

Абдеев Б.М., Брим Т.Ф., Муслиманова Г. Уточненная плоская механико-математическая модель для определения напряжений в основании ленточного фундамента и его упругой осадки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 150-164. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.12

Abdeev B.M., Brim T.F., Muslimanova G. The refined plane mechanical and mathematical model determining stresses in the base of the strip foundation and elastic sediment. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 150-164. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.12



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.12

УДК 517.958:539.3(2):624.15

УТОЧНЕННАЯ ПЛОСКАЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСНОВАНИИ ЛЕНТОЧНОГО ФУНДАМЕНТА И ЕГО УПРУГОЙ ОСАДКИ

Б.М. Абдеев, Т.Ф. Брим, Г. Муслиманова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,
Усть-Каменогорск, Казахстан

О СТАТЬЕ

Получена: 12 сентября 2019 г.

Принята: 16 марта 2020 г.

Опубликована: 30 марта 2020 г.

Ключевые слова:

сила, напряжение, деформация, перемещение, полуплоскость, упругость, линейная деформируемость, ленточный фундамент, основание.

АННОТАЦИЯ

Получено новое уточненно-модифицированное решение фундаментальной двумерной задачи теории упругости о перпендикулярном приложении к границе полуплоскости сосредоточенно-линейной постоянной нагрузки. В отличие от аналогичной классической задачи Фламана, представляющей собой частный случай простого радиального напряженного состояния, учтены все три компонента напряжений – два нормальных и касательное, а также дополнительный геометрический параметр, характеризующий ширину площадки фактического распределения внешней локальной силы. Кроме того, на основе классической интерпретации плоской деформации устранены известные противоречия, связанные с неопределенностью углового перемещения на границе полупространства и с постоянством второй кинематической составляющей при стремлении к бесконечности координаты произвольной точки материала основания. В процессе исследований строго доказано существование цилиндрических поверхностей, где действуют равные растягивающие напряжения, траектории которых имеют форму окружностей. В упрощенном решении Фламана такими кривыми линиями-изобарами также являются круги Буссинеска с постоянными главными сжимающими напряжениями. Выведенные аналитические зависимости представлены в прямоугольной системе отсчета, что позволяет количественно оценивать с повышенной точностью: 1) напряжения в глубине основания по горизонтальному и вертикальному сечениям; 2) контактное давление и осадку упругой поверхности грунта под подошвой жесткого длинного фундамента, когда основание, в пределах общепринятых допущений, предполагается линейно-деформируемым, однородным, изотропным, сплошным телом, испытывающим одноразовое нагружение. Результаты разработанной обобщенной физико-математической модели могут служить концептуальной базой основой, используемой при решении специальных фундаментально-прикладных задач механики, имеющих непосредственное отношение к уточненному расчету несущей способности разнообразных деталей и конструкций, широко применяемых в современном машиностроении и строительстве: подшипников скольжения, цилиндрических катков, зубчатых передач, оснований ленточных фундаментов, дорожных покрытий при их уплотнении стальными вальцами и т.д.

© ПНИПУ

© Абдеев Борис Масгутович – к.т.н., проф., e-mail: m.abdeeva@mail.ru, ID: [0000-0003-2867-152X](https://orcid.org/0000-0003-2867-152X)

Брим Татьяна Федоровна – к.т.н., ст. преп., e-mail: tbrim@mail.ru, ID: [0000-0001-9188-5411](https://orcid.org/0000-0001-9188-5411)

Муслиманова Гульнар – к.т.н., доц., e-mail: gmuslimanova@mail.ru, ID: [0000-0003-1447-9131](https://orcid.org/0000-0003-1447-9131)

Boris M. Abdeev – CSc in Technical Sciences, Professor, e-mail: m.abdeeva@mail.ru, ID: [0000-0003-2867-152X](https://orcid.org/0000-0003-2867-152X)

Tatyana F. Brim – CSc in Technical Sciences, Senior Lecturer, e-mail: tbrim@mail.ru, ID: [0000-0001-9188-5411](https://orcid.org/0000-0001-9188-5411)

Gulnar Muslimanova – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: gmuslimanova@mail.ru,

ID: [0000-0003-1447-9131](https://orcid.org/0000-0003-1447-9131)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE REFINED PLANE MECHANICAL AND MATHEMATICAL MODEL DETERMINING STRESSES IN THE BASE OF THE STRIP FOUNDATION AND ELASTIC SEDIMENT

B.M. Abdeev, T.F. Brim, G. Muslimanova

D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

ARTICLE INFO

Received: 12 September 2019
 Accepted: 16 March 2020
 Published: 30 March 2020

Keywords:

force, stress, deformation, displacement, half-plane, elasticity, linear deformability, strip foundation, base.

ABSTRACT

The paper presents a new refined-modified solution of the fundamental two-dimensional problem of the elasticity theory on the perpendicular application to the boundary of the half-plane of a concentrated-linear constant load. In contrast to the similar classical Fleman problem, which is a special case of a simple radial stress state, all three stress components, two normal and one tangent, as well as an additional geometric parameter characterizing the width of the site of the external local force's actual distribution have been taken into consideration. In addition, on the basis of the classical interpretation of plane deformation, the known contradictions are eliminated that are associated with the uncertainty of the angular displacement at the boundary of the half-space and with the constancy of the second kinematic component in the pursuit of the infinity coordinates of an arbitrary point of the base material. In the course of the research, it is proved that there are cylindrical surfaces where equal tensile stresses act which trajectories have the shape of circles. In a simplified Fleman solution of such curves- isobars are Boussinesq circles with constant the principal compressive stresses. The derived analytical dependences are presented in a rectangular frame of reference, which allows to quantify the following with a high accuracy: 1) stresses in the depth of the base in horizontal and vertical sections; 2) contact pressure and draft of the soil elastic surface under the sole of a rigid long foundation when the base, within the generally accepted assumptions, is assumed to be linearly deformable, homogeneous, isotropic, solid, experiencing a one-time load. The results of the developed generalized physical and mathematical model can serve as a conceptual basis used in solving special fundamental and applied problems of mechanics directly related to the refined calculation of the bearing capacity of various parts and structures, widely used in modern engineering and construction such as bearings, cylindrical rollers, gears, foundations strip foundations, pavements in their steel compaction rolls, etc.

© PNRPU

Введение

Несущая способность оснований и фундаментов в значительной степени определяется правильной оценкой напряженно-деформированного состояния грунтов и рациональностью выбранных типов оснований [1–6].

Математическое моделирование и оптимальное проектирование современных зданий и сооружений во многом зависят от качества грунта в основании фундамента, которое без перенапряжения должно воспринимать все нагрузки, действующие на конструкцию, обеспечивая ее прочность, жесткость и устойчивость. И в этой связи любые исследования, связанные с модернизацией и совершенствованием методов расчета оснований фундаментов, являются актуальными и перспективными.

Представленная обзорно-тематическая научно-практическая работа посвящена приложению новых формул фундаментальной двумерной задачи теории упругости [7, 8, 10–13, 17, 21, 27–29] к уточненной количественной оценке напряжений, деформаций и перемещений в основании длинного жесткого фундамента при его одноразовом нагружении [1, 3–6].

Рассмотрим сосредоточенную нагрузку P , нормальную к границе $x = 0$ упругодеформируемой полуплоскости $x > 0$, материал которой – однородный, сплошной,

изотропный и подчиняется закону Гука, а распределение силового параметра P по координатной оси z является равномерным (рис. 1).

Существует фундаментальное решение этой задачи, называемое простым радиальным напряженным состоянием

$$\sigma_r = \sigma_r(r, \theta) = -\frac{2 \cdot P \cdot \cos \theta}{\pi \cdot r}, \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \tau = 0, \left(0 < r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pm \frac{\pi}{2} \right),$$

которое получил в 1892 г. французский ученый А. Фламан [7–10] на основе осесимметричной пространственной математической модели Буссинеска [3, 14, 15]. Формулы (1) удовлетворяют двум уравнениям равновесия без учета объемных сил и условию сплошности среды или уравнению Мориса Леви в полярных координатах r, θ [7, 8, 10–12, 27–23]:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2 \cdot \tau}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0; \quad (4)$$

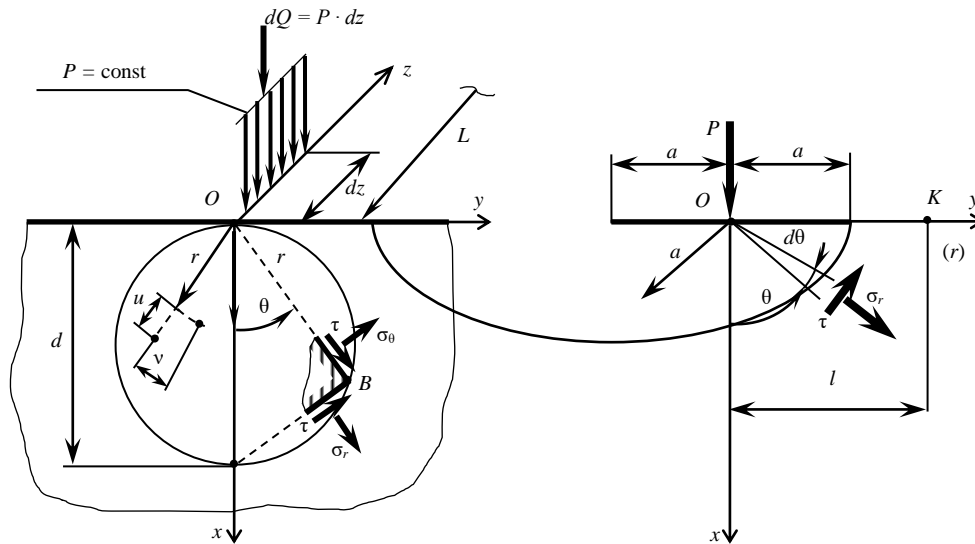


Рис. 1. Расчетная схема напряженного состояния в плоскости xOy

Fig. 1. Design scheme of stress-strain state in the xOy plane

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau$ – нормальные (σ_r, σ_θ) и касательное (τ) напряжения в произвольной точке B полуплоскости (см. рис. 1).

