и $(R+z)^{-2} z^l$ соответственно.

Материал k -го компонента композиции предполагается однородным и изотропным, а его определяющие уравнения вязкоупругопластического деформирования при учете (6) можно записать в матричной форме [18]:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k &= \mathbf{Z}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{V}_k \boldsymbol{\sigma}_k + \mathbf{w}_k \left[\dot{\sigma}_{33} + (B^{(k)} - D^{(k)}) \sigma_{33} \right] + \mathbf{q}_k \sigma_{33}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^{(k)} &= \mathbf{g}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - \mathbf{e}_k^T \boldsymbol{\sigma}_k + z^{(k)} \left[\dot{\sigma}_{33} + (B^{(k)} - D^{(k)}) \sigma_{33} \right], \quad 0 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее:

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{V}_k = \bar{\mathbf{V}}_k - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k &= \left\{ \sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)} \right\}^T \equiv \\ &\equiv \left\{ \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)} \right\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k &= \left\{ \varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)} \right\}^T \equiv \\ &\equiv \left\{ \varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}, 2\varepsilon_{13}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)} \right\}^T, \\ \mathbf{s}_k &= \left\{ s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)} \right\}^T \equiv \\ &\equiv \left\{ s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{12}^{(k)}, s_{13}^{(k)}, s_{23}^{(k)} \right\}^T; \end{aligned} \quad (11)$$

$\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{V}}_k = (\bar{v}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_k = (\bar{\bar{v}}_{ij}^{(k)})$ – 5×5 -матрицы, $\mathbf{w}_k = \{w_i^{(k)}\}$, $\mathbf{q}_k = \{q_i^{(k)}\}$, $\mathbf{g}_k = \{g_i^{(k)}\}$, $\mathbf{e}_k = \{e_i^{(k)}\}$ – пятикомпонентные вектор-столбцы, ненулевые элементы которых определяются так:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij} G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \quad \bar{z}_{il}^{(k)} = G^{(k)}, \\ \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= A^{(k)} s_i^{(k)} s_j^{(k)} + z^{(k)} \left(\lambda^{(k)} - A^{(k)} s_i^{(k)} s_{33}^{(k)} \right) \times \\ &\times \left(\lambda^{(k)} - A^{(k)} s_j^{(k)} s_{33}^{(k)} \right), \quad \bar{\bar{z}}_{il}^{(k)} = \bar{\bar{z}}_{li}^{(k)} = \\ &= A^{(k)} s_l^{(k)} \left[s_i^{(k)} - z^{(k)} s_{33}^{(k)} \left(\lambda^{(k)} - A^{(k)} s_i^{(k)} s_{33}^{(k)} \right) \right], \\ \bar{\bar{z}}_{lm}^{(k)} &= A^{(k)} \sigma_l^{(k)} \sigma_m^{(k)} \left(1 + A^{(k)} z^{(k)} s_{33}^{(k)} s_{33}^{(k)} \right), \\ \bar{v}_{ij}^{(k)} &= -\delta_{ij} B^{(k)} + D^{(k)}, \quad \bar{\bar{v}}_{il}^{(k)} = -B^{(k)}, \\ \bar{\bar{v}}_{ij}^{(k)} &= D^{(k)} z^{(k)} \left(\lambda^{(k)} - A^{(k)} s_i^{(k)} s_{33}^{(k)} \right), \\ \bar{\bar{v}}_{ij}^{(k)} &= -D^{(k)} z^{(k)} A^{(k)} s_l^{(k)} s_{33}^{(k)}, \quad w_i^{(k)} = z^{(k)} \left(\lambda^{(k)} - A^{(k)} s_i^{(k)} s_{33}^{(k)} \right), \\ w_l^{(k)} &= -A^{(k)} z^{(k)} \sigma_l^{(k)} s_{33}^{(k)}, \quad q_i^{(k)} = D^{(k)}, \\ g_i^{(k)} &= -z^{(k)} \left(\lambda^{(k)} - A^{(k)} s_i^{(k)} s_{33}^{(k)} \right), \quad g_l^{(k)} = 2A^{(k)} z^{(k)} \sigma_l^{(k)} s_{33}^{(k)}, \\ e_i^{(k)} &= D^{(k)} z^{(k)}, \quad z^{(k)} = \left(2G^{(k)} + \lambda^{(k)} - A^{(k)} s_{33}^{(k)} s_{33}^{(k)} \right)^{-1}, \\ &i, j = 1, 2, \quad l, m = 3, 4, 5, \\ A^{(k)} &= \frac{c^{(k)} G^{(k)}}{(1 + g^{(k)}) T^{(k)2}}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} \left(1 - \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}} \right), \\ D^{(k)} &= \frac{1}{3} \left(B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}} \right), \quad g^{(k)} = \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \\ G^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{3(1 - 2\nu^{(k)})}, \quad T^{(k)2} = \frac{1}{2} \left(s_1^{(k)2} + s_2^{(k)2} + s_{33}^{(k)2} \right) + \sum_{l=3}^5 \sigma_l^{(k)2}, \\ s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \sigma_{ll}^{(k)}, \\ c^{(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } T^{(k)} < T_*^{(k)} \text{ или } T^{(k)} = T_*^{(k)} \text{ и } W^{(k)} \leq T_*^{(k)2} / \eta^{(k)}, \\ 1 & \text{при } T^{(k)} = T_*^{(k)} \text{ и } W^{(k)} > T_*^{(k)2} / \eta^{(k)}, \end{cases} \\ W^{(k)} &\equiv \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + z^{(k)} s_{33}^{(k)} \left[\dot{\sigma}_{33} + (B^{(k)} - D^{(k)}) \sigma_{33} \right] - \\ &- D^{(k)} \left(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) - \lambda^{(k)} \left(\dot{\varepsilon}_{11}^{(k)} + \dot{\varepsilon}_{22}^{(k)} \right) + A^{(k)} s_{33}^{(k)} \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k, \\ T_*^{(k)} &= \max \left\{ T_p^{(k)}, T_m^{(k)} \right\}, \quad 0 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (12)$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций; $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\eta^{(k)}$ – коэффициент линейной вязкости при сдвиге; $\mu^{(k)}$ – коэффициент объемной вязкости; $T_p^{(k)}$ – значение интенсивности касательных напряжений $T^{(k)}$, при котором впервые достигается пластическое состояние; $T_m^{(k)}$ – максимальное значение $T^{(k)}$, достигнутое за всю предыдущую историю деформирования элемента материала; δ_{ij} – символ Кронекера; индекс Т – операция транспонирования; индекс k – номер компонента композиции ($k=0$ – связующее, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства). Соотношения (11) задают соответствия между пятью компонентами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 5}$) некоторого вектор-столбца \mathbf{f}_k и компонентами симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1, 3}$, $0 \leq k \leq N$).

