



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.2.05

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ЗАМЕНЫ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ С ТОЧКАМИ ИЗЛОМА ГЛАДКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ НА СЛОЖНОСТЬ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И НАГРУЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гультаев

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 января 2020 г.
Принята: 15 июня 2020 г.
Опубликована: 30 июня 2020 г.

Ключевые слова:

пластичность, эксперимент, сложное нагружение, тонкостенный трубчатый образец, векторные и скалярные свойства материалов, гладкая траектория, траектория деформирования, кривизна.

АННОТАЦИЯ

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию влияния замены скруглениями угловых точек двузвенных ломаных траекторий деформирования при отображении процессов сложного нагружения при упругопластическом деформировании материалов. Замена угловых точек в их окрестности локальными участками окружностей позволяет неаналитическую траекторию заменить гладкой траекторией. Экспериментальные исследования выполнены на тонкостенных трубчатых образцах из материала сталь 3 на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ. Программы нагружения трубчатых образцов задавались в девиаторном пространстве деформаций А.А. Ильюшина. Рассмотрено скругление точки излома двузвенной траектории с ортогональным изломом дугами окружностей с кривизнами 200, 400, а также скругление точки излома двузвенной траектории с углом излома 135° дугами с кривизнами 400, 800. Представлены экспериментальные диаграммы, характеризующие векторные и скалярные свойства материала.

Показано, что влияние сложного нагружения на зависимость между напряжениями и деформациями при переходе на криволинейный участок проявляется не сразу. Для рассмотренного материала после точки начала скругления величина модуля вектора напряжений сначала возрастает, а затем с образованием «нырков» напряжений убывает. Точка минимума «нырка» находится на последующей прямолинейной части траектории деформирования. На участке скругления угол сближения возрастает, а на последующем прямолинейном участке – убывает и с ростом деформации стремится к нулю. Скорость уменьшения угла сближения мало зависит от различия в геометрии предшествующей траекторий деформирования. При деформировании по прямолинейному участку экспериментальные результаты для скругленных и нескругленных траекторий становятся мало отличимыми друг от друга. Таким образом, замена исходной неаналитической траектории на гладкую траекторию влияет на сложность процессов деформирования и нагружения материалов только в окрестности точки излома. Это обстоятельство можно учесть при численном моделировании процессов упругопластического деформирования материалов и интегрировании определяющих соотношений, заменяя неаналитические траектории гладкими.

© ПНИПУ

© Зубчанинов Владимир Георгиевич – д.т.н., проф., e-mail: vgz@rambler.ru, [ID: 0000-0001-9185-1027](https://orcid.org/0000-0001-9185-1027)

Алексеев Андрей Алексеевич – к.т.н., доц., e-mail: alexeew@bk.ru, [ID: 0000-0001-9336-1099](https://orcid.org/0000-0001-9336-1099)

Гультаев Вадим Иванович – д.т.н., доц., e-mail: vig0@mail.ru, [ID: 0000-0001-6872-4505](https://orcid.org/0000-0001-6872-4505)

Vladimir G. Zubchaninov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: vgz@rambler.ru, [ID: 0000-0001-9185-1027](https://orcid.org/0000-0001-9185-1027)

Andrey A. Alekseev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: alexeew@bk.ru, [ID: 0000-0001-9336-1099](https://orcid.org/0000-0001-9336-1099)

[ID: 0000-0001-9336-1099](https://orcid.org/0000-0001-9336-1099)

Vadim I. Gultyaev – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: vig0@mail.ru, [ID: 0000-0001-6872-4505](https://orcid.org/0000-0001-6872-4505)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



THE EFFECT OF REPLACING NON-ANALYTIC TRAJECTORIES WITH BREAK POINTS ON SMOOTH PATHS TO THE COMPLEXITY OF DEFORMATION AND LOADING PROCESSES OF MATERIALS

V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev

Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 January 2020
Accepted: 15 June 2020
Published: 30 June 2020

Keywords:

plasticity, experiment, complex loading, thin-walled tubular specimen, vector and scalar properties of materials, smooth trajectory, strain trajectory, curvature.

ABSTRACT

This article is devoted to an experimental study of the effect of rounding off corner points of two-link strain trajectories on complex loading processes during elastoplastic deformation of materials. Replacing corner points in their vicinity with local sections of circles allows a nonanalytic trajectory to be replaced with a smooth trajectory. Experimental studies were performed on thin-walled tubular specimens of the low-carbon steel St3 on an SN-EVM automated testing system. The loading programs for tubular specimens were set in the Ilyushin's deviatoric strain space. The rounding of the corner point of a two-link strain trajectory with an angle of 90° between the branches by arcs of circles with curvatures of 200, 400, as well as the rounding of the corner point of a two-link strain trajectory with an angle of 135° between the branches by arcs with curvatures of 400, 800 are considered. The experimental data characterizing the vector and scalar properties of the material are presented.

The experimental data show that the effect of complex loading on the relationship between stresses and strains in a curved section is not immediately apparent. In the curved section, the magnitude of the stress vector modulus first increases, and then decreases with the formation of stress dives. The minimum point of the stress dive is located on the next straight branch of the strain trajectory. In the curvilinear section, the angle of delay increases, and in the next straight branch it decreases, and with the increase of the strain it tends to be zero. The rate of decrease of the angle of delay depends little on the differences in the geometry of the previous history of strain trajectory. In the second straight branch, the experimental results for a smooth and original two-link strain trajectories become little distinguishable from each other. Thus, replacing the original non-analytical strain trajectory to a smooth trajectory affects the complexity of the process of deformation and loading of the materials only in the vicinity of the corner point. This circumstance can be taken into account when numerically modeling the processes of elastoplastic deformation of materials and integrating the defining relations, replacing nonanalytic trajectories with smooth ones. This can be taken into account in the numerical calculation of elastic-plastic deformation and integration of constitutive relations, replacing non-analytical strain trajectories by smooth ones.

© PNRPU

Введение

Экспериментальные исследования неупругого поведения материалов при непропорциональном нагружении и сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС) являются критерием оценки достоверности и установления границ применимости отдельных определяющих соотношений теории пластичности. Одной из наиболее общих и развивающихся на сегодняшний день феноменологических теорий пластичности является теория упругопластических процессов, предложенная А.А. Ильюшиным [1, 2]. Развитие положений и гипотез теории, а также макроэкспериментальные исследования их достоверности представлены работами А.А. Ильюшина [3–5], В.С. Ленского [6–10], А.М. Жукова [11–14], Р.А. Васина [15–20], Дао Зуй Бика [21–23], В.В. Москвитина [24], В.П. Дегтярева [25–26], А.С. Кравчука [27–29], В.И. Малого [30–31], И. Охаши [32–37], Ю.Н. Шевченко [38–41], В.Г. Зубчанинова [42–51] и других исследователей [52–62].

Проведенные в этих работах экспериментальные исследования используют предложенное А.А. Ильюши-

ным [1] векторное (геометрическое) представление процессов нагружения и деформирования в виде *образа процесса нагружения или деформирования*, включающего в себя траекторию, в каждой точке которой приписываются характеристики процесса: векторы напряжений, деформаций и их приращения, а также скалярные параметры (температура, среднее напряжение и деформация и др.) В соответствии с постулатом изотропии А.А. Ильюшина [2–4] связь между напряжениями и деформациями в теории процессов определяется скалярными и векторными свойствами материалов. Например, для плоских траекторий деформирования произвольной кривизны эта связь представлена в виде определяющих соотношений [42]:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{\mathbf{p}}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1 \sin \vartheta_1}{\sigma},$$

где s – длина дуги траектории деформирования;

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} = S_k \hat{\mathbf{i}}_k, \quad \bar{\boldsymbol{\vartheta}} = \vartheta \hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \vartheta_k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (k = 1, 3) \quad (2)$$

есть векторы напряжений и деформаций; $\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}$ – их единичные векторы; σ, ε – модули векторов; $\hat{p}_1 = d\bar{\varepsilon}/ds$ – единичный вектор, касательный к траектории деформирования в каждой ее точке;

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\sigma_{11} - \sigma_0), \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12},$$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathcal{E}_{11} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2} \mathcal{E}_{12} = \sqrt{2} \varepsilon_{12}$$
(3)

есть координаты векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, S_{ij}, \mathcal{E}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты тензоров и тензоров-девиаторов напряжений и деформаций; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$ – средние напряжение и деформация; $M_1, \frac{d\sigma}{ds}$ – функционалы процесса, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформирования: длины ее дуги s , кривизны κ_1 и углов излома \mathcal{G}_1^0 ; $\cos \mathcal{G}_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1$; \mathcal{G}_1 – угол сближения, который характеризует отклонение вектора $\bar{\sigma}$ от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке и отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования.