Граничные условия также соблюдаются, вследствие того что функции σ_θ и τ тождественно равны нулю, а результирующая $P \cdot dz$ внутренних усилий σ_r по принципу Сен-Венана [27–29] заменяется эквивалентной нагрузкой, распределенной по поверхности полуцилиндра малого радиуса $a \ll r$, т.е.

$$dz \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cdot a \cdot \cos\theta \cdot d\theta = -\frac{4 \cdot P \cdot dz}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot d\theta = -P \cdot dz. \quad (5)$$

Оказывается далее, что если провести окружность произвольного диаметра d с центром на оси x , касающуюся верхнего края полуплоскости, где приложена сила P (см. рис. 1), то для любой точки B этого круга, за исключением нулевой [7, 8, 14],

$$d \cdot \cos\theta = r \quad (6)$$

и на основании (1)

$$\sigma_r = -\frac{2 \cdot P}{\pi \cdot d} = \text{const}. \quad (7)$$

При этом и наибольшее касательное напряжение τ_{\max} также остается постоянным [8, 20, 21]:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{P}{\pi \cdot d} = \text{const}. \quad (8)$$

Продолжая решение задачи в напряжениях (1), Фламан [9] вывел функциональные соотношения для радиального $u = u(r, \theta)$ и кольцевого $v = v(r, \theta)$ перемещений точек, расположенных на границе $x = 0$ по-

луплоскости при $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 1), что, как известно, имеет большое практическое значение для многих технических приложений, связанных прежде всего с физико-математическим моделированием плоских контактных задач [17–20], лежащих в основе расчета подшипников скольжения, цилиндрических катков [15, 17, 26, 32], балок на упругом основании [21, 33] и т.д. Соответствующие формулы применительно к плоской деформации выглядят следующим образом [2, 17]:

$$u_\Gamma = u\left(r, \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu) \cdot P}{2 \cdot E} = \text{const}, \quad (9)$$

$$v_\Gamma = v\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = -v_\Gamma = -v\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \cdot P \cdot (1 - \mu^2)}{\pi \cdot E} \cdot \ln \frac{l}{r}; \quad (10)$$

где E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; l – координата произвольно выбранной точки K оси $y(r)$ (см. рис. 1), где

$$v\left(l, \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (11)$$

Перемещение v_Γ считается положительным, если оно направлено в сторону увеличения угла θ [7]. В данном случае $v\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = -v\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 1), и это отражено в равенстве (10).

Можно заметить, что классические зависимости (9), (10) содержат известные и физически не обоснованные противоречия о том, что в случае $r = \infty$ (согласно принципу Сен-Венана [7]) обе функции – (9), (10) – должны равняться нулю, т.е.

$$u_\Gamma\left(\infty, \pm \frac{\pi}{2}\right) = v\left(\infty, -\frac{\pi}{2}\right) = -v\left(\infty, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (12)$$

однако условия (12) не соблюдаются, так как при $r = \infty$

$$u_r = \text{const}, |v_r| = \infty. \quad (13)$$

Парадоксальный результат (13) не соответствует и базовому решению Буссинеска (рис. 2) [7, 14, 21], в случае перпендикулярно направленной силы P на полупространство, в котором отсутствуют вышеуказанные противоречия на граничной плоскости и $x = 0$, как следствие,

$$\left. \begin{aligned} u_B = u_B(r, 0) &= -\frac{P \cdot (1 - 2 \cdot \mu) \cdot (1 + \mu)}{2 \cdot \pi \cdot E} \cdot \frac{1}{r} = u_B(r), \\ v_B = v(r, 0) &= \frac{P \cdot (1 - \mu^2)}{\pi \cdot E} \cdot \frac{1}{r} = v_B(r); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

откуда, в предельном случае $r = \infty$, получаются нулевые ответы:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_B(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} v_B(r) = 0. \quad (15)$$

Для устранения физико-математической некорректности – парадокса (13) – вводим максимально расширенную, по сравнению с (1), модификацию напряженного состояния, возникающего в упругодеформируемой полуплоскости (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(r, \theta) \neq 0, \quad \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_\theta(r, \theta) \neq 0, \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}(r, \theta) \neq 0, \\ 0 < r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Горизонтальная черта над буквенными символами является отличительным признаком принадлежности того или иного параметра к усовершенствованной расчетной модели, изображенной на рис. 1.

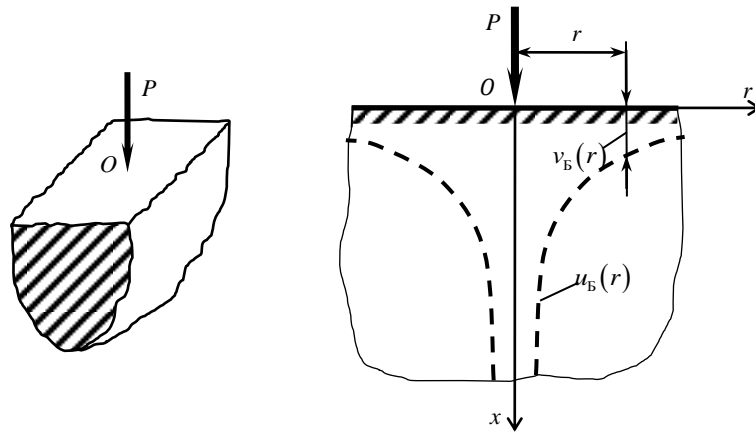


Рис. 2. Пространственная расчетная модель Буссинеска [7, 14, 17] и общий гиперболический характер изменения краевых функций $v_B(r)$, $u_B(r)$ в виде пунктирной кривой линии

Fig. 2. The Boussinesq spatial analysis model [7, 14, 17] and the General hyperbolic nature of the $v_B(r)$, $u_B(r)$ edge functions' change – a dashed curve line

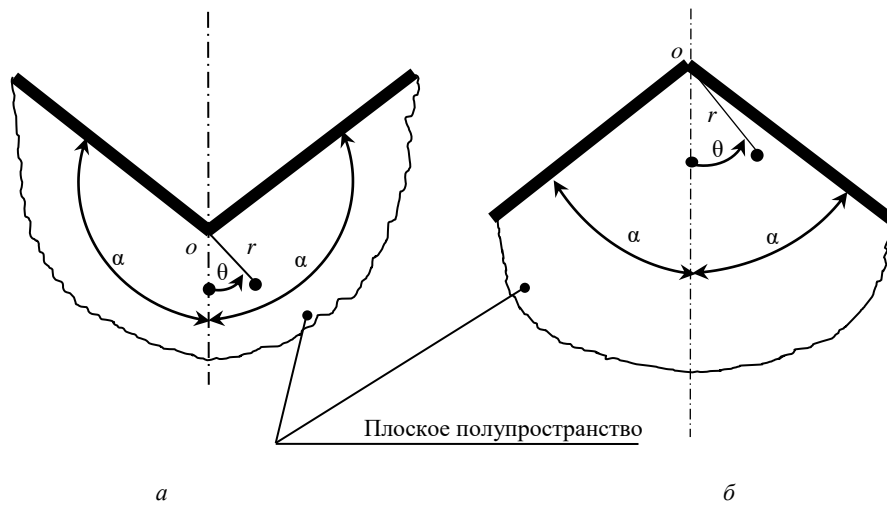


Рис. 3. Схемы углового выреза (а) и клиновидной области (б), математически аппроксимируемые выражением (17)

Fig. 3. Schemes of angular cut (a) and wedge-shaped region (b), mathematically approximated by the expression (17)

В процессе определения внутренних силовых характеристик $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}$ используем общую фундаментальную формулу [7]

$$\varphi = \varphi(r, \theta) = r^{\lambda+1} \cdot [C_1 \cdot \cos(\lambda+1)\theta + C_2 \cdot \cos(\lambda-1)\theta + C_3 \cdot \sin(\lambda+1)\theta + C_4 \cdot \sin(\lambda-1)\theta], \quad (17)$$

$$0 < r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pm \alpha,$$

функции напряжений $\varphi = \varphi(r, \theta)$, применяемую для расчета элементов конструкций, имеющих форму вырезов и клиньев, включающих угловую точку «O» и плоские боковые поверхности, ограничивающие однородное изотропное полупространство (рис. 3).