Соотношения (9) при учете (10) и (12) получены в предположении, что малые деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ могут быть разложены на вязкоупругие $e_{ij}^{(k)}$ и пластические $p_{ij}^{(k)}$ (несжимаемые) составляющие. При этом мгновенное пластическое деформирование определяется уравнениями теории течения с изотропным упрочнением [27], а вязкоупругое деформирование – уравнениями модели тела Максвелла – Больцмана [18, 28]:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ij}^{(k)} &= \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G^{(k)}} + \frac{s_{ij}^{(k)}}{2\eta^{(k)}}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \dot{\varepsilon}_0^{(k)} = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K^{(k)}} + \frac{\sigma_0^{(k)}}{3\mu^{(k)}}, \\ &i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(k)} &= \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{(k)}, \quad e_0^{(k)} = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 e_{ll}^{(k)}, \\ \bar{e}_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} e_0^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Если вязкие свойства в (13) не учитываются ($\eta^{(k)} \rightarrow \infty$ и $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$), то эти соотношения при учете (14) редуцируются в закон Гука, а равенства (9) – в определяющие уравнения ТПРХ [23, 27], так как согласно (10) и (12) имеем $B^{(k)} = D^{(k)} = 0$ и $\mathbf{V}^{(k)} = \mathbf{0}$.

Используя соотношения (9) и повторяя рассуждения из [18], для текущего момента времени t получим следующее определяющее уравнение, записанное в матричной форме и описывающее вязкоупругопластическое деформирование волокнистой композиции рассматриваемой цилиндрической оболочки:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv (\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}^{-1}, \\ \mathbf{p} &\equiv \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \\ \mathbf{r}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (16)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – пятикомпонентные вектор-столбцы скоростей усредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции, по структуре аналогичные (11); \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k – 5×5 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} – матрицы, обратные 5×5 -матрицам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , $\boldsymbol{\zeta}_k$ – пятикомпонентные векторы-столбцы. Элементы $c_{ij}^{(k)}$, $d_{ij}^{(k)}$ матриц \mathbf{C}_k , \mathbf{D}_k и компоненты $\zeta_i^{(k)}$ вектор-столбцов $\boldsymbol{\zeta}_k$ определяются по формулам (55) и (56) из [18] и зависят от механического состояния k -го материала композиции и направлений армирования, т.е. от углов ψ_k (см. рис. 1, б).