Постулат изотропии начально изотропных материалов описывает их векторные свойства при сложном деформировании по аналитическим траекториям. На практике процессы деформирования обычно реализуются по неаналитическим сложным траекториям, состоящим из ряда аналитических участков, границами которых являются точки их излома или точки смены кривизны. В этих точках в экспериментах наблюдаются нырки напряжений на диаграммах зависимостей между модулем напряжения и параметром прослеживания процесса $s(t)$ [42–51].

При неаналитических траекториях возникает проблема разбиения траектории на ряд аналитических участков, что усложняет численные расчеты. Замена угловых точек в их окрестностях локальными участками окружностей позволяет неаналитическую траекторию заменить гладкой траекторией. Данная работа посвящена экспериментальному исследованию влияния такой замены при отображении процессов деформирования при сложном нагружении и упругопластическом деформировании материалов. Ранее подобные эксперименты были выполнены японскими исследователями под руководством И. Охаши [32, 33] на тонкостенных трубчатых образцах из малоуглеродистой стали S10C и латуни VsBM2. Ими были рассмотрены двузвенные траектории с прямым углом излома, скругленным дугой окружности. В данной статье представлены результаты опытов на тонкостенных трубчатых образцах из стали 3 для траекторий с углами излома 90° и 135° .

1. Методика и программы эксперимента

Испытания проведены на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина. Комплекс состоит из нагружающей установки, реализующей трехпараметрическое воздействие на образец (осевое растяжение-сжатие, кручение и внутреннее давление), датчиков усилий и деформаций, измерительных преобразователей сигналов датчиков, управляющей ЭВМ с программным комплексом и блока управления. В качестве модели, исследуемой на комплексе СН-ЭВМ, применяется тонкостенный трубчатый образец, в стенках которого при достаточно большом отношении радиуса срединной поверхности к толщине стенки реализуется однородное плоское напряженное состояние. Программы испытаний реализовывались в девиаторном пространстве деформаций $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ (жесткое или кинематическое нагружение) при совместном действии на образцы осевой силы и крутящего момента. Процесс нагружения предполагался монотонным изотермическим, а деформации – малыми.

В первой серии опытов (рис. 1, а) реализовывалась деформация по двузвенной ломаной траектории с прямым углом излома (образец 1) и скругление точки излома дугой окружности (образцы 2, 3).

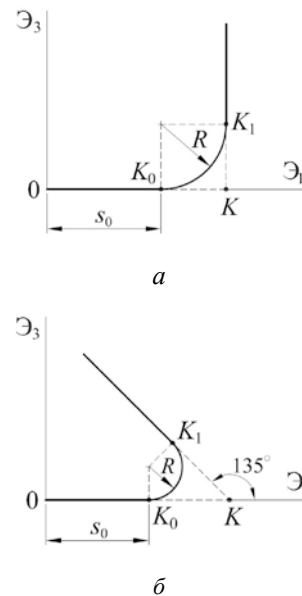


Рис. 1. Программы экспериментов при жестком нагружении на плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$: а – траектории с углом 90° , б – траектории с углом 135°

Fig. 1. Strain trajectories on the plane $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$: а – trajectories with angle 90° , б – trajectories with angle 135°

Образец 1 после предварительной осевой деформации растяжения до $s_0 = 2\%$ на первом прямолинейном участке, при изломе траектории в точке K на угол $\mathcal{G}_1^0 = 90^\circ$ на втором участке подвергался только дефор-

мации кручения по компоненте \mathcal{E}_3 при $\mathcal{E}_1 = \text{const}$. Траектория деформации образца 2 имела скругление прямого угла по дуге окружности K_0K_1 радиуса $R = 0,25\%$ с кривизной $\kappa_1 = 400$; длина первого участка $s_0 = 1,75\%$. Траектория деформации образца 3 при $s_0 = 1,5\%$ имела скругление прямого угла по дуге окружности K_0K_1 радиуса $R = 0,5\%$ с кривизной $\kappa_1 = 200$. После точки K_1 возрастала только деформация кручения \mathcal{E}_3 при $\mathcal{E}_1 = \text{const}$.

Во второй серии опытов (рис. 1, б) реализовывалась деформация по двузвенной ломаной траектории с углом излома 135° (образец 4) и аналогичное скругление точки излома дугой окружности (образцы 5, 6).

Образец 4 после предварительной осевой деформации растяжения до $s_0 = 2\%$ на первом прямолинейном участке, при изломе траектории в точке K на угол $\mathcal{E}_1^0 = 135^\circ$ на втором участке подвергался совместному кручению по \mathcal{E}_3 и сжатию по компоненте \mathcal{E}_1 . Траектория деформации образца 5 при $s_0 = 1,698\%$ имела скругление угла излома по дуге окружности K_0K_1 радиуса $R = 0,125\%$ с кривизной $\kappa_1 = 800$ при одновременном растяжении-сжатии по \mathcal{E}_1 и кручении по \mathcal{E}_3 до точки K_0 с координатами $\mathcal{E}_1 = 1,787\%$, $\mathcal{E}_3 = 0,213\%$. У образца 6 траектория деформации при $s_0 = 1,396\%$ имела скругление угла излома по дуге окружности K_0K_1 радиуса $R = 0,25\%$ с кривизной $\kappa_1 = 400$ до точки K_0 с координатами $\mathcal{E}_1 = 1,573\%$, $\mathcal{E}_3 = 0,427\%$.

Реализованные траектории со скруглением угла излома по терминологии А.А. Ильюшина являются гладкими, так как в местах перехода ее участков отсутствуют точки излома, но изменяется кривизна, т.е. у функций $\mathcal{E}(s)$, описывающих траекторию в линейном пространстве, первые производные непрерывны, а вторые терпят разрыв.

В качестве образцов использовались цилиндрические тонкостенные оболочки из стали 3 в состоянии поставки, которые имели толщину стенки $h = 1$ мм, радиус срединной поверхности поперечного сечения $r = 15,5$ мм и длину рабочей части $l = 110$ мм. Начальная изотропия материала образцов с достаточной степенью точности подтвердилась в базовых опытах при простом нагружении (растяжение, сжатие и кручение). При обработке результатов экспериментальных данных для определения компонент тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} использовались формулы [42]

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{r}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{r\psi}{2l}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{P}{2\pi r h}, \quad \sigma_{22} = q \frac{r}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 h}, \\ \sigma_{33} \approx 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \end{cases} \quad (5)$$

где Δl и Δr – приращения l и r ; ψ – угол поворота поперечного сечения; P – растягивающая осевая сила; q – внутреннее давление; M – крутящий момент; E – продольный модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; K – объемный модуль упругости. При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости ($\varepsilon_0 = 0$), достаточно точное вне упругой области, так как μ достаточно быстро стремился к значению 0,5. Координаты векторов деформаций и напряжений формоизменения определялись через компоненты тензоров по формулам (3). При обработке результатов экспериментальных исследований для определения угла сближения \mathcal{E}_1 вектора напряжений к касательной траектории деформирования для прямолинейных участков использовалось выражение

$$\cos \mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sigma \Delta s} \left[S_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^*) + S_3(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_3^*) \right], \quad (6)$$

где \mathcal{E}_1^* , \mathcal{E}_3^* – значения $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$ в начале каждого участка прямолинейной траектории. Для криволинейных участков

$$\cos \mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sigma} \left(S_1 \frac{(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_3^0)}{R} - S_3 \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1^0)}{R} \right), \quad (7)$$

где $\mathcal{E}_1^0, \mathcal{E}_3^0$ – координаты центра окружности.