Зависимость (17) содержит 6 констант $\lambda \geq 0$ (любое число), $0 < \alpha < \pi, C_1, C_2, C_3, C_4$, которые подбирают, руководствуясь конкретной расчетной схемой, граничными условиями и физико-математическим смыслом рассматриваемой задачи. Доказано также [7], что функция (17) является точным решением однородных дифференциальных уравнений (2)–(4) [7–11, 23, 27] в случае

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad (18)$$

$$\tau = \bar{\tau} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \cdot \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).$$

Учитывая специфические особенности осесимметричной модели рис. 1, сформулированную уточненную задачу в напряжениях (16) и возможность устранения противоречий (13), принимаем в аппроксимации (17) и на рис. 3, а, б: $\lambda = -2, \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ, C_3 = C_4 = 0$. В результате, на основании (18) и [7, 22] будем иметь:

$$\bar{\sigma}_r = -2 \cdot r^{-3} \cdot (C_1 \cdot \cos \theta + 5 \cdot C_2 \cdot \cos 3\theta), \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = -2 \cdot r^{-3} \cdot (C_1 \cdot \cos \theta + C_2 \cdot \cos 3\theta), \quad (20)$$

$$\bar{\tau} = 2 \cdot r^{-3} \cdot (C_1 \cdot \sin \theta + 3 \cdot C_2 \cdot \sin 3\theta), \quad (21)$$

Первое граничное равенство

$$\bar{\sigma}_\theta \left(r, \pm \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (22)$$

выполняется, а из второго краевого условия

$$\bar{\tau} \left(r, \pm \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (23)$$

находим

$$C_1 = 3 \cdot C_2, \quad (24)$$

и тогда, с учетом известных замен [22],

$$\left. \begin{aligned} \cos 3\theta &= 4 \cdot \cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta, \\ \sin 3\theta &= 3 \cdot \sin \theta - 4 \cdot \sin^3 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

получаем с точностью до постоянной C_2 функциональные соотношения:

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(r, \theta) = -8 \cdot C_2 \cdot r^{-3} \cdot (5 \cdot \cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta), \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_\theta(r, \theta) = 8 \cdot C_2 \cdot r^{-3} \cdot \cos^3 \theta, \quad (27)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(r, \theta) = 24 \cdot C_2 \cdot r^{-3} \cdot (\sin \theta - \sin^3 \theta). \quad (28)$$

Для определения коэффициента C_2 , по аналогии с моделью (1) [7–11], вырезаем из полуплоскости (см. рис. 1) элемент, ограниченный цилиндрической поверхностью малого радиуса $a \ll r$. Далее проектируем на ось x внутренние силы, действующие по криволинейной границе полуцилиндра, и внешнюю нагрузку P :

$$\Sigma X = 0, \Rightarrow 2 \cdot dz \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\bar{\sigma}_r \cdot \cos \theta - \bar{\tau} \cdot \sin \theta) \Big|_{r=a} \times \\ \times a \cdot d\theta + P \cdot dz = 0. \quad (29)$$

Раскрывая с помощью [22, 25] и (26), (28) интегралы в уравнении равновесия (29) при $r = a$, вычисляем константу C_2 :

$$\frac{16 \cdot C_2}{a^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cdot \cos^4 \theta - 3 \cdot \cos^2 \theta + 3 \cdot \sin^2 \theta - 3 \cdot \sin^4 \theta) \cdot d\theta = P, \quad (30)$$

$$\frac{16 \cdot C_2}{a^2} \cdot \left(\frac{15 \cdot \pi}{16} - \frac{3 \cdot \pi}{4} + \frac{3 \cdot \pi}{4} - \frac{9 \cdot \pi}{16} \right) = P, \Rightarrow C_2 = \frac{P \cdot a^2}{6 \cdot \pi}. \quad (31)$$

Исключая C_2 в соответствии с (31) из зависимостей (26)–(28), представляем три компоненты напряжений согласно предпосылке (16):

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(r, \theta) = -\frac{4 \cdot P \cdot a^2}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{(5 \cdot \cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta)}{r^3}, \quad (32)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_\theta(r, \theta) = \frac{4 \cdot P \cdot a^2}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{r^3}, \quad (33)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(r, \theta) = \frac{4 \cdot P \cdot a^2}{\pi} \cdot \frac{(\sin \theta - \sin^3 \theta)}{r^3}, \quad (34)$$

$$0 < r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pm \frac{\pi}{2}.$$

Подтверждено практическими расчетами и исследованиями, что фактическое перераспределение давления по подошве жесткого фундамента с равнодействующей P незначительно изменяет напряжения в грунте на глубине менее половины размера $2a$ [1, 3–6].

Полученные функции (32)–(34), в отличие от известных формул (1) [7–11], включают дополнительный параметр a^2 , появление которого возможно обосновать [7], так как расчетная схема рис. 1 является идеализированной. В точке приложения линейной сосредоточенной нагрузки P теоретические напряжения $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(0, \theta) = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_\theta(0, \theta) = \bar{\tau} = \bar{\tau}(0, \theta) = \infty$, поскольку конечная сила P при $r = 0$ действует на бесконечно малой площади.

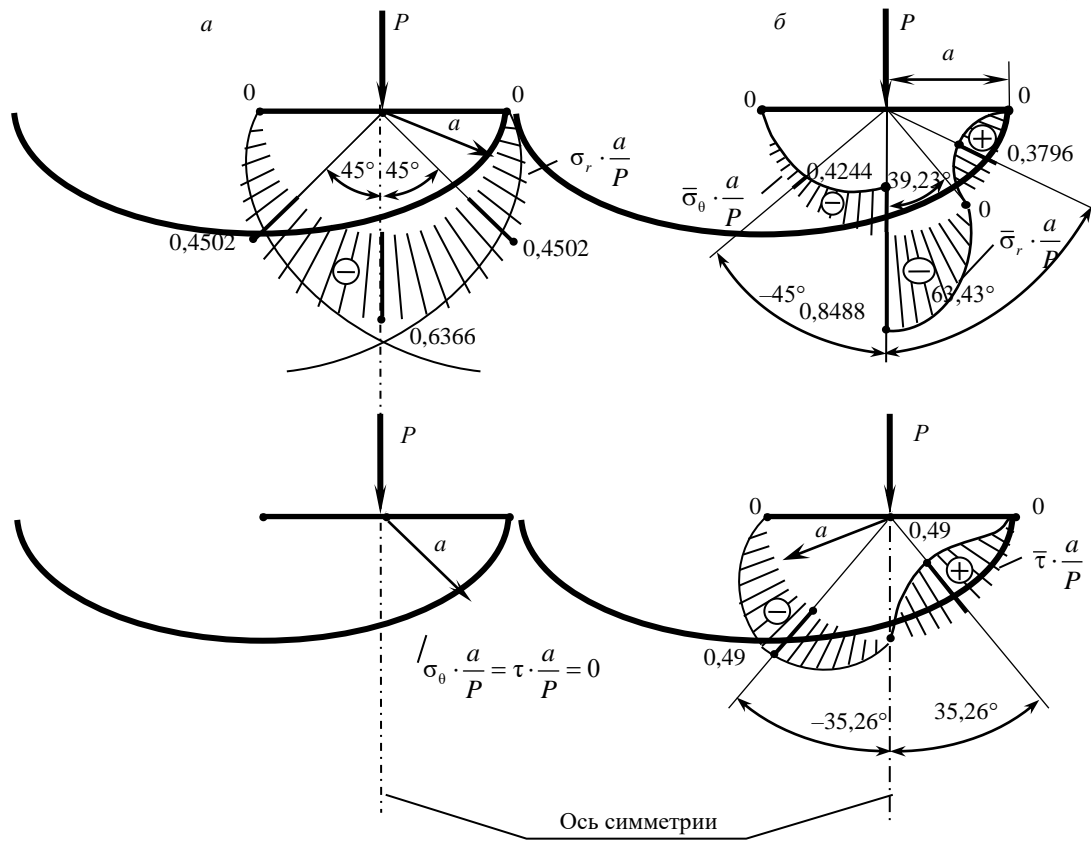


Рис. 4. Безразмерные эпюры напряжений на полуокружности произвольного радиуса $r = a$: a – по фундаментальной модели (1) [9]; b – в соответствии с выведенными формулами (32)–(34)

Fig. 4. Dimensionless stress diagrams on a semicircle of arbitrary radius $r = a$: a) on the fundamental model (1) [9]; b) according to the derived formulas (32)–(34)

Фактически же нагрузка P распределяется на площадке хотя и малой, но конечной ширины, в качестве которой будем принимать линейный размер $2a$ (см. рис. 1). Численное значение a либо может быть задано, как при исследовании давления жесткого плоского штампа шириной $2a$ на упругое тело-полуплоскость [18–20], либо определяется в ходе решения конкретной прикладной задачи, например – контактной о первоначальном взаимодействии по линии z (см. рис. 1) двух параллельных цилиндров, когда параметр a является переменной величиной [17–19], зависящей от P и физико-геометрических характеристик рассматриваемой механической системы.

Сравнительная оценка решений (1) и (32)–(34) наглядно проиллюстрирована на рис. 4 в количественном и качественном отношениях. Продолжая уточненное решение задачи с использованием формул (6), (32)–(34), легко доказать, что, как и в классическом случае (1) (см. рис. 1), существуют круги Буссинеска [14, 27], или линии равных напряжений (изобары [1, 8]), наличие которых экспериментально подтверждено результатами поляризационно-оптических исследований на лабораторных образцах из прозрачных материалов [28]. В расширенной модели (32)–(34) такими изобарами будут окружности с одинаковыми растягивающими напряжениями (рис. 5)

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{4 \cdot P \cdot a^2}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{(d \cdot \cos \theta)^3} = \frac{4 \cdot P \cdot a^2}{3 \cdot \pi \cdot d^3} = \text{const.} \quad (35)$$

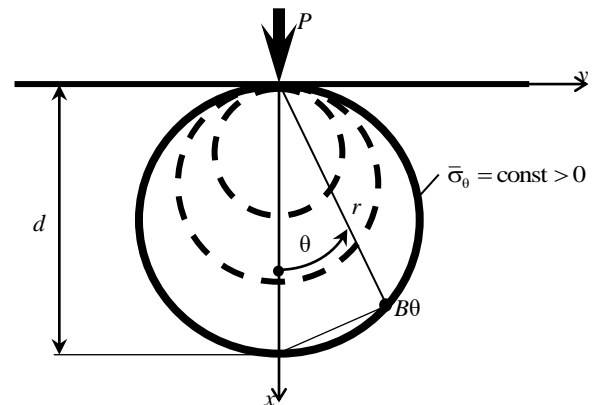


Рис. 5. Траектории постоянных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_\theta$

Fig. 5. Trajectories of $\bar{\sigma}_\theta$ constant normal stresses

В инженерной практике при расчете фундаментов необходимо знать распределение напряжений в массиве основания фундамента по горизонтальным и вертикальным сечениям [1–6]. Поэтому переходим с помощью известных аналитических зависимостей [7, 8, 11, 27] (см. рис. 1)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r}; \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \bar{\sigma}_r \cdot \cos^2 \theta + \bar{\sigma}_\theta \cdot \sin^2 \theta - 2 \cdot \bar{\tau} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta, \\ \bar{\sigma}_y &= \bar{\sigma}_r \cdot \sin^2 \theta + \bar{\sigma}_\theta \cdot \cos^2 \theta + 2 \cdot \bar{\tau} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \bar{\tau}_{yx} = (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \bar{\tau} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} (37)$$

от напряжений (32)–(34), т.е. $\bar{\sigma}_r(r, \theta), \bar{\sigma}_\theta(r, \theta), \bar{\tau}(r, \theta)$, выраженных через полярные координаты r, θ , к соответствующим внутренним силовым факторам $\bar{\sigma}_x(x, y), \bar{\sigma}_y(x, y), \bar{\tau}_{xy}(x, y) = \bar{\tau}_{yx}(x, y)$ в декартовой системе отсчета xOy (рис. 6) при допущении [1–6], что грунт представляет собой сплошное линейно-деформируемое однородное тело:

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_x(x, y) = -\frac{8 \cdot P \cdot a^2}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (38)$$

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y(x, y) = \frac{4 \cdot P \cdot a^2}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{x \cdot (x^2 + 3 \cdot y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (39)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}(x, y) = -\frac{4 \cdot P \cdot a^2}{\pi} \cdot \frac{x^4 \cdot y}{(x^2 + y^2)^4}, \quad (40)$$

$(0 \leq r \leq \infty, 0 \leq y \leq \pm \infty)$.