Для однозначного интегрирования исследуемой начально-краевой задачи необходимо задать начальные и граничные условия. Если на торцевой поверхности КМ-оболочки ($x_1 = 0$ и/или $x_1 = L$) заданы силовые граничные условия, то для силовых факторов, введенных в (8), получим [23]:

$$\begin{aligned} n_1 (M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w) &= P_1^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ n_l (M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w) &= P_2^{(l)}(t, \mathbf{x}) \quad (0 \leq l \leq K+1), \\ n_1 (M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w) &= P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad x_1 = 0 \\ \text{и/или } x_1 &= L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad j = \overline{1, 3}, \quad x_1 = 0 \\ \text{и/или } x_1 &= L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad |z| \leq h; \end{aligned} \quad (18)$$

p_j – заданные на торцевой поверхности внешние распределенные нагрузки, действующие в направлениях x_j ($j = \overline{1, 3}$); $n_1 = 1$ при $x_1 = L$ и $n_1 = -1$ при $x_1 = 0$.

Если на торцевой поверхности оболочки заданы кинематические граничные условия, то для обобщенных кинематических переменных, введенных в (8), при учете (4) имеем равенства [23]:

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ x_1 &= 0 \text{ и/или } x_1 = L, \quad 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad t \geq t_0, \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1; \quad (20)$$

U_{*3} – заданный на кромке прогиб; U_{*i} – заданные на торцевой поверхности оболочки тангенциальные перемещения в направлениях x_i ($i = 1, 2$).

При $t = t_0$ следует использовать начальные условия (см. (4) и (8)) [23]:

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \\ u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) &= u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1,$$

где

$$\begin{aligned} u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) z^l dz, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) z^l dz, \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1; \end{aligned} \quad (22)$$

U_{0j} , V_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) – известные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек КМ-оболочки.

Кинематические переменные w , u_i и $\varepsilon_{i3}^{(s)}$ ($0 \leq s \leq K$), использованные в (1)–(4), и обобщенные кинематические переменные $u_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq l \leq K+1$), введенные в (8), связаны матричными равенствами [23]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{w}}_i \partial_i w, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(K)}, u_i^{(K+1)}\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \{u_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(K-1)}, \varepsilon_{i3}^{(K)}\}^T; \end{aligned} \quad (24)$$

\mathbf{C}_i^{-1} – матрицы, обратные $(K+2) \times (K+2)$ -матрицам \mathbf{C}_i , $\bar{\mathbf{w}}_i$ – $(K+2)$ -компонентные вектор-столбцы, элементы которых определяются по формулам (31) и (33) в [23] независимо от решения исследуемой задачи.

Если в текущий момент времени t из каких-либо соображений известны значения функций w и $u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq K+1$), то из уравнений (23) при учете (24) можно вычислить значения функций u_i , $\varepsilon_{i3}^{(s)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq s \leq K$), характеризующих усредненные деформации композиции (1), (2) и тангенциальные перемещения (3) точек цилиндрической КМ-оболочки.

2. Метод расчета

Как отмечалось выше, для численного интегрирования рассматриваемой задачи используем метод шагов по времени [12, 18, 23, 29–32], т.е. будем определять

неизвестные функции в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени. При этом, согласно [18, 23], предполагаем, что в моменты времени $t = t_m$ уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_k^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_k(t_m, \mathbf{r}), \\ X_j^m(\mathbf{r}) &\equiv X_j(t_m, \mathbf{r}), \\ i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \\ 0 \leq l \leq K+1, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя выражения (8) при учете (25), в данный момент времени t_n можно вычислить все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, $\bar{M}_{ij}^{(l)}$ и $\bar{M}_{ij}^{(l)}$, входящие в уравнения (7), и граничные условия (17).

Как и в [18, 23], производные по времени t аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$. Это позволяет построить явную численную схему типа «крест». Замена вторых производных по времени в левых частях равенств (7) при учете обозначений, аналогичных (25), приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w \right) + \\ &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w \right) - \\ &- \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left(u_1^{n+1} - 2u_1^n + u_1^{n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{11}^{(1)} - M_{13}^{(1)} \partial_1 w \right) + \\ &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(1)} - \bar{M}_{23}^{(1)} \partial_1 w \right) - l M_{13}^{(1-1)} + l M_{33}^{(1-1)} \partial_1 w - h^l \times \\ &\times \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w + X_1^{(1)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left(u_2^{n+1} - 2u_2^n + u_2^{n-1} \right) &= \partial_1 \left(M_{21}^{(1)} - \bar{M}_{13}^{(1)} \partial_2 w \right) + \\ &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(1)} - \bar{M}_{23}^{(1)} \partial_2 w \right) - l M_{23}^{(1-1)} + l \bar{M}_{33}^{(1-1)} \partial_2 w - h^l \times \\ &\times \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2 w + \bar{M}_{23}^{(1)} + X_2^{(1)}, \\ 0 \leq l \leq K+1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