2. Экспериментальные результаты

На рис. 2–6 представлены результаты испытания трубчатых образцов по программам с углом 90° (см. рис. 1, а).

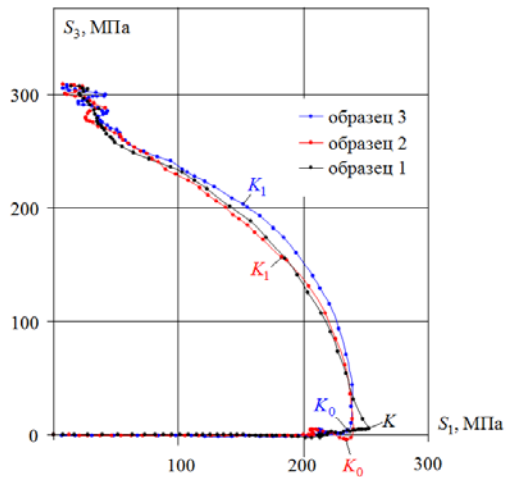


Рис. 2. Отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$

Fig. 2. Stress response on the plane $S_1 - S_3$

На рис. 2 представлен отклик в пространстве напряжений $S_1 - S_3$, на рис. 3 – диаграмма прослеживания процесса деформирования $\sigma - s$, характеризующая скалярные свойства материала, а на рис. 4 – диаграмма зависимости угла сближения от длины дуги траектории деформирования $\vartheta_1 - s$, характеризующая векторные свойства материала. На рис. 5, 6 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам $S_1 - \vartheta_1$ и чистого сдвига по компонентам $S_3 - \vartheta_3$.

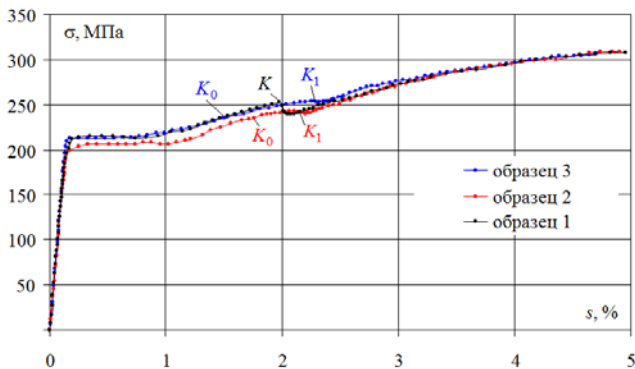


Рис. 3. Глобальная диаграмма деформирования $\sigma - s$

Fig. 3. The global chart of deformation $\sigma - s$

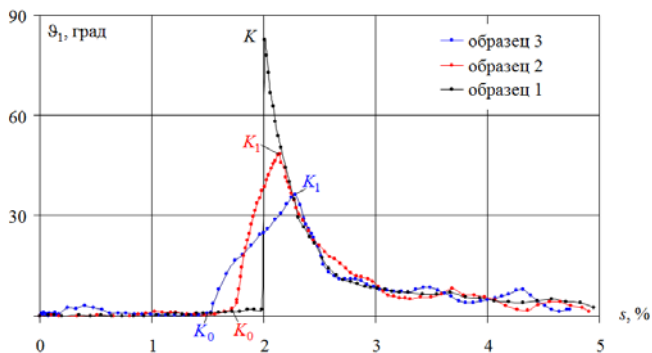


Рис. 4. Диаграмма характеристики векторных свойств материала $\vartheta_1 - s$

Fig. 4. The chart characterizing vector material properties $\vartheta_1 - s$

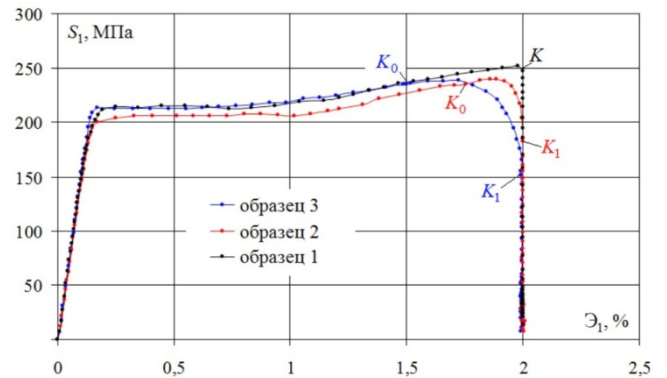


Рис. 5. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \vartheta_1$

Fig. 5. Local charts of deformation $S_1 - \vartheta_1$

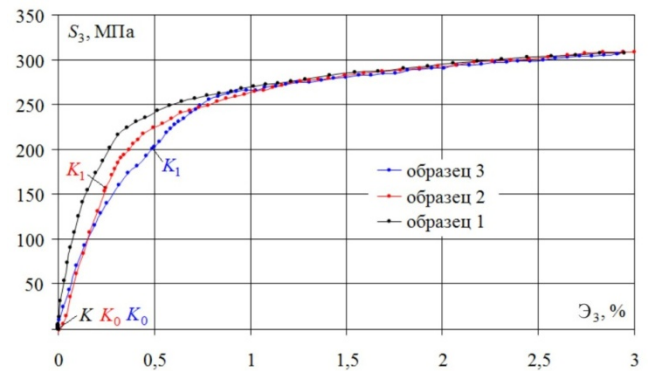


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \vartheta_3$

Fig. 6. Local charts of deformation $S_3 - \vartheta_3$

Результаты испытания трубчатых образцов по программам с углом 135° (рис. 1, б) представлены на рис. 7-12.

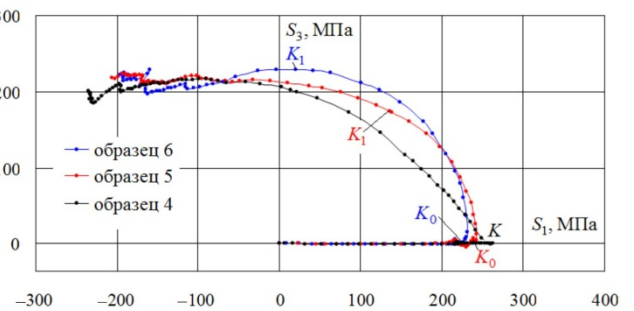


Рис. 7. Отклик по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$

Fig. 7. Stress response on the plane $S_1 - S_3$

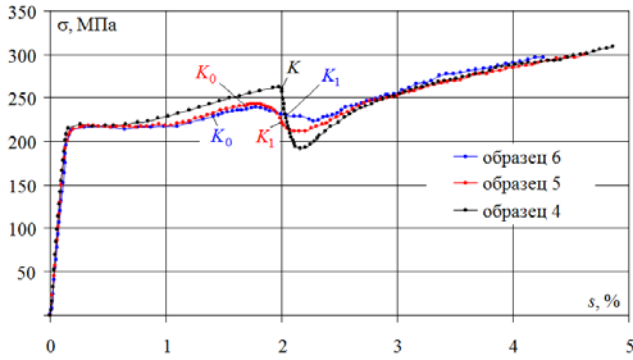


Рис. 8. Глобальная диаграмма деформирования $\sigma - s$

Fig. 8. The global chart of deformation $\sigma - s$

Влияние кривизны при скруглении точки излома на траекториях с углом 90° существенно проявляется по векторным свойствам (см. рис. 4) и на локальных диаграммах (см. рис. 5, 6). На траекториях с углом 135° влияние кривизны существенно проявляется по скалярным (см. рис. 8, 9) и векторным свойствам (см. рис. 10). Также при скруглении точки излома наряду с прямым нырком напряжений на диаграмме $\sigma - s$ (см. рис. 8) образуется обратный нырок на диаграмме $\sigma - \mathcal{E}$ (см. рис. 9).