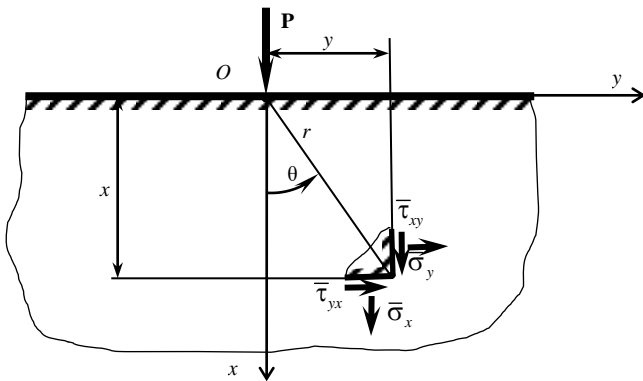


Рис. 6. Схематическая модель к определению напряжений $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yx}$ по формулам (38)–(40)

Fig. 6. The schematic model for stress determination $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yx}$ by formulas (38)–(40)

Рис. 7, а, б иллюстрируют соответственно уточненные эпюры $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ и построенные по классическим аналитическим соотношениям [8, 11, 27, 29]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y) = -\frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y) = -\frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}(x, y) = -\frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} (41)$$

для одного горизонтального уровня $x = a$ (эпюры $\bar{\sigma}_x, \sigma_x, \bar{\tau}_{yx}, \tau_{yx}$) и одного вертикального сечения $y = a$ (эпюры $\bar{\sigma}_y, \sigma_y$). Наибольшие расчетные значения функций $\sigma_x(a, y), \tau_{yx}(a, y), \sigma_x(2a, y), \tau_{yx}(2 \cdot a, y), \sigma_y(x, a), \sigma_y(x, 2 \cdot a)$ в виде [8, 29]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(\max)}(a, 0) &= -0,6366 \cdot \frac{P}{a}, \\ \sigma_x^{(\max)}(2 \cdot a, 0) &= -0,3183 \cdot \frac{P}{a}; \end{aligned} \right\} (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx}^{(\max)}(a, \pm 0,577a) &= \mp 0,207 \cdot \frac{P}{a}, \\ \tau_{yx}^{(\max)}(2 \cdot a, \pm 1,15a) &= \mp 0,104 \cdot \frac{P}{a}; \end{aligned} \right\} (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^{(\max)}(0,577 \cdot a, a) &= -0,207 \cdot \frac{P}{a}, \\ \sigma_y^{(\max)}(1,15 \cdot a, 2a) &= -0,104 \cdot \frac{P}{a} \end{aligned} \right\} (44)$$

отмечены на рис. 7, б для двух сечений $x = a$ и $y = a$, а экстремумы зависимостей $\bar{\sigma}_x(a, y), \bar{\sigma}_x(2 \cdot a, y), \bar{\tau}_{yx}(a, y), \bar{\tau}_{yx}(2 \cdot a, y), \bar{\sigma}_y(x, a), \bar{\sigma}_y(x, 2 \cdot a)$, как и упрощенные – $\sigma_x^{(\max)}(a, 0), \tau_{yx}^{(\max)}(a, 0), \sigma_y^{(\max)}(0,577 \cdot a, a)$ (см. (42)–(44)), удовлетворяющие необходимым условиям [22, 29]

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = 0, \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 0, \quad (45)$$

записываются следующим образом (см. рис. 7, а):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(\max)}(a, 0) &= -0,8488 \cdot \frac{P}{a}, \\ \sigma_x^{(\max)}(2 \cdot a, 0) &= -0,1061 \cdot \frac{P}{a}; \end{aligned} \right\} (46)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx}^{(\max)}(a, \pm a) &= \mp 0,0796 \cdot \frac{P}{a}, \\ \tau_{yx}^{(\max)}(2 \cdot a, \pm 2 \cdot a) &= \mp 0,0099 \cdot \frac{P}{a}; \end{aligned} \right\} (47)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^{(\max)}(0,486 \cdot a, a) &= -0,54 \cdot \frac{P}{a}, \\ \sigma_y^{(\max)}(0,972 \cdot a, 2 \cdot a) &= -0,0675 \cdot \frac{P}{a}; \end{aligned} \right\} (48)$$

где место максимума функции $\bar{\sigma}_y(x, y)$, т.е. координата x_0 , в общем случае при любой величине переменной y , определяется выражением

$$x_0 = y \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2}. \quad (49)$$

Анализ расчетных данных (42)–(44), (46)–(48) и характера эпюр рис. 7 позволяет отметить некоторые принципиальные особенности новых формул (38)–(40).

Прежде всего, это существенно большие численные абсолютные значения экстремальных нормальных напряжений $|\bar{\sigma}_x^{(max)}| > |\sigma_x^{(max)}|$, $|\bar{\sigma}_y^{(max)}| > |\sigma_y^{(max)}|$ и пониженная касательная составляющая $|\bar{\tau}_{yx}^{(max)}| \ll |\tau_{yx}^{(max)}|$ в прямоугольной области $0 < x \leq a$, $-a \leq y \leq a$, близкой к границе (подошве) фундамента. Во-вторых, равенство нулю параметра σ_y в точках, расположенных на оси симметрии x при $y=0$ (см. (41)), по сравнению с

$$\bar{\sigma}_y(x, 0) = \frac{4 \cdot P \cdot a^3}{3 \cdot \pi \cdot x^3} \neq 0, \quad 0 < x \leq \infty, \quad (50)$$

и различие в знаках напряжений $\sigma_y \leq 0$, $\bar{\sigma}_y \geq 0$. По мнению авторов этой работы, граничное неравенство $\bar{\sigma}_y \geq 0$ и условие (50) являются более объективными с физико-механической точки зрения (см. рис. 6, 7).

С целью вычисления перемещений \bar{u}_r и \bar{v}_r верхней границы $x=0$ материала упругой среды (см. рис. 1) дополняем соотношения (32)–(34):

• дифференциальными уравнениями Коши [7, 8, 10, 11]

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{\varepsilon}_r(r, \theta) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \quad (51)$$