На основании (8) и (25) получаем, что правые части в (26) известны. Добавив к этим уравнениям необходимые граничные условия (17) и/или (19) при учете (18) и (20), можем определить по явной схеме значения функ-

ций w и $u_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq l \leq K+1$) в следующий момент времени t_{n+1} . Далее по формулам (23) при учете (24) вычисляем функции u_i и $\varepsilon_{ij}^{(s)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq s \leq K$), используя которые по формулам (1) и (2) получаем усредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} в каждой точке конструкции. Последующее решение рассматриваемой задачи при учете соотношений (15) и (16) строится совершенно так же, как и в [18, 23].

Согласно структуре левых частей уравнений (26), для начала расчета по разработанной явной схеме требуется знать не только значения функций w и $u_i^{(l)}$, известные из начальных условий (21) при учете (22), но и значения функций w , $u_i^{(l)}$ (см. (26) при $n=1$). Значения этих функций определим по формуле Тейлора при учете начальных условий (21) и уравнений движения (7), рассмотренных в момент времени $t = t_0$ [23]:

$$\begin{aligned} w^1(\mathbf{x}) &= w^0(\mathbf{x}) + \tau \dot{w}^0(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}^0(\mathbf{x}) + O(\tau^3), \\ u_i^{(l)1}(\mathbf{x}) &= u_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + \tau \dot{u}_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + O(\tau^3), \\ i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

В случае замкнутой круговой цилиндрической КМ-оболочки область Ω (см. (4)) является прямоугольной, поэтому после аппроксимации в равенствах (17) и (26) производных $\partial_i(\bullet)$ по пространственным переменным x_i их конечно-разностными аналогами от уже известных (см. (8) и (25)) в данный момент времени t_n сеточных функций окончательно получим явную численную схему «крест» [12, 18, 23].

Необходимые условия устойчивости схемы «крест» вытекают из критерия Куранта – Фридрихса – Леви и для тонкостенных элементов конструкций приведены в [12]. В случае волокнистой оболочки эти условия выполняются с запасом, если выполняются для каждого компонента композиции в отдельности.

3. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретного примера рассмотрим динамическое вязкоупругопластическое и упругопластическое поведение тонкой длинной цилиндрической оболочки радиусом $R = 1$ м, длиной $L = 4$ м и толщиной $2h = 1$ см ($2h/R = 1/100$). Конструкция жестко закреплена на обеих кромках: $U_{*3} \equiv 0$ и $u_{*i}^{(l)} \equiv 0$, $i = 1, 2$, $0 \leq l \leq K+1$, $x_1 = 0$ и $x_1 = L$ (см. (19), (20) и рис. 1, б), и нагружается равномерным внутренним давлением по закону (см. (6)–(8), (25) и (26)) [29]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (28)$$

t_{\max} – момент времени, в который $p(t)$ достигает наибольшего значения ($p = p_{\max} > 0$); t_{\min} – момент времени, при превышении которого можно пренебречь $p(t)$ по сравнению с p_{\max} (согласно (28), $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$). Примем $p_{\max} = 3$ МПа, $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. Эти значения условно соответствуют давлению, вызванному воздушной взрывной волной [29]. Внешние массовые нагрузки не учитываем: $X_i \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$ (см. (8)). В начальный момент времени $t = t_0 = 0$ оболочка покоится: $U_{0i} \equiv 0$ и $V_{0i} \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$ (см. (21) и (22)).

Конструкция изготовлена из эпоксисвязующего и усилена стеклянными волокнами марки S-994. Мгновенное упругопластическое деформирование материалов композиции при активном нагружении определяется билинейной диаграммой растяжения – сжатия

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ и ε – осевое напряжение и деформация; $E_s^{(k)}$ – модуль линейного упрочнения материала k -го компонента композиции; $\sigma_s^{(k)}$, $\varepsilon_s^{(k)}$ – условный предел текучести и соответствующая ему деформация того же мате-

риала. Физико-механические характеристики компонентов композиции приведены в таблице, в которой принято $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$, т.е. объемная вязкость материалов не учитывается (см. (12) и (13)).

Физико-механические характеристики компонентов композиции [24, 25]

Physical and mechanical characteristics of components of the composition [24, 25]

Материал	ρ , кг / м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	η , МПа · с	μ , МПа · с
Эпоксисвязующее	1210	0,33	20	2,8	1,114	150	∞
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	600	∞

Конструкция армирована в окружном направлении ($\psi_1 = \pi/2$; см. рис. 1, б) с постоянной плотностью $\omega_1 = 0,3$. Для длинной тонкой цилиндрической оболочки такая структура армирования является рациональной [8, 23, 33].