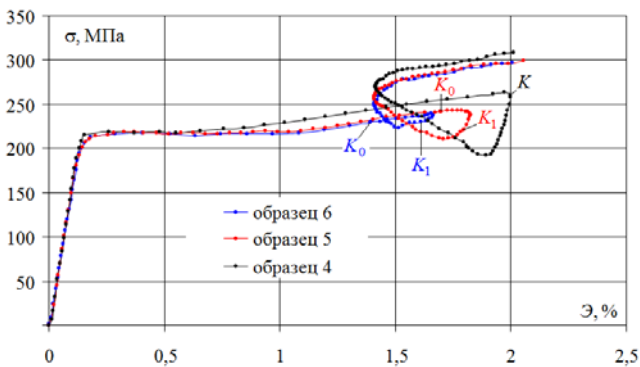


Рис. 9. Глобальная диаграмма деформирования $\sigma - \mathcal{E}$

Fig. 9. The global chart of deformation $\sigma - \mathcal{E}$

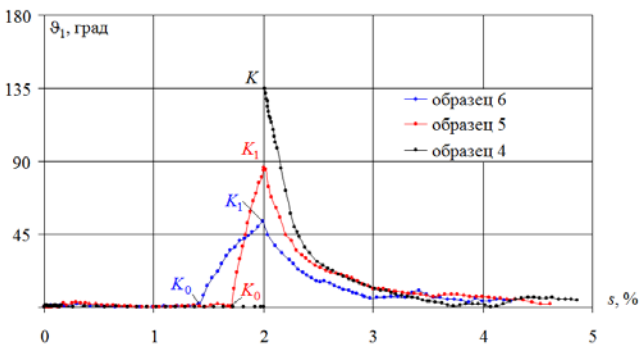


Рис. 10. Диаграмма характеристики векторных свойств материала $\varphi_1 - s$

Fig. 10. The chart characterizing vector material properties $\varphi_1 - s$

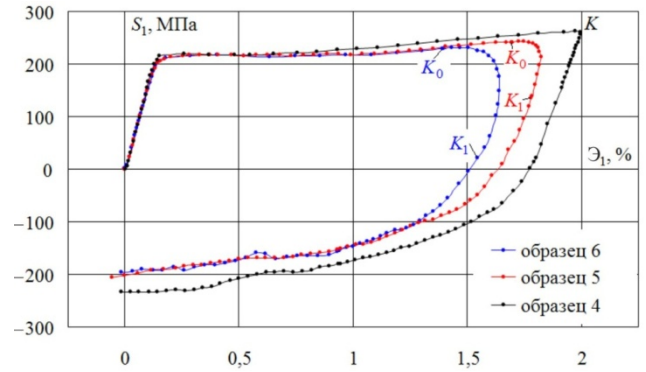


Рис. 11. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \mathcal{E}_1$

Fig. 11. The local chart of deformation $S_1 - \mathcal{E}_1$

Для оценки влияния кривизны траектории на величины нырков напряжений построены зависимости безразмерной величины $\tilde{\sigma} = \sigma / \sigma_T^K$, где σ_T^K – значение σ в точке скругления K_0 (или излома K), от приращения длины дуги траектории деформирования $\Delta s = s - s_0$ после начала скругления в точке K_0 (или излома K). На рис. 13 показаны эти зависимости $\tilde{\sigma} - \Delta s$ для траекторий с углом 90° , а на рис. 14 – с углом 135° .

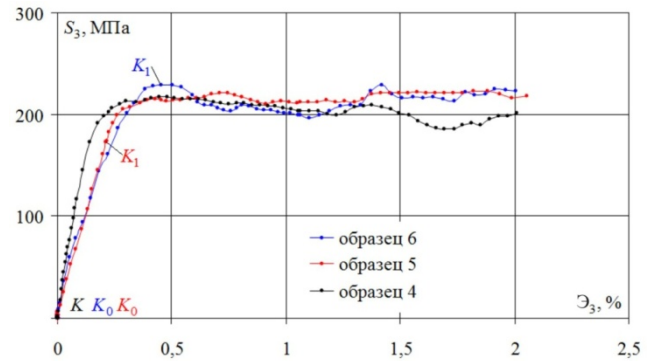


Рис. 12. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \mathcal{E}_3$

Fig. 12. The local chart of deformation $S_3 - \mathcal{E}_3$

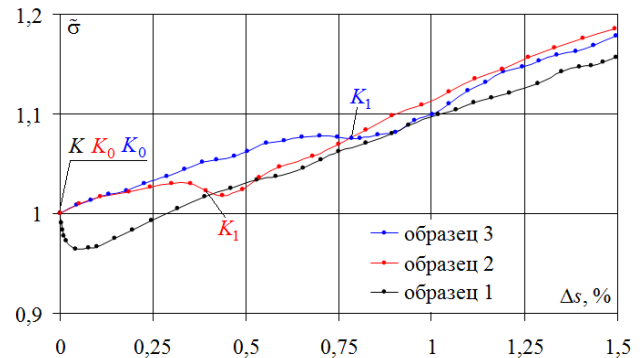


Рис. 13. Траектории с углом 90° . Диаграмма деформирования $\tilde{\sigma} - \Delta s$

Fig. 13. Strain trajectories with an angle of 90° . The chart of deformation $\tilde{\sigma} - \Delta s$

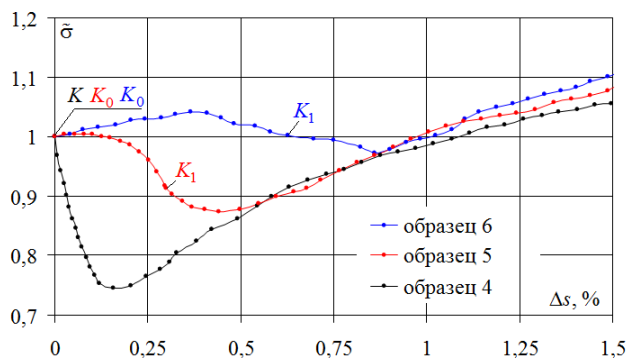


Рис. 14. Траектории с углом 135°. Диаграмма деформирования $\bar{\sigma} - \Delta s$

Fig. 14. Strain trajectories with an angle of 135°. The chart of deformation $\bar{\sigma} - \Delta s$

Из рис. 13, 14 видно, что для стали 3 во всех случаях после точки начала скругления K_0 величина σ сначала возрастает, причем ее увеличение тем больше, чем меньше кривизна κ_1 , т.е. больше радиус скругления R . Так, наибольшее возрастание σ на 7,8 % получено для $\kappa_1 = 200$ (образец 3, рис. 13). Для траекторий с кривизной $\kappa_1 = 400$ (образец 2 на рис. 13, образец 6 на рис. 14) возрастание σ составило 3–4 %.

На прямолинейных участках после точки K_1 можно наблюдать скалярные «нырки» напряжений, иными словами, убывание или «запаздывание» σ в зависимости от кривизны траектории деформирования, причем в данном случае уменьшение тем больше, чем больше кривизна κ_1 , т.е. меньше радиус скругления R . Более того, при больших значениях кривизны (например, образец 5 на рис. 14) величина σ начинает убывать уже на криволинейной части траектории. После завершения нырков при последующем росте деформации величина σ во всех случаях начинает возрастать и стремится к единой кривой при простом нагружении $\sigma = \Phi(s)$. Следует отметить, что в опытах И. Охаша [32, 33] с латунью (более мягким материалом) при скруглении угла излома ортогональной траектории понижение σ наблюдалось сразу после точки начала скругления.