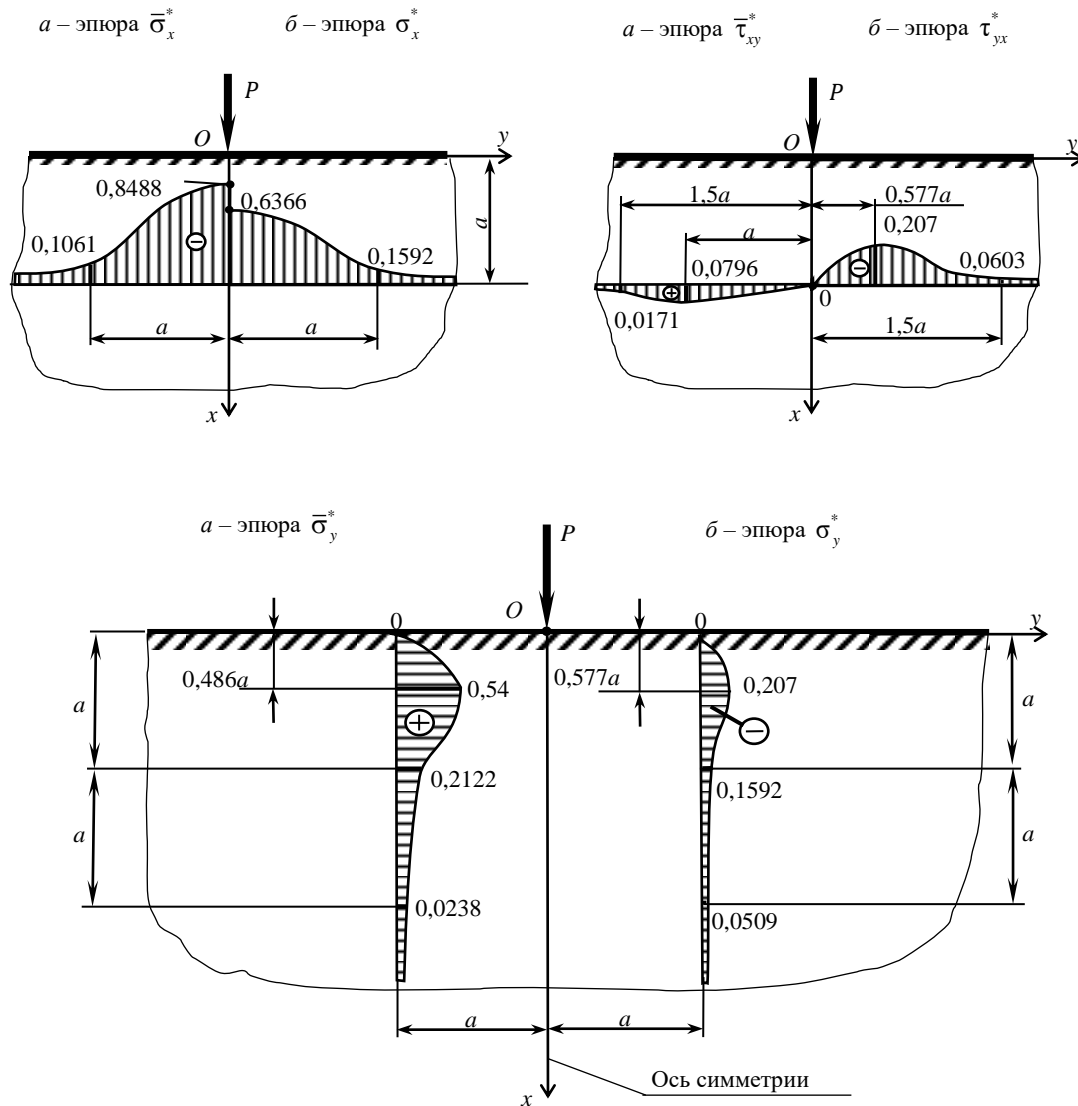


Рис. 7. Эпюры безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_x^*$, σ_x^* , $\bar{\tau}_{xy}^*$, τ_{yx}^* , $\bar{\sigma}_y^*$, σ_y^* в виде соответствующих размерных характеристик, умноженных на $a \cdot P^{-1}$: a – по уточненной физико-математической модификации (38)–(40); $б$ – в соответствии с формулами (41), базирующимися на фундаментальном решении Фламана (1)

Fig. 7. $\bar{\sigma}_x^*$, σ_x^* , $\bar{\tau}_{xy}^*$, τ_{yx}^* , $\bar{\sigma}_y^*$, σ_y^* dimensionless stress epures in the form of the corresponding dimensional characteristics multiplied by $a \cdot P^{-1}$: a – on the refined physical and mathematical modification (38)–(40); b – according to the formulas (41) based on Flamant fundamental solution (1)

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{\varepsilon}_\theta(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}}{r}, \quad (52)$$

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(r, \theta) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}, \quad (53)$$

связывающими относительные деформации $\bar{\varepsilon}_r$, $\bar{\varepsilon}_\theta$, $\bar{\gamma}$ с функциями $\bar{u} = \bar{u}(r, \theta)$, $\bar{v} = \bar{v}(r, \theta)$;

- зависимостями закона Гука для плоской деформации

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{\varepsilon}_z(r, \theta) = 0 \quad (54)$$

в классической интерпретации [8–12]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \bar{\sigma}_z(r, \theta) = \mu \cdot (\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta) = \\ &= \frac{4 \cdot P \cdot a^2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \cos \theta - 4 \cdot \cos^3 \theta)}{3 \cdot \pi \cdot r^3}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r &= \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \left(\bar{\sigma}_r - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot \bar{\sigma}_\theta \right) = \\ &= \frac{4 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \cdot \frac{[3 \cdot (1 - \mu) \cdot \cos \theta - (5 - 4 \cdot \mu) \cdot \cos^3 \theta]}{r^3}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\theta &= \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \left(\bar{\sigma}_\theta - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot \bar{\sigma}_r \right) = \\ &= \frac{4 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \cdot \frac{[(1 + 4 \cdot \mu) \cdot \cos^3 \theta - 3 \cdot \mu \cdot \cos \theta]}{r^3}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} \cdot \tau = \frac{8 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{\pi \cdot E} \cdot \frac{(\sin \theta - \sin^3 \theta)}{r^3}; \quad (58)$$

где $\bar{\sigma}_z$ – нормальное напряжение по направлению оси z (см. рис. 1).

Путем совместного рассмотрения формул (51), (52), (56), (57) получаем систему неоднородных дифференциальных уравнений относительно перемещений \bar{u} и \bar{v} [7, 17, 23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} &= \frac{4 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \times \\ &\times \frac{[3 \cdot (1 - \mu) \cdot \cos \theta - (5 - 4 \cdot \mu) \cdot \cos^3 \theta]}{r^3}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{u} &= \frac{4 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \times \\ &\times \frac{[(1 + 4 \cdot \mu) \cdot \cos^3 \theta - 3 \cdot \mu \cdot \cos \theta]}{r^2}, \end{aligned} \quad (60)$$

откуда, после интегрирования [22, 25],

$$\bar{u} = \bar{u}(r, \theta) = -\frac{2 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \times$$

$$\times \frac{[3 \cdot (1 - \mu) \cdot \cos \theta - (5 - 4 \cdot \mu) \cdot \cos^3 \theta]}{r^2} + \zeta(\theta), \quad (61)$$

$$\bar{v} = \bar{v}(r, \theta) = \frac{2 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \times$$

$$\times \frac{[3 \cdot \mu \cdot \sin \theta + (1 - 4 \cdot \mu) \cdot \sin^3 \theta]}{r^2} - \int \zeta(\theta) \cdot d\theta + \xi(r); \quad (62)$$

где из очевидных кинематических условий задачи

$$\bar{u}(\infty, \theta) = 0, \quad \bar{v}(r, 0) = 0 \quad (63)$$

следует принять при $r \rightarrow \infty$ и $\theta = 0$ (см. рис. 1)

$$\zeta(\theta) = \xi(r) = 0. \quad (64)$$

Выражения (61), (62) с учетом (64) подставляем в третье физико-геометрическое равенство правых частей соотношений (53) и (58), которое соблюдается тождественно.

Наличие аргумента r^2 в знаменателе гиперболических зависимостей (61), (62) гарантирует выполнение необходимых пределов

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{u}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{v}(r, \theta) = 0 \quad (65)$$

при нулевых значениях (64) произвольных переменных интегрирования $\zeta(\theta), \xi(r)$ для всех точек упругодеформируемого материала рис. 1, аналогичных трехмерной модели Буссинеска (14), (15) [7, 14, 15] (см. рис. 2). В итоге полностью исключаются вышеуказанные противоречия (13) двумерного процесса Фламана [7–12], касающиеся полученных (61), (62) функциональных параметров $\bar{u} = \bar{u}(r, \theta)$, $\bar{v} = \bar{v}(r, \theta)$ в ходе решения данной плоской задачи.

Воспользовавшись соотношениями (36) между переменными r, θ и x, y , выражаем деформационные характеристики (61), (62), учитывая (64), через декартовы аргументы x, y (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{u}(x, y) &= -\frac{2 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \times \\ &\times \frac{x \cdot [3 \cdot (1 - \mu) \cdot y^2 - (2 - \mu) \cdot x^2]}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = \bar{v}(x, y) &= \frac{2 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 + \mu)}{3 \cdot \pi \cdot E} \times \\ &\times \frac{y \cdot [3 \cdot \mu \cdot x^2 + y^2 (1 - \mu)]}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (67)$$

Полагая в (66), (67) $x = 0$, находим горизонтальное \bar{u}_Γ и вертикальное \bar{v}_Γ перемещения границы полуплоскости:

$$\bar{u}_r = \bar{u}(0, y) = 0, \quad (68)$$

$$\bar{v}_r = \bar{v}_r(0, y) = \frac{2 \cdot P \cdot a^2 \cdot (1 - \mu^2)}{3 \cdot \pi \cdot E} \cdot \left(\frac{1}{y^2} \right). \quad (69)$$

Правомерность расчета $\bar{u}_r = 0$ (см. (68)) можно обосновать тем, что в инженерно-технических задачах, например контактных [1–3, 18, 19, 27, 28], на действие поперечной эквивалентной силы $P \perp y$ при малых смещениях решающее влияние оказывает функциональный параметр $\bar{v}_r = \bar{v}_r(y)$, а компонента $\bar{u}_r \ll \bar{v}_r$ не принимается во внимание.

В связи с неопределенностью (произвольностью) координаты $r_k = |y| = l \gg a$ закрепленной точки K (см. рис. 1) невозможно количественно сопоставить неправильное решение (10) [2, 7, 9, 17] и новый результат (69), однако в качественном отношении такую сравнительную оценку сделать вполне реально, и это показано на рис. 8, графики которого построены по безразмерным формулам

$$v_r^* = v_r(|y|) \cdot \frac{\pi \cdot E}{2 \cdot P \cdot (1 - \mu^2)} = \ln \frac{6 \cdot a}{|y|}, \quad (70)$$

$$\bar{v}_r^* = \bar{v}_r(y) \cdot \frac{\pi \cdot E}{2 \cdot P \cdot (1 - \mu^2)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{y} \right)^2, \quad (71)$$

адекватным выражениям (10), (69), и по численным данным табл. 1.

Таблица 1

Значения функций (70) (71) при $r = |y| \geq 0, l = 6a$

Table 1

Functions value (70) (71) at $r = |y| \geq 0, l = 6a$

$r = y $	0	a	$2a$	$4a$	$6a$	$8a$	$10a$	∞
v_r^*	∞	1,7918	1,0986	0,4055	0	-0,2877	-0,5108	$-\infty$
\bar{v}_r^*	∞	0,3333	0,0833	0,0208	0,0093	0,0052	0,0033	0

Из сравнения выражений (10) и (69) также следует, во-первых, полная определенность в знаке гиперболической функции $\bar{v}_r(y) \geq 0$, в отличие от логарифмической зависимости (10), вследствие четности $\bar{v}_r(y)$ по переменной y^2 при направлении смещения $\bar{v}_r > 0$ в сторону увеличения координаты x , а во-вторых – тот очевидный факт, что некорректная формула (10) аппроксимирует только относительную величину $v_r(|y|)$ на замкнутом интервале $-l \leq y \leq l$, в отличие от уточненной квадратичной гиперболы (69), позволяющей определять абсолютную осадку границы $x = 0$ полуплоскости без привязки к точке K (см. рис. 1, 8) в неограниченном теоретически диапазоне $-\infty \leq y \leq \infty$.