При указанных условиях закрепления, нагружения и армирования рассматриваемой оболочки она деформируется не только осесимметрично (решения соответствующей начально-краевой задачи не зависит от окружной координаты x_2), но и симметрично относительно центрального сечения $x_1 = L/2$ (т.е., например, $w(t, x) = w(t, -x)$, $|x| \leq L/2$, $x = x_1 - L/2$ и т.п.).

На рис. 2 изображены поперечные колебания точек центрального сечения оболочки ($w_*(t) = w(t, x)$, $x = 0$), полученные по ТПРХ (рис. 2, а, который полностью совпадает с рис. 3, б в [23]) и по теории вязкоупругопластического деформирования материалов композиции конструкции (рис. 2, б).

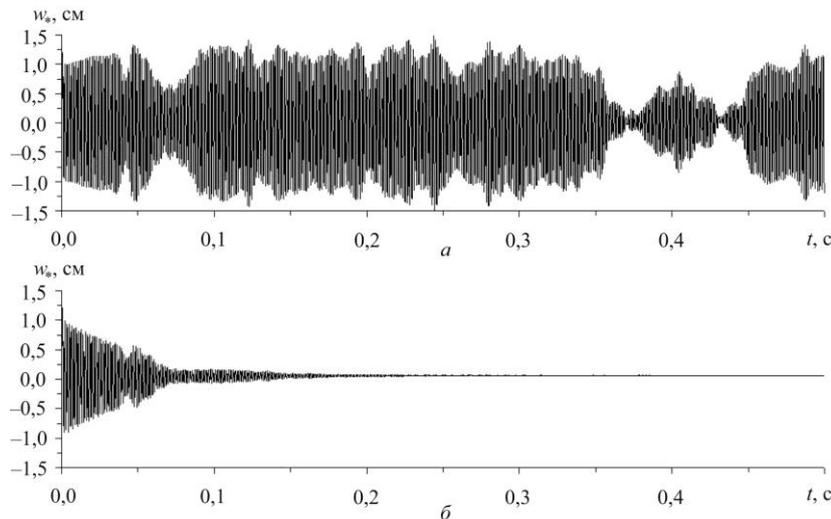


Рис. 2. Осцилляции прогибов точек центрального сечения тонкой длинной цилиндрической КМ-оболочки, рассчитанные по ТПРХ (а) и по вязкоупругопластической теории деформирования компонентов композиции (б)

Fig. 2. Oscillations of the deflections of the central section points of a thin long cylindrical CM-shell calculated by the Prandtl-Reuss-Hill theory (a) and by the viscoelastic theory (b) of the deformation of the composition components

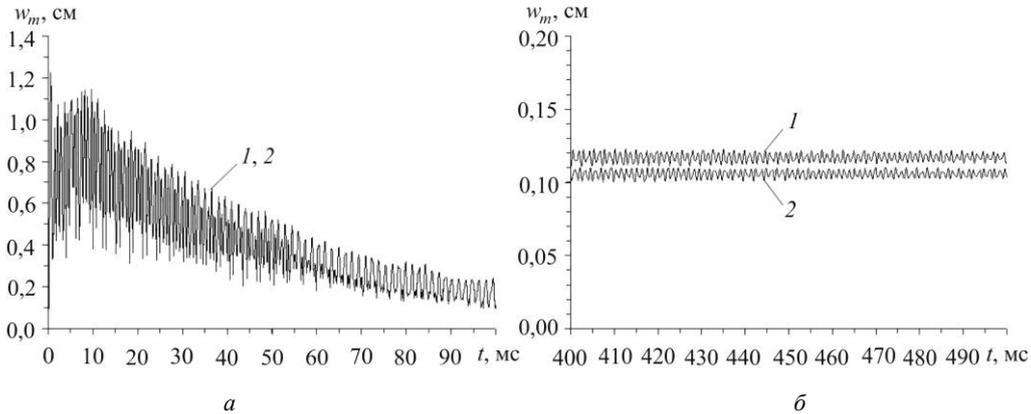


Рис. 3. Осцилляции максимального по модулю значения прогиба вязкоупругопластической КМ-оболочки в окрестности начального момента времени (a) и в окрестности момента времени $t = 500$ мс (б), рассчитанные по разным теориям изгибного деформирования

Fig. 3. Oscillations of the maximum modulus of deflection of the viscoelastic-plastic CM-shell in the vicinity of the initial instant of time (a) and in the vicinity of the instant of time $t = 500$ мс (b), calculated according to different theories of bending deformation

Расчеты проводились по уточненной теории изгиба КМ-оболочек при $K = 5$ (см. (1)). Согласно поведению зависимости $w_*(t)$, приведенной на рис. 2, a, при расчете рассматриваемой конструкции по ТПРХ она неограниченно долго осциллирует, что не позволяет определить величину остаточного прогиба точек центрального сечения оболочки. Поведение же кривой на рис. 2, б свидетельствует о том, что при расчете по вязкоупругопластической модели колебания прогиба точек центрального сечения к моменту времени $t = 150$ мс практически полностью прекращаются и остаточный прогиб имеет значение порядка 1 мм.