Величина «нырка» напряжений зависит как от излома траектории, так и от кривизны участка. По полученным экспериментальным результатам построены графики зависимостей глубины скалярных нырков напряжений $\Delta\sigma$ от кривизны κ_1 (рис. 15).

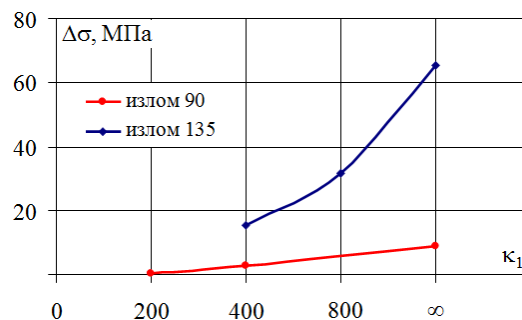


Рис. 15. Диаграммы $\Delta\sigma - \kappa_1$

Fig. 15. Charts $\Delta\sigma - \kappa_1$

При изломе на угол 90° (в точке излома $\kappa_1 = \infty$) величина нырка составила $\Delta\sigma = 8,9$ МПа. Если это значение принять за 100 %, то при скруглении траектории кривизной $\kappa_1 = 400$, величина нырка составила 31,5 % от $\Delta\sigma$ нескругленной траектории, а при значении $\kappa_1 = 200$ всего 5,6 %. Такие результаты говорят о малом влиянии сложного нагружения при данном угле излома траектории. При изломе на угол 135° величина $\Delta\sigma = 65,5$ МПа, при скруглении траектории кривизной $\kappa_1 = 800$, величина нырка составила 48,6 % от $\Delta\sigma$ нескругленной траектории, а при значении $\kappa_1 = 400 - 23,8$ %. Таким образом, можно считать, что влияние сложного нагружения на зависимости между напряжениями и деформациями заметно проявляется при достижении некоторых предельных значений углов излома. Для рассматриваемого материала сталь 3 можно считать $\vartheta_1^0 > 90^\circ$.

На рис. 16, 17 показаны зависимости $\vartheta_1 - \Delta s$ после начала скругления в точке K_0 (или излома K).

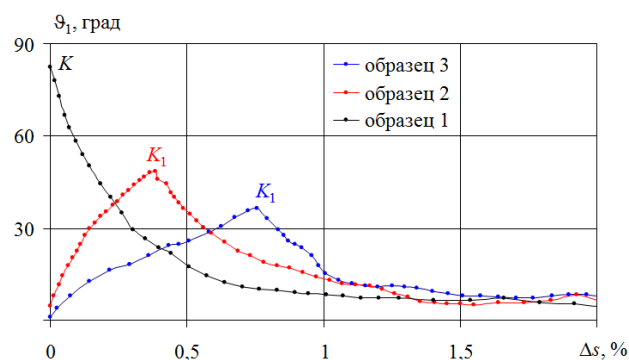


Рис. 16. Траектории с углом 90°. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$

Fig. 16. Strain trajectories with an angle of 90°. The chart $\vartheta_1 - \Delta s$

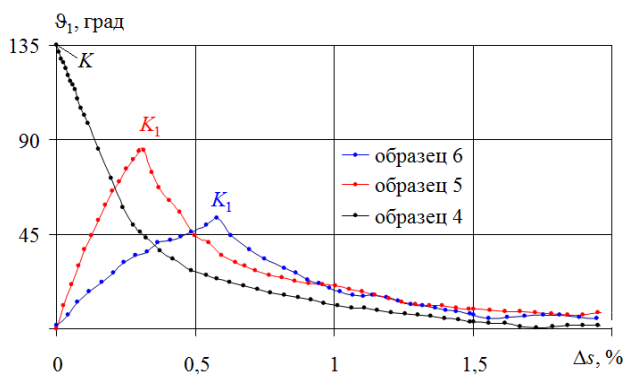


Рис. 17. Траектории с углом 135°. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$

Fig. 17. Strain trajectories with an angle of 135°. The chart of deformation $\vartheta_1 - \Delta s$

Видно, что угол сближения ϑ_1 возрастает на участке скругления, при этом скорость возрастания выше при больших значениях кривизны κ_1 , т.е. при меньших радиусах скругления R . Это отражает влияние сложного нагружения на процесс деформирования через параметр кривизны. После окончания скругления начиная с точки K_1 значение ϑ_1 убывает вначале быстро, затем медленнее и с ростом деформации стремится к нулю. Аналогичные тенденции отмечены в опытах И. Охаши [32, 33] при скруглении угла излома ортогональной траектории.

На рис. 18 представлена диаграмма зависимости ϑ_1 для прямолинейных участков после точки окончания скругления K_1 от величины $\Delta s' = \Delta s - x$, где x – величина, на которую нужно сместить влево диаграмму до совпадения значений ϑ_1 в точке K_1 с соответствующим значением на диаграмме для двузвенной ломаной с углом излома 135° (образец 4), которая была взята за основу.

Видно, что при таком смещении с достаточной степенью точности экспериментальные точки ложатся на единую кривую, что подтверждает ее универсальность, также отмеченную в [32, 33].

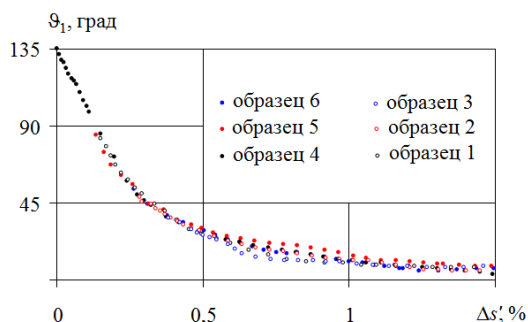


Рис. 18. Смещенная диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s'$

Fig. 18. Offset charts $\vartheta_1 - \Delta s'$

Таким образом, скорость уменьшения ϑ_1 при деформации вдоль прямолинейной траектории после точки K_1 мало зависит от различия геометрии траекторий (предшествующей деформации) до точки K_1 . Однако эти различия в геометрии траектории оказывают существенное влияние на само значение ϑ_1 в точке K_1 .

Заключение

Влияние сложного нагружения при переходе на криволинейный участок скругления проявляется не сразу. Для рассмотренного материала сталь 3 во всех случаях после точки начала скругления величина модуля напряжений сначала несколько возрастает (тем больше, чем меньше кривизна), а затем убывает с образованием «нырков», причем величина понижения модуля напряжений тем больше, чем больше кривизна. Точка минимума «нырка» во всех случаях находится на прямолинейной части траектории после скругления. При этом при больших кривизнах начало образования «нырка» наблюдается еще на криволинейной части траектории деформирования.

На участке скругления угол сближения ϑ_1 возрастает, причем чем больше кривизна траектории деформирования, тем выше скорость. После окончания скругления значение ϑ_1 убывает вначале быстро, затем медленнее и с ростом деформации стремится к нулю. При этом значение ϑ_1 , получившееся либо при изломе траектории, либо при деформировании по участку большой кривизны, при последующем деформировании по прямолинейному участку траектории убывает и стремится к нулю, а в процессе этого убывания зависимость $\vartheta_1 - \Delta s'$ не зависит от истории нагружения. При последующем деформировании по прямолинейному участку после участка скругления экспериментальные результаты для скругленных и нескругленных траекторий становятся мало отличимыми друг от друга, таким образом, замена исходных неаналитических траекторий в виде двузвенных ломаных на гладкие траектории влияет на сложность процессов деформирования и нагружения материалов только в окрестности точки излома. При этом для углов излома 90° это влияние достаточно мало и, соответственно, будет малым и для углов излома менее 90°. Это обстоятельство можно учесть при численном моделировании процессов упругопластического деформирования материалов и интегрировании определяющих соотношений, заменяя неаналитические траектории гладкими.