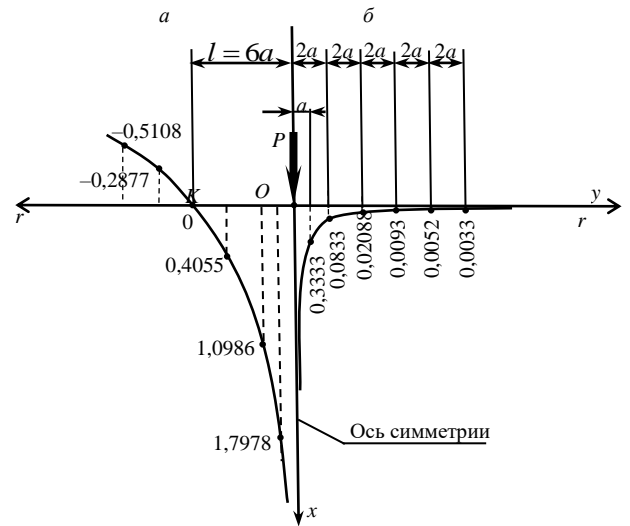


Рис. 8. Общий характер изменения функциональных зависимостей (10) и (69) в безразмерных интерпретациях (70) и (71): a – из решения Фламана [9, 10–12] при $l = 6a$; b – по выведенной формуле (71) на основе (69)

Fig. 8. General nature of changes in functional dependencies (10) and (69) in dimensionless interpretations (70) and (71): a – from Flaman solution [9, 10–12] at $l = 6a$; b – according to the derived formula (71) based on (69)

Далее переходим к определению реактивного давления $\bar{q} = \bar{q}(y)$ и соответствующей ему упругой осадки S ленточного фундамента [1, 3–6] с шириной подошвы $2a$ (жесткого штампа) из решения классической контактной задачи [7, 10–12, 19, 20], основу которой, в соответствии с формулой (69), представляет новое неоднородное интегральное уравнение Фредгольма первого рода [10, 11, 30, 31] (рис. 9)

$$-\frac{2 \cdot a^2 \cdot (1 - \mu^2)}{3 \cdot \pi \cdot E} \cdot \int_{-a}^a \frac{\bar{q}(y) \cdot dy}{(t - y)^2} = f(t) = S = \text{const}, \quad (72)$$

где $\bar{q} = \bar{q}(y)$ – искомая силовая функция в виде реакции полуплоскости на участке

$$-a \leq y \leq a, \quad (73)$$

приводимая к известной равнодействующей P , согласно условию равновесия [10, 11, 17–19]

$$\int_{-a}^a \bar{q}(y) \cdot dy = P \quad (74)$$

при допущении, что сила P проходит через середину фундамента (см. рис. 9); t – вспомогательная переменная, изменяющаяся в пределах $-a \leq t \leq a$ и представляющая собой координату произвольной точки A , вертикальное перемещение которой от элементарной нагрузки

$$dP = \bar{q}(y) \cdot dy \quad (75)$$

составляет (см. (69) и (72))

$$d\bar{v}_T = -\frac{2 \cdot a^2 \cdot (1 - \mu^2)}{3 \cdot \pi \cdot E} \cdot \frac{\bar{q}(y) \cdot dy}{(t - y)^2} \quad (76)$$

с учетом обоснованного практикой допущения [1, 4, 5] об отсутствии касательных напряжений $\bar{\tau}_{xy}$ (сил трения) на жесткой прямолинейной границе $x + S$, когда заданная функциональная зависимость $f(t)$ [30] равна осадке $S = \text{const}$ фундамента (рис. 9 и формула (72)).

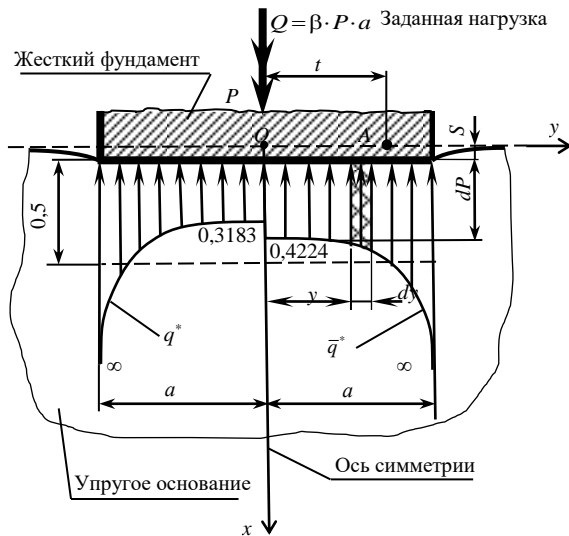


Рис. 9. Расчетно-графическая модель контактной задачи
Fig. 9. Computational and graphical model of the contact problem

В отличие от абстрактно-идеализированного оригинала (69), в котором направления силы P и перемещения $\bar{v}_T > 0$ совпадают (см. рис. 8), в формулах (72), (76) знак «минус» указывает на противоположность действия контактного давления $\bar{q}(y)$ – вверх и кинетической характеристики $\bar{v}_T > 0$ – вниз (см. рис. 9).

Уравнение (72) решаем обратным методом [27, 30, 31], руководствуясь экспериментальными данными [1, 5, 6], показывающими, что реактивная нагрузка $q(y)$ распределяется неравномерно по подошве жесткого фундамента (штампа), увеличиваясь теоретически до бесконечности по краям $y = \pm a$ и понижаясь к центру поверхности контакта (см. рис. 9). Основываясь на опытных результатах [1, 3–6] и после многократных проверок различных функций, аппроксимируем контактное давление $q(y)$ следующей аналитической зависимостью:

$$\bar{q} = \bar{q}(y) = C \cdot \left(\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right), \quad (77)$$

где C – постоянный коэффициент.

Вычисляем константу C из равенства (74) с использованием справочных таблиц [25]:

$$C \int_{-a}^a \left(\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right) \cdot dx =$$

$$= C \cdot \left(\frac{y \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{y}{a} + a^2 \cdot \arcsin \frac{y}{a} \right) \Big|_{-a}^a =$$

$$= C \cdot \frac{3 \cdot \pi \cdot a^2}{2} = P, \quad (78)$$

т.е.

$$C = \frac{2 \cdot P}{3 \cdot \pi \cdot a^2}. \quad (79)$$

Подставляя $\bar{q}(y)$ в соответствии с (77), (79) в исходное уравнение (72), получаем, раскрывая необходимые для этой процедуры интегралы [22, 25]:

$$\bar{q}(y) = \frac{2 \cdot P}{3 \cdot \pi \cdot a^2} \cdot \left(\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right), \quad -a \leq y \leq a; \quad (80)$$

$$S = -\frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} \cdot \int_{-a}^a \left[\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{(t - y)^2} + \frac{a^2}{(t - y)^2 \cdot \sqrt{a^2 - y^2}} \right] \cdot dy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Замена переменной } y: \\ t - y = w, \Rightarrow \\ y = t - w, \\ dy = -dw \end{array} \right] = \frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} \times$$

$$\times \left(\int \frac{\sqrt{-w^2 + 2 \cdot t \cdot w + a^2 - t^2}}{w^2} dw + \right.$$

$$\left. + a^2 \cdot \int \frac{dw}{w^2 \sqrt{-w^2 + 2 \cdot t \cdot w + a^2 - t^2}} \right) =$$

$$= \frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} \times$$

$$\times \left[-\frac{(2 \cdot a^2 - t^2) \cdot \sqrt{-w^2 + 2 \cdot t \cdot w + a^2 - t^2}}{w \cdot (a^2 - t^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^3}{(a^2 - t^2) \cdot \sqrt{a^2 - t^2}} \right] \times$$

$$\times \ln \left| \frac{2 \cdot t \cdot w + 2 \cdot (a^2 - t^2) + 2 \cdot \sqrt{a^2 - t^2} \cdot \sqrt{-w^2 + 2 \cdot t \cdot w + a^2 - t^2}}{w} \right| +$$

$$+ \arcsin \frac{-2 \cdot w + 2 \cdot t}{\sqrt{4 \cdot t^2 + 4 \cdot (a^2 - t^2)}} \Big] =$$

$$= \frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} \cdot \left[\arcsin \frac{-2 \cdot t + 2 \cdot y + 2 \cdot t}{\sqrt{4 \cdot t^2 + 4 \cdot a^2 - 4 \cdot t^2}} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(2 \cdot a^2 - t^2) \cdot \sqrt{-t^2 + 2 \cdot t \cdot y - y^2 + 2 \cdot t^2 - 2 \cdot t \cdot y + a^2 - t^2}}{(t - y) \cdot (a^2 - t^2)} + \\
 & + \frac{t^3}{(a^2 - t^2) \cdot \sqrt{a^2 - t^2}} \times \\
 & \times \ln \left| \frac{2 \cdot t^2 - 2 \cdot t \cdot y + 2 \cdot a^2 - 2 \cdot t^2 + 2 \cdot \sqrt{a^2 - t^2} \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}{t - y} \right|_{-a}^a + \\
 & + \frac{t^3}{(a^2 - t^2) \cdot \sqrt{a^2 - t^2}} \times \\
 & \times \ln \left| \frac{2 \cdot t^2 - 2 \cdot t \cdot y + 2 \cdot a^2 - 2 \cdot t^2 + 2 \cdot \sqrt{a^2 - t^2} \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}{t - y} \right|_{-a}^a = \\
 & = \frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} \cdot \left[\arcsin \frac{y}{a} - \frac{(2 \cdot a^2 - t^2) \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}{(t - y) \cdot (a^2 - t^2)} + \right. \\
 & \left. + \frac{t^3}{(a^2 - t^2) \cdot \sqrt{a^2 - t^2}} \times \right. \\
 & \left. \times \ln \left| \frac{-2 \cdot t \cdot y + 2 \cdot a^2 + 2 \cdot \sqrt{a^2 - t^2} \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}{t - y} \right|_{-a}^a \right] = \\
 & = \frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} \times \\
 & \times \left[\pi + \frac{t^3}{(a^2 - t^2) \cdot \sqrt{a^2 - t^2}} \cdot \ln \left| \frac{(-t + a) \cdot a \cdot (t + a)}{(t - a) \cdot a \cdot (t + a)} \right| \right] = \\
 & = \frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} \cdot \left[\pi + \frac{t^3}{(a^2 - t^2) \cdot \sqrt{a^2 - t^2}} \cdot \ln | -1 | \right], \quad (81)
 \end{aligned}$$