На рис. 3 изображены зависимости от времени наибольшего по модулю значения прогиба КМ-оболочки

$$(w_m(t) = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |w(t, x_1)|), \text{ рассчитанные в окрестности}$$

начального момента времени (рис. 3, a) и в окрестности момента времени $t = 500$ мс (рис. 3, б). Кривая 1 получена по теории Редди ($K = 0$), а кривая 2 – по уточненной теории при $K = 5$ (расчеты проводились по вязкоупругопластической модели деформирования компонентов композиции). На рис. 3, a кривые 1 и 2 визуально практически неразличимы. Поведение этих кривых на рис. 3, a показывает, что с течением времени поперечные осцилляции конструкции затухают и к моменту времени $t = 500$ мс почти полностью прекращаются (см. рис. 3, б). Из рис. 3, б видно, что при $t \approx 500$ мс кривые 1 и 2 заметно различаются, причем остаточный прогиб, определенный по теории Редди (кривая 1), примерно на 10,4 % больше аналогичной величины, рассчитанной по уточненной теории (кривая 2). В связи с этим представляет интерес рассмотрение эпюр остаточных прогибов, рассчитанных по разным теориям деформирования КМ-оболочки.

На рис. 4 изображены зависимости w от x ($x = x_1 - L/2$), определенные при $t = 500$ мс, когда поперечные колебания конструкции почти полностью уже прекратились. Кривые на рис. 4 рассчитаны при тех же условиях, что и на рис. 3. Поскольку решение исследуемой задачи обладает симметрией относительно центрального сечения оболочки $x = 0$ ($x_1 = L/2$), то на рис. 4 приведены только правые участки соответствующих кривых (при $x \geq 0$). Сравнение максимальных значений ординат точек на кривых рис. 4, которые достигаются при $x \approx 1,9$ м (т.е. в зоне краевого эффекта), показывает, что при $t = 500$ мс значение w_m , полученное по теории Редди (кривая 1), на 11,7 % больше аналогичной величины, определенной по уточненной теории (кривая 2).

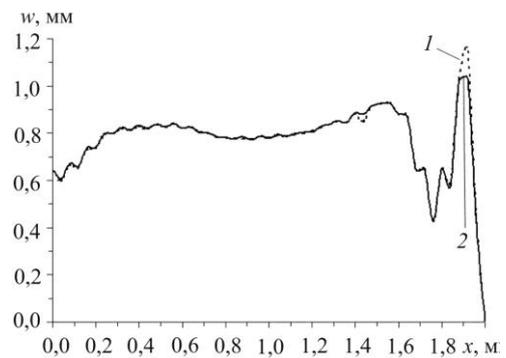


Рис. 4. Эпюры прогибов армированной вязкоупругопластической оболочки в момент времени $t = 500$ мс, рассчитанные по разным теориям изгибного деформирования

Fig. 4. Diagrams of deflections of a reinforced viscoelastic-plastic shell at a time instant $t = 500$ мс calculated according to different theories of bending deformation

На рис. 5 изображены рассчитанные при тех же условиях осцилляции максимальных значений интен-

сивности деформаций армирующих волокон $\varepsilon_*^{(1)}$ ($\varepsilon_m^{(1)}(t) = \max_{x_1, z} \varepsilon_*^{(1)}(t, x_1, z), |z| \leq h, 0 \leq x_1 \leq L$).

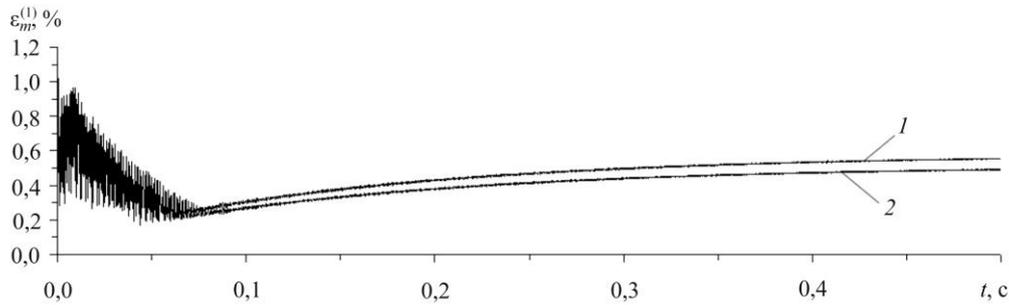


Рис. 5. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций арматуры вязкоупругопластической КМ-оболочки, рассчитанные по разным теориям изгибного деформирования