Библиографический список

1. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т. 18, № 6. – С. 641–666.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 273 с.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 310 с.
4. Ильюшин А.А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
5. Ильюшин А.А., Васин Р.А., Моссаковский П.А. Теория упругопластических процессов при больших пластических деформациях // Прикл. проблемы механики тонкостенных конструкций. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – С. 128–137.
6. Ленский В.С. Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 11. – С. 15–24.
7. Lensky V.S. Analysis of plastic behavior of metals under complex loading // Plasticity. Proc., 2nd Symp. on Naval Struct. Mech. – Brown University, 1960. – P. 259–278.
8. Ленский В.С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Известия АН СССР, ОТН. – 1962. – № 5. – С. 154–158.
9. Ленский В.С., Машков И.Д. Проверка законов в трехмерном пространстве деватора деформаций // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. – № 2. – С. 58–166.
10. Ленский В.С. Физическая достоверность в современной теории пластичности // Упругость и неупругость. Ч. 1. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. – С. 95–119.
11. Жуков А.М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных материалов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1955. – № 8. – С. 81–92.
12. Жуков А.М. О пластических деформациях изотропного материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. – 1956. – № 12. – С. 72–87.
13. Жуков А.М. Некоторые особенности поведения металлов при упругопластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30–57.
14. Жуков А.М. О свойствах запаздывания в общей теории пластичности // Изв. РАН. МТТ. – 1992. – № 5. – С. 110–119.
15. Васин Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – С. 59–126.
16. Васин Р.А., Ильюшин А.А. Об одном представлении законов упругости и пластичности в плоских задачах // Известия АН СССР. МТТ. – 1983. – № 4. – С. 114–118.
17. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Серия: Механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Т. 21. – С. 3–75.
18. Васин Р.А. Теория упругопластических процессов и исследование структурно-механических свойств материалов // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 1. – С. 19–26.
19. Васин Р.А. О «памяти» материала в теории упругопластических процессов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – № 2–2. – С. 59–70.
20. Васин Р.А. Экспериментальное исследование неупругого поведения материалов // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – № 5. – С. 30–34. DOI: 10.15372/PMTF20160504
21. Дао Зуй Бик. О гипотезе локальной определенности в теории пластичности // Вестник Моск. ун-та. Математика, механика. – 1965. – № 2. – С. 67–75.
22. Дао Зуй Бик. Модификация соотношений упругопластических процессов средней кривизны // Вестник Моск. ун-та. Математика, механика. – 1981. – № 5. – С. 103–106.
23. Dao Huy Bich. A boundary value problem of elastoplastic deformation process theory: Existence and uniqueness theorems // The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics. – 1994. Vol. 35(4). – P. 506–524. DOI: 10.1017/S0334270000009589
24. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. – М.: Издательство МГУ, 1965. – 263 с.
25. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1967. – 130 с.
26. Дегтярев В.П. Новые прикладные задачи экспериментальной механики деформируемого тела // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – С. 171–174.
27. Кравчук А.С. О методе последовательных приближений в теории пластичности при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. – 1970. – № 4. – С. 188–191.
28. Кравчук А.С. О теории пластичности для траекторий деформаций средней кривизны // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. – № 2. – С. 91–100.
29. Кравчук А.С. Применение понятий простого и сложного нагружений по А.А. Ильюшину в теории контакта твердых тел // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – С. 182–187.
30. Малый В.И. Об упрочнении функционалов теории упругопластических процессов // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 2. – С. 48–53.
31. Малый В.И. О подобии векторных свойств материалов в упругопластических процессах // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 19–27.
32. Некоторые экспериментальные данные об общем законе теории пластичности Ильюшина / И. Охаша, М. Токуда, И. Курита, Т. Сузуки // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – № 6. – С. 53–63.
33. Experimental Examination of the hypothesis of local determinability in the plastic deformation of metals / Y. Ohashi, Y. Kurita, T. Suzuki, M. Tokuda // Journal of the mechanics and physics of solids. – Oxford, New York, Frankfurt: Pergamon Press, 1981. – Vol. 29. – № 1. – P. 51–67. DOI: 10.1016/0022-5096(81)90015-6
34. Ohashi Y., Tanaka E. Plastic deformation behavior of mild steel along orthogonal trilinear strain trajectories in three-dimensional vector space of strain deviator // Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME. – 1981. – Vol. 103(4). – P. 287–292. DOI: 10.1115/1.3225018
35. Effect of curvature of the strain trajectory on the plastic behaviour of brass / Y. Ohashi, Y. Kurita, T. Suzuki, M. Tokuda // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1981. – Vol. 29(1). – P. 69–86. DOI: 10.1016/0022-5096(81)90016-8
36. Ohashi Y., Ohno N. Inelastic stress-responses of an aluminium alloy in non-proportional deformations at elevated temperature // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1982. – Vol. 30(5). – P. 287–304. DOI: 10.1016/0022-5096(82)90001-1
37. Tokuda M., Ohashi Y., Iida T. On the hypothesis of local determinability and a concise stress-strain relation for curved strain path // Bulletin of the JSME. – 1983. – Vol. 26(219). – P. 1475–1480. DOI: 10.1299/jsme1958.26.1475
38. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. Физические уравнения термовязкопластичности. – Киев: Наукова думка, 1982. – 238 с.
39. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1992. – 327 с.

40. Определяющие уравнения процессов термовязкопластического деформирования элементов тела по траекториям произвольной кривизны и малого кручения / Ю.Н. Шевченко, Р.Г. Терехов, Н.С. Брайковская, Н.Н. Тормахов // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 7. – С. 64–73.

41. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.

42. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.

43. Зубчанинов В.Г. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 27–37. DOI: 10.3103/S0025654411010043

44. Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2018. – № 5. – С. 29–46. DOI: 10.3103/S0027133018050011

45. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: в 2 кн. Книга 1. Процессы сложного деформирования. – Тверь: Изд-во ТГТУ, 2003. 172 с; Книга 2: Процессы сложного нагружения. – Тверь, 2004. – 184 с.

46. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гулятьев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12

47. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories / V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, E.G. Alekseeva, V.I. Gultiaev // Materials Physics and Mechanics. – 2017. – Vol. 32, no. 3. – P. 298–304. DOI: 10.18720/MPM.3232017_10

48. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г. Проверка постулата изотропии и численное моделирование процессов деформирования материалов на сложных гладких траекториях // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Т. 29, № 2. – С. 150–157.

49. Modeling of elastoplastic steel deformation in two-link broken trajectories and delaying of vector and scalar material properties / V.G. Zubchaninov, E.G. Alekseeva, A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev // Materials Physics and Mechanics. – 2019. – Vol. 42. – P. 436–444. DOI: 10.18720/MPM.4242019_8

50. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гулятьев, Е.Г. Алексеева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 61. – С. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4

51. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / V.G. Zub-

chaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev, E.G. Alekseeva // Materials Physics and Mechanics. – 2019. – Vol. 42, № 5. – С. 528–534.

52. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

53. Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю. Основные положения теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина: анализ с позиций многоуровневого моделирования для случая больших градиентов перемещений // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. – М.: Изд-во МГУ, 2016. – С. 119–126.

54. Коровин И.М. Некоторые вопросы пластичности материалов при нагружении по траекториям с точкой излома // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – № 3. – С. 152–158.

55. Tanaka E. Hypothesis of Local Determinability for Five-Dimensional Strain Trajectories // Acta Mechanica. – 1984. – Vol. 52. – P. 63–76. DOI: 10.1007/BF01175965

56. Экспериментальное исследование процессов деформирования стали по двухзвенным траекториям / А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, Н.М. Кульчицкий, А.Ф. Хакимов // Проблемы прочности. – 1988. – № 3. – С. 7–10. DOI: 10.1007/BF01529738

57. Babamuratov K.Sh., Abirov R.A. The new approach to the analysis of elasto-plastic deformation of solids within the bounds of theory of processes by A.A. Ilyushin // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings. – 2001. – P. 899–903.

58. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 1: Условия математической корректности и методы решения краевых задач // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 6. – С. 61–68. DOI: 10.3103/S0025654415060060

59. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – № 1. – С. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106

60. Муравлев А.В. Экспериментальное построение функционалов пластичности для траекторий деформаций типа двухзвенных ломаных в опытах на сплошных цилиндрических областях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1996. – № 5. – С. 74–80.

61. Муравлев А.В. О представлении упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А. Ильюшина // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 99–112.

62. Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. Некоторые вопросы верификации теории упругопластических процессов при сложном нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 3. – С. 98–105.

References

1. Il'yushin A.A. O svyazi mezhdru napriazheniiami i malymi deformatsiiami v mekhanike sploshnykh sred [On the Relation between Stresses and Small Strains in Continuum Mechanics]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1954, vol. 18, no. 6, pp. 641–666.

2. Il'yushin A.A. Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii [Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory]. *Moscow, Izdatelstvo AS USSR*, 1963, 273 p.

3. Il'yushin A.A. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum Mechanics]. *Moscow, Izdatelstvo MSU*, 1990, 310 p.

4. Il'yushin A.A. Trudy (1946–1966). T.2. Plastichnost' [Works (1946–1966). vol. 2. Plasticity]. *Moscow, Fizmatlit*, 2004. 480 p.

5. Il'yushin A.A., Vasin R.A., Mossakovskii P.A. Teoriia uprugoplasticheskikh protsessov pri bol'shikh plasticheskikh deformatsiiakh [The theory of elastoplastic processes with large

plastic strains]. *Prikl. problemy mekhaniki tonkostennykh konstrukttsii*. Moscow, Izd-vo Mosk.un-ta, 2000, pp. 128-137.

6. Lensky V.S. Eksperimental'naiia proverka osnovnykh postulatov obshchei teorii uprugoplasticheskikh deformatsii [Experimental verification of the laws of isotropy and delay under complex loading]. *Voprosy teorii plastichnosti*, 1961, pp. 58-82.

7. Lensky V.S. Analysis of plastic behavior of metals under complex loading. In: *Plasticity. Proc., 2nd Symp. on Naval Struct. Mech.*, pp. 259-278. Brown University, 1960.

8. Lensky V.S. Gipoteza lokal'noi opredelennosti v teorii plastichnosti. *Izvestiia AN SSSR, OTN*. 1962, no. 5. S. 154-158.

9. Lensky V.S., Mashkov I.D. Proverka zakonov v trekhmernom prostranstve deviatora deformatsii. Uprugost' i neuprugost'. Moscow: MSU, 1971, no. 2, pp. 158-166.

10. Lensky V.S. Fizicheskaia dostovernost' v sovremennoi teorii plastichnosti. *Uprugost' i neuprugost'. Ch. 1*. M.: Izd-vo Mosk. Un-ta, 1993, pp. 95-119.

11. Zhukov A.M. Slozhnoe nagruzhenie i teoriiia plastichnosti izotropnykh materialov [Complex loading and the theory of plasticity of isotropic materials]. *Izv. AN SSSR. OTN. Mekhanika i mashinostroenie*. 1955, no.8, pp. 81-92.

12. Zhukov A.M. O plasticheskikh deformatsiiskh izotropnogo materiala pri slozhnom nagruzhenii [On plastic deformations of an isotropic material under complex loading]. *Izv. AN USSR OTN. Mekhanika i mashinostroenie*. 1956, no.12, pp. 72-87.

13. Zhukov A.M. Nekotorye osobennosti povedeniia metallov pri uprugoplasticheskom deformirovanii [Some features of the behavior of metals during elastoplastic deformation]. *Moscow, Izdatel'stvo AS USSR, Voprosy teorii plastichnosti*, 1961, pp. 30-57.

14. Zhukov A.M. O svoistvakh zapazdyvaniia v obshchei teorii plastichnosti [On the properties of delay in the general theory of plasticity]. *Izvestiia Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 1992, no.5, pp. 110-119.

15. Vasin R.A. Nekotorye voprosy svyazi napriazhenii i deformatsii pri slozhnom nagruzhenii [Some questions of the relationships between stresses and deformations under complex loading]. *Uprugost' i neuprugost'*, 1971. Vol. 1, pp. 59-126.

16. Vasin R.A., Ilyushin A.A. Ob odnom predstavlenii zakonov uprugosti i plastichnosti v ploskikh zadachakh [About one representation of the laws of elasticity and plasticity in plane problems]. *Izv. Akad. Nauk USSR. MTT*. 1983, no. 4, pp. 114-118.

17. Vasin R.A. Opredeliushchie sootnosheniia teorii plastichnosti [Defining relations of the theory of plasticity]. *Itogi nauki i tekhniki. VINITI. Ser. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. 1990. T. 21, pp. 3-75.

18. Vasin R.A. Theory of elastoplastic processes and study of structure-mechanical properties of materials [The theory of elastoplastic processes and the study of the structural and mechanical properties of materials]. *Mechanics of Solids*. 2011, vol. 46, iss. 1, pp. 15-20. DOI: 10.3103/S0025654411010031

19. Vasin R.A. O "pamiati" materiala v teorii uprugoplasticheskikh protsessov [On the «memory» of the material in the theory of elastoplastic processes]. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki*, 2013, no. 2-2, pp. 59-70.

20. Vasin R.A. Experimental study of the inelastic behavior of materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016, vol. 57, iss. 5, pp. 789-791. DOI: 10.1134/S0021894416050047

21. Dao Huy Bich. O gipoteze lokal'noi opredelennosti v teorii plastichnosti [On the hypothesis of local determinacy in plasticity theory]. *Vestnik MSU, Seriiia «Matematika, mekhanika»*. 1965, no.2, pp. 67-75.

22. Dao Huy Bich. Modifikatsiia sootnoshenii uprugoplasticheskikh protsessov srednei krivizny [Modification of ratios of

elastoplastic processes of medium curvature]. *Vestnik MSU, Seriiia «Matematika, mekhanika»*. 1981, no.5, pp. 103-106.

23. Dao Huy Bich. A boundary value problem of elastoplastic deformation process theory: Existence and uniqueness theorems. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 1994. 35(4), pp. 506-524. doi:10.1017/S033427000009589

24. Moskvitin V.V. Plastichnost' pri peremennykh nagruzheniakh [Plasticity under Variable Loads]. *Moscow, Izdatel'stvo MSU*, 1965. 263 p.

25. Degtiarev V.P. Plastichnost' i polzuchest' mashinostroitel'nykh konstrukttsii [Plasticity and creep of engineering constructions]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1967. 130 p.

26. Degtiarev V.P. Novye prikladnye zadachi eksperimental'noi mekhaniki deformiruemogo tela [New applied problems of the experimental mechanics of a deformable body]. *Uprugost' i neuprugost'*, 2001, pp. 171-174.

27. Kravchuk A.S. O metode posledovatel'nykh priblizhenii v teorii plastichnosti pri slozhnom nagruzhenii [On the method of successive approximations in the theory of plasticity under complex loading]. *Izv. Akad. Nauk USSR. MTT*. 1970, no.4, pp. 188-191.

28. Kravchuk A.S. O teorii plastichnosti dlia traektorii deformatsii srednei krivizny [On the theory of plasticity for trajectories of deformations of average curvature]. *Uprugost' i neuprugost'*, 1971, no.2, pp. 91-100.

29. Kravchuk A.S. Primenenie poniatii prostogo i slozhnogo nagruzheniei po A.A. Il'yushinu v teorii kontakta tverdykh tel [Application of the concepts of simple and complex loading by A.A. Ilyushin in the theory of contact of solids]. *Uprugost' i neuprugost'*, 2001, pp. 182-187.