откуда будем иметь

$$S = \frac{4 \cdot (1 - \mu^2) \cdot P}{9 \cdot \pi^2 \cdot E} = \text{const}, \quad (82)$$

что подтверждает правильность подобранной функциональной зависимости (80), являющейся точным решением интегрального уравнения (72), когда $P = \text{const}$ (см. рис. 1), а ширина подошвы фундамента $2a$ и ее проектная длина L находятся в соотношении $L(2a)^{-1} \geq 10$ [1, 4–6], обеспечивающем адекватность и механикоматематическую корректность использованной здесь расчетной схемы плоского деформированного состояния (32)–(34), (38)–(40), (54)–(58).

Представляет практический интерес оценка предложенной уточненной аппроксимирующей формулы (80) с точки зрения ее сопоставимости с классическим результатом С.А. Чаплыгина и М. Садовского [7, 8, 11]

$$q = q(y) = \frac{P}{\pi \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}, \quad -a \leq y \leq a, \quad (83)$$

полученным на основе логарифмической зависимости (10), базирующейся на упрощенной модели Фламанна [7–11] простого радиального напряженного состояния (1) (см. рис. 1). Итоги этого сравнения приведены в табл. 2 и на эпюрах рис. 9 в безразмерной модификации

$$\bar{q}^* = \bar{q} \cdot \frac{a}{P} = \frac{2}{3 \cdot \pi} \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}} \right), \quad (84)$$

$$q^* = q \cdot \frac{a}{P} = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}, \quad -a \leq y \leq a. \quad (85)$$

Таблица 2

Численная информация к построению эпюр реактивных давлений

Table 2

Numerical information to plot the reactive pressure epure

y	0	±0,2a	±0,4a	±0,6a	±0,8a	±0,9a	±a
\bar{q}^*	0,4244	0,4245	0,426	0,435	0,481	0,5793	∞
q^*	0,3183	0,3249	0,3473	0,3979	0,5305	0,7302	∞

Приводим также характерные величины реактивных распределенных сил, согласно выражениям (84), (85) (см. рис. 9):

– минимальные давления в центре «O» площадки контакта при $y = 0$

$$\bar{q}_{\min} = 0,4224 \cdot \frac{P}{a}, \quad q_{\min} = 0,3183 \cdot \frac{P}{a}; \quad (86)$$

– средние значения

$$\bar{q}_{\text{cp}} = q_{\text{cp}} = 0,5 \cdot \frac{P}{a}. \quad (87)$$

В обоих случаях (84) и (85) мы имеем для угловых точек $y = \pm a$ (см. табл. 2 и рис. 9)

$$\bar{q}(\pm a) = q(\pm a) = \infty. \quad (88)$$

Совершенно очевидна зависимость осадки S от линейного размера $2a$. Для учета этого параметра в соотношении (82) отметим прежде всего тот факт, что в условиях плоской деформации (54)–(58) теоретическая длина линейно-полосовой сосредоточенной силы P равна бесконечности по направлению координаты $z \leq \infty$ (см. рис. 1). Вследствие этой особенности вводим в решение поставленной контактной задачи общую известную рабочую нагрузку Q на фундамент, распределяя ее равномерно по реальной длине $L = \beta \cdot a$ его подошвы (см. рис. 1 и 9):

$$dQ = P \cdot dz, Q = P \cdot \int_0^L dz = P \cdot L, \Rightarrow P = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{\beta \cdot a}, \quad (89)$$

где $\beta \geq 20$ – параметр, учитывающий необходимую для реализации плоской деформации фактическую разницу между продольным L и поперечным $2a$ размерами контактной поверхности [1, 3–6], о чем уже было отмечено ранее в пояснении к зависимости (82); с другой стороны, произведение $Q \cdot \beta^{-1}$ можно считать частью нагрузки Q , действующей на элемент штампа с площадью основания $2a \times a$.

С учетом (89) формула (82) приобретает необходимый окончательный вид

$$S = S(a) = \frac{4 \cdot Q \cdot (1 - \mu^2)}{9 \cdot \pi \cdot E \cdot \beta \cdot a}, \quad (90)$$

и при этом в случае $a \rightarrow 0$ абсолютная деформация грунта $S \rightarrow \infty$ при фиксированной нагрузке Q . В этой же связи с увеличением a , т.е. ширины граничной плоскости $x=0$ (см. рис. 1), осадка S будет уменьшаться, что реально и конструктивно обосновано.

За пределами фундамента (см. рис. 9) на интервале $-a > y > a$, по аналогии с базовой квадратичной функцией (69), его вертикальное перемещение S_y может быть аппроксимировано гиперболической зависимостью

$$S_y = S_y(y) = S \cdot \frac{a^2}{y^2}. \quad (91)$$

Естественно, что когда $y = \pm a$,

$$S_y = S = \frac{4 \cdot Q \cdot (1 - \mu^2)}{9 \cdot \pi \cdot E \cdot \beta \cdot a}, \quad (92)$$

а если $y \rightarrow \pm\infty$, то $S_y(\pm\infty) \rightarrow 0$; например, уже на расстоянии $y = \pm 5a$ и $y = \pm 10a$ будем иметь соответственно: $S_y(\pm 5a) = 0,04 \cdot S$ и $S_y(\pm 10a) = 0,01S$.

Комплексный анализ проведенных исследований позволяет сделать следующие выводы:

1. Представленное в данной фундаментально-прикладной работе усовершенствованное инновационное решение известной многофункциональной классической задачи Фламана [7–13, 27–29] является принципиально новым и уточненным по существу, так как учитывает три напряжения $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\tau}$, в сравнении с одной компонентой σ_r в [7–11], а также дополнительный параметр $2a$, характеризующий ширину малой площадки распределения ло-

кальной нагрузки P , действующей по направлению нормали к границе полуплоскости (см. рис. 1).

2. Доказано существование цилиндрических поверхностей, где растягивающие тангенциальные напряжения $\bar{\sigma}_\theta = \text{const} > 0$ (35) остаются постоянными на круговых образующих – изобарах (см. рис. 5). Аналогичные окружности Буссинеска [8, 11, 14, 27, 29] в виде сжимающих радиальных напряжений $\bar{\sigma}_r = \text{const} < 0$ (7) выявлены и подтверждены экспериментально-теоретически (см. рис. 1) в упрощенной модели Фламана [28].

3. На основе классической модификации плоской линейно-упругой деформации (54)–(58) выведены формулы функций перемещений (61), (62), (66)–(69), не имеющие противоречий – парадокса (13) [7, 11, 12, 17], вследствие равенства нулю, когда радиальная переменная r стремится к бесконечности, что свидетельствует о их корректности и адекватности с физико-механической точки зрения (см. рис. 8).

4. Получено точное решение (80), (90), (91) фундаментально-прикладной контактной задачи теории упругости о взаимодействии бесконечно длинного жесткого штампа с прямолинейной границей $x=0$ деформируемого однородного полупространства (см. рис. 9), материал которого подчиняется обобщенному закону Гука (55)–(58). В отличие от существующего типового решения (1), (9), (10), предложенная механико-математическая модель (32)–(44) позволяет определять не только реакцию основания (80), но и абсолютные вертикальные перемещения (90), (91) (а не идеализированное относительное (10) [17–20] с привязкой к произвольно расположенной точке K (см. рис. 1)) поверхности контакта в неограниченном диапазоне изменения переменной $-\infty \leq y \leq \infty$ (см. рис. 9). С помощью существующих методик и алгоритмов [7, 8, 17–20] можно вычислить только контактные усилия, но не граничные перемещения края полуплоскости [19], где $x=0$ (см. рис. 1 и 9).

5. Результаты разработанной физико-математической модели, доведенные до расчетных аналитических зависимостей (38)–(40), (90), (91) в декартовых координатах x , y (рис. 6) и проиллюстрированные соответствующими характерными эпюрами (см. рис. 7 и 9), возможно непосредственно использовать для уточненной оценки напряженно-деформированного состояния оснований жестких длинных (ленточных) фундаментов и их упругой осадки [1–6], а также при решении специальных задач [12, 13, 18–20], возникающих в процессе проектирования разнообразных контактирующих деталей и конструкций, применяемых в современном машиностроении [2, 15, 26, 32] и строительстве [1–6, 33].