Fig. 5. Oscillations of the maximum values of the strain intensity of the reinforcement of a viscoelastic-plastic CM-shell, calculated according to different theories of bending deformation

Сравнение кривых на рис. 5 при $t=0,5$ с свидетельствует о том, что расчет по теории Редди (кривая 1) примерно на 13 % завышает остаточную величину $\varepsilon_m^{(1)}$ по сравнению с расчетом по уточненной теории (кривая 2). При $t > 0,08$ с кривые 1 и 2 монотонно возрастают, стремясь к соответствующим горизонтальным асимптотам и практически уже не осциллируя. Такая особенность поведения этих кривых объясняется ползучестью материала волокон, описываемой вязкими свойствами модели тела Максвелла – Больцмана (см. (13) и (14)). Эта ползучесть вызвана тем, что после пластического деформирования компонентов композиции в них возникают различные остаточные НДС, которые с течением времени стремятся выровняться.

Заключение

Разработанная уточненная математическая модель вязкоупругопластического поведения цилиндрических оболочек, армированных по эквидистантным поверхностям, позволяет более точно, чем в рамках широко используемой неклассической теории Редди, рассчитывать их затухающие колебания при кратковременных интенсивных механических воздействиях и определять остаточные перемещения и остаточное НДС в компонентах композиции после их пластического динамического деформирования. Выполненные расчеты показали, что даже для весьма тонких (с относительной толщиной порядка 1/100) и длинных цилиндрических КМ-оболочек традиционная неклассическая теория Редди, в первом приближении учитывающая искривление поперечной нормали конструкции, не гарантирует получения величины наибольшего остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции с точностью до 10 %. Как известно, для относительно толстых и/или корот-

ких цилиндрических армированных оболочек (с относительной толщиной порядка 1/10) такое различие решений, полученных по уточненной теории и теории Редди, становится еще больше [23] и для остаточных деформаций может составлять несколько десятков процентов.

Таким образом, для проведения адекватных динамических расчетов вязкоупругопластически деформируемых цилиндрических КМ-оболочек следует рекомендовать применение теорий повышенного порядка точности, в частности, предложенных в [23] и использованных настоящим исследованием.

Продемонстрировано, что в тонкой длинной КМ-оболочке остаточный прогиб может сложным образом зависеть от продольной координаты. Так, помимо краевых эффектов в окрестности центрального сечения конструкции может возникнуть локальный эффект, протяженность которого сопоставима с протяженностью зон краевых эффектов (см. рис. 4). Такая сложная форма остаточного прогиба является следствием сложных неупругих волновых процессов, протекающих в динамически нагруженной тонкой КМ-конструкции.

Высокопрочные армирующие волокна, имеющие большие пределы текучести и большие значения деформаций, им соответствующие, при деформировании запасают в большом количестве упругую энергию, поэтому амплитуды осцилляций прогиба точек цилиндрической КМ-оболочки в окрестности начального момента времени оказываются существенно (даже на порядок) больше максимальных значений величин остаточных прогибов (см. рис. 2, б и рис. 3). Аналогичное поведение наблюдается и для зависимостей от времени максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиции.

Благодарность

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

Acknowledgement

Библиографический список

1. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Composites*. – 2001. – Part A 32. – Pp. 901–910.
2. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / A.P. Mouritz, E. Gellert, P. Burchill, K. Challis // *Compos. Struct.* – 2001. – Vol. 53, no. 1. – P. 21–42.
3. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics. – 3rd ed. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. – 686 p.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Frontiers of Mechanical Eng.* – 2013. – Vol. 8, no. 2. – P. 187–200.
5. Прикладные задачи механики цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов, В.П. Георгиевский, А.Я. Недбай, В.А. Андрияшин. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
6. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наукова думка, 1973. – 228 с.
7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
8. Васильев В.В., Елпатьевский А.Н. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. – М.: Машиностроение, 1972. – 168 с.
9. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1955. – Vol. 13, no. 2. – P. 169–176.
10. Mindlin R.D., Bleich H.H. Response of an elastic cylindrical shells to a transverse step shock wave // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* – 1953. – Vol. 20, no. 2. – P. 189–195.
11. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
12. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
13. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 336 с.
14. Шкутин Л.И. Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 139 с.
15. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
16. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. – 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
17. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
18. Янковский А.П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2019. – Т. 12, № 1. – С. 80–97. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.8.
19. Whitney J., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. of Sound and Vibration*. – 1973. – Vol. 30, no. 1. – P. 85–97.
20. Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M. A higher-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* – 1977. – Vol. 44. – P. 669–676.
21. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ*. – 1994. – № 2. – С. 33–42.
22. Пиккуль В.В. Механика оболочек. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
23. Янковский А.П. Моделирование динамического поведения армированных цилиндрических оболочек при упругопластическом деформировании материалов компонентов композиции // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2018. – № 2. – С. 133–146.
24. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
25. Справочник по композитным материалам: в 2 кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
26. Maćko W., Kowalewski Z.L. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates // *Appl. Mech. Mater.* – 2011. – Vol. 82. – P. 166–171.
27. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.
28. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.
29. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers & Structures*. – 1987. – Vol. 26, no. 1/2. – P. 1–15.
30. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.
31. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading // *Composites*. – 2004. – Part B 35. – P. 673–683.
32. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2011. – Vol. 46. – P. 807–817.
33. Muc A., Muc-Wierzoń M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells // *Compos. Struct.* – 2012. – Vol. 94, no. 4. – P. 1461–1470.