30. Malyi V.I. Simplifying functionals in the theory of elastoplastic processes. *Soviet Applied Mechanics*. 1978, vol. 14, pp 148-152 DOI:10.1007/BF00902841

31. Malyi V.I. Similarity of vector properties of materials in elastoplastic processes. *Soviet Applied Mechanics*. 1978 Vol. 14, pp 238-243. DOI:10.1007/BF00884511

32. Ohashi Y., Tokuda M., Kurita Y., Suzuki T. Nekotorye eksperimental'nye dannye ob obshchem zakone teorii plastichnosti Il'yushina [Some experimental data on the general law of the theory of plasticity of Ilyushin]. *Izv. Akad. Nauk USSR. MTT*. 1981, no.6, pp. 53-63.

33. Ohashi Y., Kurita Y., Suzuki T., Tokuda M. Experimental Examination of the hypothesis of local determinability in the plastic deformation of metals [Experimental Examination of the hypothesis of local determinability in the plastic deformation of metals]. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 1981, vol. 29, no. 1, pp. 51-67. DOI:10.1016/0022-5096(81)90015-6

34. Ohashi Y., Tanaka E. Plastic deformation behavior of mild steel along orthogonal trilinear strain trajectories in three-dimensional vector space of strain deviator [Plastic deformation behavior of mild steel along orthogonal trilinear strain trajectories in three-dimensional vector space of strain deviator]. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 1981. 103(4), pp. 287-292. DOI:10.1115/1.3225018

35. Ohashi Y., Kurita Y., Suzuki T., Tokuda M. Effect of curvature of the strain trajectory on the plastic behaviour of brass. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1981. 29(1), pp. 69-86. doi:10.1016/0022-5096(81)90016-8

36. Ohashi Y., Ohno N. Inelastic stress-responses of an aluminium alloy in non-proportional deformations at elevated temperature. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1982. 30(5), pp. 287-304. doi:10.1016/0022-5096(82)90001-1

37. Tokuda M., Ohashi Y., Iida T. On the hypothesis of local determinability and a concise stress-strain relation for curved strain path. *Bulletin of the JSME*, 1983. 26(219), pp. 1475–1480. doi:10.1299/jsme1958.26.1475
38. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G. Fizicheskie uravneniia termoviazkoplachnosti [Physical equations of thermoviscoelasticity]. *Kiev, Naukova Dumka*, 1982. 238 p.
39. Shevchenko Yu.N., Babeshko M.E., Terekhov R.G. Termoviazkoupругoplasticheskie protsessy slozhnogo deformirovaniia elementov konstruksii [Thermoviscoelastic processes of complex deformation of structural elements]. *Kiev, Naukova Dumka*, 1992. 327 p.
40. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Braikovskaya N.S., Tormakhov N.N. Defining equations of thermoviscoplastic deformation of body elements along trajectories of arbitrary curvature and small torsion // *Applied Mechanics*. 2002, vol. 38, no. 7, pp. 64-73.
41. Zubchaninov V.G. Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of processes in plastic environments]. *Moscow, Fizmatlit*, 2010, 352 p.
42. Zubchaninov V.G. Ustoichivost' i plastichnost'. T.2. Plastichnost' [Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity]. *Moscow, Fizmatlit*, 2008. 336 p.
43. Zubchaninov V.G. Isotropy postulate and the law of complex unloading of continua. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 21-29. DOI:10.3103/S0025654411010043
44. Zubchaninov V.G. The General Mathematical Theory of Plasticity and the Il'yushin Postulates of Macroscopic Definability and Isotropy. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2018, vol. 73, iss. 5, pp 101-116. DOI:10.3103/S0027133018050011
45. Zubchaninov V.G., Okhlopov N.L., Garanikov V.V. Eksperimental'naia plastichnost': v 2 kn. Kniga 1. Protsessy slozhnogo deformirovaniia [Experimental plasticity: in 2 kn. Book 1. Processes of complex deformation]. *Tver': TGTU*, 2003, p. 172;
46. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. Modeling of elastic-plastic deformation of work material along multielement piecewise zig-zag linear trajectories. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 3, pp. 203-215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12
47. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. *Materials Physics and Mechanics*. 2017. Vol. 32. No 3. P. 298-304. doi: 10.18720/MPM.3232017_10
48. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G. Proverka postulata izotropii i chislennoe modelirovanie protsessov deformirovaniia materialov na slozhnykh gladkikh traektoriiakh [Verification of the postulate of the isotropy and numerical simulation of the deformation of materials on a complex smooth trajectories]. *Materials Physics and Mechanics*. 2016, vol. 29, no. 2, pp. 150-157.
49. Zubchaninov V.G., Alekseeva E.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. Modeling of elastoplastic steel deformation in two-link broken trajectories and delaying of vector and scalar material properties. *Materials Physics and Mechanics*. 2019, vol 42, pp. 436-444 DOI: 10.18720/MPM.4242019_8
50. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. The processes of a complex loading of structural steel in a five-link piecewise polygonal strain path [The processes of complex loading of structural steel along a five-link piecewise-broken path of deformation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika*. 2019, vol. 61, pp. 32-44.
51. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally. *Materials Physics and Mechanics*, 2019, vol. 42, no. 5. pp. 528-534.
52. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Niashin Iu.I. Bol'shie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriia, algoritmy, prilozheniia [Large elastoplastic deformation: theory, algorithms, and applications]. *Moscow, Nauka*, 1986. 232 p.
53. Trusov P.V., Shveikin A.I., Iants A.Iu. Osnovnye polozheniia teorii uprugoplasticheskikh protsessov A.A. Il'yushina: analiz s pozitsii mnogourovnevnogo modelirovaniia dlia sluchaia bol'shikh gradientov peremeshchenii [The main provisions of the theory of elastoplastic processes A.A. Ilyushin: analysis from the perspective of multi-level modeling for the case of large displacement gradients]. *Uprugost' i neuprugost'*, 2016, pp. 119-126.
54. Korovin I.M. Nekotorye voprosy plastichnosti materialov pri nagruzhении po traektoriiam s tochkoi izloma [The main provisions of the theory of elastoplastic processes A.A. Ilyushin: analysis from the perspective of multi-level modeling for the case of large displacement gradients]. *Izv. Akad. Nauk USSR. MTT*, 1969, no.3, pp. 152-158.
55. Tanaka E. Hypothesis of Local Determinability for Five-Dimensional Strain Trajectories. *Acta Mechanica*. 1984, vol. 52, pp. 63-76. DOI:10.1007/BF01175965
56. Lebedev A.A., Koval'chuk B.I., Kul'chitskii N.M., Khakimov A.F. Experimental study of the deformation of steel along bilinear paths [An experimental study of steel deformation processes along two-link trajectories]. *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, pp. 280-285. DOI:10.1007/BF01529738
57. Babamuratov K.Sh., Abirov R.A. The new approach to the analysis of elasto-plastic deformation of solids within the bounds of theory of processes by A.A. Ilyushin. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings* 2001. pp. 899-903.
58. Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 1: Conditions of mathematical well-posedness and methods for solving boundary value problems. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, iss. 6, pp 650-656. DOI: 10.3103/S0025654415060060
59. Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, iss 1, pp 91-113. DOI: 10.3103/S0025654416010106
60. Muravlev A.V. Eksperimental'noe postroenie funktsionalov plastichnosti dlia traektorii deformatsii tipa dvukhzvennykh lomanykh v opytakh na sploshnykh tsilindricheskikh oblastiakh [Experimental construction of plasticity functionals for deformation trajectories of the type of two-link polygonal lines in experiments on continuous cylindrical regions]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya I: Matematika. Mekhanika*. 1996, no. 5, pp. 74-80.
61. Muravlev A.V. On a representation of an elastic potential in A.A. Il'yushin's generalized strain space [On the representation of an elastic potential in a generalized space of strains A.A. Ilyushin]. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 77-79. DOI: 10.3103/S0025654411010122
62. Molodtsov I.N., Babaeva D.O. Nekotorye voprosy verifikatsii teorii uprugoplasticheskikh protsessov pri slozhnom nagruzhении [Some problems of verification of plastic-elastic complex loading processes]. *Problemy mashinostroeniia i avtomatizatsii – Engineering & Automation Problems*. 2016, no. 3, pp. 98-105.