Библиографический список

1. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты (включая специальный курс инженерной геологии): учебник. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань-Трейд, 2012. – 416 с.
2. Справочник проектировщика: расчетно-теоретический / под ред. д-ра техн. наук, профессора А.А. Уманского. – М.: Госстройиздат, 1960. – 104 с.
3. Леденев В.В. Несущая способность и деформативность оснований и фундаментов при сложных силовых воздействиях: монография. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2015. – 324 с.
4. Механика грунтов, основания и фундаменты: учебник / Л.Н. Шутенко, А.Г. Рудь, О.В. Кипаева [и др.]; под ред. д-ра техн. наук, профессора Л.Н. Шутенко. – Харьков: Изд-во ХНУГХ им. А.Н. Бекетова, 2015. – 501 с.
5. Пилягин А.В. Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений: Электронный курс. – М.: Изд-во АСВ, 2017. – 398 с.
6. Федюлов В.К., Артемова Л.Ю. Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений: учеб. пособие. – М.: МАДИ, 2015. – 84 с.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М.И. Рейтмана, под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
8. Киселев В.А. Плоская задача теории упругости: учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1976. – 151 с.
9. Flamant A. Sur la repartition des pressions dans un solide rectangulaire charge transversement // Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences. – 1892. – Tome 114, 1 Semestre. – № 22. – P. 1465–1468.
10. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
11. Шарафутдинов Г.З. Некоторые плоские задачи теории упругости: монография. – М.: Научный мир, 2014. – 464 с.
12. Сапунов В.Т. Задачи прикладной теории упругости: учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во Нац. исслед. ядер. ун-та «Моск. инж.-физ. ин-т», 2011. – 208 с.
13. Тен Ен Со. Решение задач теории упругости с применением Mathcad 14.0: учеб. пособие. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеанск. гос. ун-та, 2010. – 75 с.
14. Boussinesq J. Application des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elasticques. Gauthier – Villars, Paris 1885.
15. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман [и др.]; под ред. д.т.н., проф. С.Д. Пономарева. – Т. II. – М.: Машгиз, 1958. – 975 с.
16. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопrotивление материалов: учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
17. Рындин Н.И. Краткий курс теории упругости и пластичности. – Л.: Ленинградский университет, 1974. – 136 с.
18. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
19. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
20. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости: монография. – М.: Физматлит, 2004. – 299 с.
21. Жемочкин Б.М. Теория упругости. – М.: Госстройиздат, 1957. – 256 с.
22. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., испр. – М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
23. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.Н. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
24. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / пер. с нем. С.В. Фомина. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
25. Смолянский М.Л. Таблицы неопределенных интегралов. – М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 112 с.
26. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
27. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1970. – 288 с.
28. Безухов Н.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
29. Сопrotивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 568 с.
30. Цяф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справ. руководство. – М.: Наука, 1970. – 192 с.
31. Демидович Б.Г., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
32. Искрицкий Д.Е. Строительная механика элементов машин. – Л.: Судостроение, 1970. – 448 с.
33. Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании: учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1973. – 431 с.

References

1. Dalmatov B.I. Mekhanika gruntov, osnovaniia i fundamenti (vkluchaia spetsial'nyi kurs inzhenernoi geologii) : Uchebnik, 3-e izd [Soil mechanics, foundations (including a special course in Engineering Geology): Textbook, 3rd ed.]. *Sankt-Peterburg: Izd-vo «Lan'-Treid»*, 2012, 415 p.
2. Spravochnik proektirovshchika: Raschetno-teoreticheskii/ Pod red. doktora tekhn. nauk, professora A.A. Umanskogo [Handbook of the designer: Calculation and theoretical/Under supervision of Dr. Techn. Sciences, professor A.A. Umanskiy]. *Moscow, Gosstroizdat*, 1960, 104 p.
3. Ledenev V.V. Nesushchaia sposobnost' i deformativnost' osnovanii i fundamentov pri slozhnykh silovykh vozdeistviakh: Monografiia/ V.V. Ledenev [Bearing Capacity and Deformability of Bases and Foundations under complex force effects: Monograph]. *Tambov, Izd-vo FGBOU VPO «TGTU»*, 2015, 324 p.
4. Shutenko L.N., Rud' A.G., Kipaeva O.V. i dr. Mekhanika gruntov, osnovaniia i fundamenti: Uchebnik / Pod redaktsiei doktora tekhnicheskikh nauk, professora L.N. Shutenko [Soil Mechanics, Bases and Foundations: Textbook/ Under supervision of Dr. Techn. Sciences, professor]. *Khar'kov, Izd-vo KhNUGKh im. A.N. Beketova*, 2015, 501 p.
5. Piliagin A.V. Proektirovanie osnovanii i fundamentov zdaniy i sooruzhenii: Elektronnyi kurs [Design of the Bases and the Groundwork of Buildings and Structures: Electronic course]. *Moscow, Izd-vo ASV*, 2017, 398 p.
6. Fedulov V.K., Artemova L.Iu. Proektirovanie osnovanii i fundamentov zdaniy i sooruzhenii: Uchebnoe posobie [Design of

the Bases and the Groundwork of Buildings and Structures: Textbook]. *Moscow, MADI*, 2015, 84 p.

7. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1975, 576 p.

8. Kiselev V.A. Ploskaia zadacha teorii uprugosti. Ucheb. posobie dlia vuzov [The Plane Problem of Elasticity Theory. Textbook for higher schools]. *Moscow, Izd-vo Vysshaia shkola*, 1976, 151 p.

9. Flamant A. Sur la repartition des pressions dans un solide rectangulaire charge transversement. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1892, tome 114, 1 Semestre, № 25, pp. 1465-1468.

10. Lur'e A.I. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1970, 940 p.

11. Sharafutdinov G.Z. Nekotorye ploskie zadachi teorii uprugosti: Monografiia [Some Plane Problems of Elasticity Theory: Monograph]. *Moscow, Izd-vo «Nauchnyi mir»*, 2014, 464 p.

12. Salunov V.T. Zadachi prikladnoi teorii uprugosti: Uchebnoe posobie dlia vuzov [Problems of Applied Elasticity Theory: Textbook for universities]. *Moscow, Izd-vo Natsional'nogo issledovatel'skogo iadernogo universiteta «Moskovskii inzhenerno-fizicheskii institut»*, 2011, 208 p.

13. Ten En So. Reshenie zadach teorii uprugosti s primeneniem Mathcad 14.0: Uchebnoe posobie [The Solution of Elasticity Theory Problems Using Mathcad 14.0: Textbook]. *Khabarovsk: Izd-vo tikhookeanskogo gos. Universiteta*, 2010, 75 p.

14. Boussinesq J. Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. *Gauthier – Villars, Paris* 1885.

15. Ponomarev S.D., Biderman V.L. i dr. Raschet na prochnost' v mashinostroenii. Tom II / Pod red. d.t.n. prof. S.D. Ponomareva [Strength Calculations in Mechanical Engineering. Volume II/ Under supervision of Dr. Techn. Sciences, professor S.D. Ponomarev]. *Moscow, Mashgiz*, 1958, 975 p. (pp. 386-391, 460-467, 477-482).

16. Birger I.A., Mavliutov R.R. Soprotivlenie materialov: Uchebnoe posobie [Strength of Materials: Textbook]. *Moscow, Nauka*, 1986, 560 p.

17. Ryndin N.I. Kratkii kurs teorii uprugosti i plastichnosti [A Brief Course in the Theory of Elasticity and Plasticity]. *Leninograd, Leningradskii universitet*, 1974, 136 p.

18. Shtaerman I.F. Kontaktnaia zadacha teorii uprugosti [The contact problem of the theory of elasticity]. *Moscow, Leningrad, Gostekhizdat*, 1949, 270 p.

19. Galin L.A. Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i viazkoupругosti [Contact Problems of the Elasticity And Viscoelasticity Theory]. *Moscow, Nauka*, 1980, 304 p.

20. Aleksandrov V.M., Chebakov M.I. Analiticheskie metody v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti: Monografiia [Analytical

Methods in Contact Problems of Elasticity Theory: Monograph] *Moscow, Izd-vo «Fizanalit»*, 2004, 299 p.

21. Zhemochkin B.M. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Gosstroizdat*, 1957, 256 p.

22. Bronshtein I.N., Semendiaev K.A. Spravochnik po matematike dlia inzhenerov i uchashchikhsia vtuzov [A handbook on mathematics for engineers and students of technical colleges]. *Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury*, 1962, 608 p.

23. Koshliakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.N. Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki [Partial Differential Equations of Mathematical Physics.]. *Moscow, Izd-vo Vysshaia shkola*, 1970, 712 p.

24. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam / Per. s nem. S.V. Fomina [Handbook of Ordinary Differential Equations/Translation from Germany by S.V. Fomin]. *Moscow, Nauka*, 1976, 576 p.

25. Smolianskii M.L. Tablitsy neopredelennykh integralov [Tables of Indefinite Integrals]. *Moscow, Nauka*, 1965, 112 p.

26. Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. Raschet na prochnost' detalei mashin: Spravochnik [Calculation on Machines Parts Durability: Reference book]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1979, 702 p.

27. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the Elasticity and Plasticity Theory]. *Moscow, Izd-vo Vysshaia shkola*, 1970, 288 p.

28. Bezukhov N.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the Elasticity and Plasticity Theory]. *Moscow, Izd-vo Vysshaia shkola*, 1968, 512 p.

29. Vardanian G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti: Uchebnik pod. red. G.S. Vardanyana [Strength of Materials with the Basics of the Elasticity and Plasticity Theory: Textbook under supervision of G.S. Vardanyan] *Moscow, Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov (ASV)*, 1995, 568 p.

30. Tslaf L.D. Variatsionnoe ischislenie i integral'nye uravneniia: Spravochnoe rukovodstvo [Variation Calculation and Integral Equations: Reference Manual]. *Moscow, Nauka*, 1970, 192 p.

31. Demidovich B.G., Maron I.A., Shuvalova E.Z. Chislennye metody analiza [Analysis Numerical Methods]. *Moscow, Nauka*, 1967, 368 p.

32. Iskriiskii D. E. Stroitel'naia mekhanika elementov mashin [Construction Mechanics of Machine Elements]. *Leninograd, Izd-vo Sudostroenie*, 1970, 448 p.

33. Simvulidi I.A. Raschet inzhenernykh konstruktssii na uprugom osnovanii: Uchebnoe posobie dlia vuzov [Calculation of Engineering Structures on the Flexible Basis: Textbook for universities]. *Moscow, Izd-vo Vysshaia shkola*, 1973, 431 p.