References

1. Bannister, M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective, *Composites*, 2001, part A 32, pp. 901-910.
2. Mouritz, A.P., Gellert, E., Burchill, P., Challis, K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21-42.
3. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 3rd ed. Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012, 686 p.
4. Gill, S.K., Gupta, M., Satsangi, P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Frontiers of Mechanical Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187-200.
5. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 p.
6. Grigorenko Ya.M. Izotropnye i anizotropnye sloistye obolochki vrashcheniya peremennoy zhestkosti [Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable rigidity]. Kiev, Naukova dumka, 1973, 228 p.
7. Ambarcumian S.A. Obschchaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka, 1974, 446 p.
8. Vasil'yev V.V., Yel'pat'yevskiy A.N. Prochnost' tsilindricheskikh obolochek iz armiro-vannykh materialov [Strength of cylindrical shells made of reinforced materials]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1972, 168 p.
9. Reissner, E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169-176.
10. Mindlin, R.D., Bleich, H.H. Response of an elastic cylindrical shells to a transverse step shock wave. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1953, vol. 20, no. 2, pp. 189-195.
11. Bogdanovich A.E., Nelineinye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
12. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nelinejnyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhniy Novgorod, Publ Nizhniy Novgorod State University, 2002, 400 p.
13. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. Nelineinoe deformirovaniye i ustoychivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]. Moskva, Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012, 336 p.
14. Shkutin L.I. Nelineinye deformacii i katastrofy tonkikh tel [Nonlinear deformations and accidents of thin bodies]. Novosibirsk, SB RAS Publ., 2014, 139 p.
15. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. Mnogosloynnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost' i kolebaniya [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001. 287 p.
16. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.
17. Andreev A.N. Uprugost' i termouprugost' sloistyykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotoryye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. Saarbrücken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p.
18. Yankovskii, A.P. Modelirovaniye vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin s uchetyom slabogo soprotivleniya poperechnomu sdvigu [Modelling the visco-elastic-plastic deformation of flexible reinforced plates with account of weak resistance to transverse shear]. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no 1, pp. 80-97. DOI:10.7242/1999-6691/2019.12.1.8.
19. Whitney, J., Sun, C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *J. of Sound and Vibration*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85-97.
20. Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M. A higher-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, pp. 669-676.
21. Kulikov, G.M. Termouprugost' gibkikh mnogosloynnykh anizotropnykh obolochek [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]. *News RAS. Mechanics of Solids*, 1994, no. 2, pp. 33-42.
22. Pikul' V.V. Mekhanika obolochek [Mechanics of shells]. Vladivostok, Dal'nauka, 2009, 536 p.
23. Yankovskii, A.P. Modeling of dynamic behavior of reinforced cylindrical shells under elastic-plastic deformation of materials of composition components. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 133-146.
24. Karpinos D.M. Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
25. Lubin G. Handbook of composites. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.
26. Maćko, W., Kowalewski, Z.L. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates, *Appl. Mech. Mater.*, 2011, vol. 82, pp. 166-171.
27. Zubchaninov V.G. Mekhanika processov plasticheskikh sred [Mechanics of processes of plastic mediums]. Moscow, Fizmatlit, 2010, 352 p.
28. Freudental A.M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1958.
29. Houlston, R., DesRochers, C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1-15.
30. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000, 707 p.
31. Librescu, L., Oh, S.-Y., Hohe, J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading. *Composites*, 2004, part B 35, pp. 673-683.
32. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 807-817.
33. Muc, A., Muc-Wierzgoń, M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells, *Compos. Struct.*, 2012, Vol. 94, No. 4, pp. 1461-1470.