



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.2.07

УДК 539.3:534

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ФУНКЦИИ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ МЕХАНИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИНЫ

Н.В. Осадчий, В.А. Малышев, В.Т. Шепель

ПАО «ОДК-Сатурн», Рыбинск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 06 февраля 2020 г.

Принята: 29 июня 2020 г.

Опубликована: 30 июня 2020 г.

#### Ключевые слова:

нелинейность, перемещения, коэффициенты упругости, конечный элемент, вариационный принцип.

### АННОТАЦИЯ

Слоистые композитные материалы характеризуются высокой поперечной анизотропией и низкими значениями отношения модуля поперечного сдвига к модулю продольной упругости. Это приводит к тому, что характер изменения продольных перемещений и продольных нормальных напряжений отличается от линейного, а поперечных касательных напряжений – от параболического закона. В работе исследуется степень нелинейности функций перемещения пластины в зависимости от ее упругих свойств и геометрической формы. Для определенности рассмотрена двумерная задача деформации прямоугольной пластины, когда в терминах безразмерных величин удается получить достаточно полное и наглядное решение. Аналогичная трехмерная задача более громоздка, но принципиально отличия не имеет. Изучение степени нелинейности функций продольного перемещения от упругих свойств и геометрической формы деформируемой пластины основывается на методе конечных элементов. Потенциальная энергия деформируемой пластины выражена через квадратическую форму от переменных с коэффициентами, являющимися многочленами от безразмерных параметров, таких как размеры пластины, отношения модулей упругости и сдвига, коэффициента Пуассона. Показано, что вариационный принцип сводит поставленную задачу к решению системы линейных уравнений. В результате с точностью, допустимой для инженерных расчетов, равной 5 %, построены подобласти линейности и нелинейности продольных перемещений пластины. Для композитных пластин нелинейность продольных перемещений необходимо учитывать, когда длина пластины на порядок больше ее толщины, тогда как для сталей нелинейность характерна для относительно толстых пластин. Построенные области линейности и нелинейности продольных перемещений позволяют корректно строить модели напряженно-деформируемого состояния.

© ПНИПУ

© Осадчий Николай Васильевич – к.т.н., e-mail: nikosadchii@yandex.ru, [ID: 0000-0002-2756-2770](https://orcid.org/0000-0002-2756-2770).

Малышев Владимир Александрович – д.ф.-м.н., e-mail: malysheva314@mail.ru, [ID: 0000-0002-5074-7212](https://orcid.org/0000-0002-5074-7212).

Шепель Вячеслав Тимофеевич – д.т.н., проф., e-mail: sshapel@yandex.ru, [ID: 0000-0003-4243-3034](https://orcid.org/0000-0003-4243-3034).

Nikolay V. Osadchy – CSc in Technical Sciences, e-mail: nikosadchii@yandex.ru, [ID: 0000-0002-2756-2770](https://orcid.org/0000-0002-2756-2770).

Vladimir A. Malyshev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: malysheva314@mail.ru,

[ID: 0000-0002-5074-7212](https://orcid.org/0000-0002-5074-7212).

Vyachslav T. Shepel – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: sshapel@yandex.ru, [ID: 0000-0003-4243-3034](https://orcid.org/0000-0003-4243-3034).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



# INVESTIGATION OF NONLINEARITY OF LONGITUDINAL DISPLACEMENT FUNCTION FROM MECHANICAL AND GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF THE PLATE

N.V. Osadchy, V.A. Malyshev, V.T. Shepel

PJSC UEC- Saturn, Rybinsk, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 06 February 2020

Accepted: 29 June 2020

Published: 30 June 2020

### Keywords:

nonlinearity, displacements, elastic modulus, finite element, variational principle.

## ABSTRACT

Layered composite materials are characterized by a high transverse anisotropy and low values of relations between the transverse shear modulus and the modulus of longitudinal elasticity. As a result, the behavior of longitudinal displacements and longitudinal normal stresses differs from the linear law, and the behavior of transverse tangential stresses differs from the parabolic law. The paper presents the analysis of the degree of the plate displacement nonlinearity functions depending on its elastic properties and geometric shape. The article considers a 2D square plate deformation problem. In non-dimensional terms, the authors could receive a complete and demonstrative solution. A similar 3D problem is more bulky but it has no principle differences. The study of the degree of the longitudinal displacement nonlinearity functions due to elastic properties and the geometric shape of the deformable plate is based on the finite element method. The potential energy of the deformable plate is expressed through a square form of the variables with coefficients that are polynomials of dimensionless parameters such as plate size, ratio of the elasticity and shear moduli, Poisson's modulus. It is shown that the variational principle reduces the problem to the solution of the system of linear equations. As a result, the subareas of linearity and nonlinearity of the plate longitudinal displacements are constructed with an accuracy acceptable for engineering calculations of 5 %. It is necessary to consider the plate nonlinear longitudinal deformations for a length of the composite plate on order more than its thicknesses. As for steel, nonlinearity is characteristic for quite thick plates. The constructed areas of linearity and nonlinearity of the longitudinal displacements make it possible to construct the strain-stress state models with a smaller number of variables.

© PNRPU

В настоящее время в аэрокосмической промышленности широко используются конструкции, которые изготавливаются из слоистых композитных материалов, в том числе конструкции, в которых несущие слои разделены слоями заполнителя. Эти конструкции характеризуются высокой поперечной анизотропией  $E_Y / E_X = 5 \dots 40$  и низкими значениями отношения модуля поперечного сдвига к модулю продольной упругости  $G_{YX} / E_Y = 1/10 \dots 1/200$  [1], где  $Y, X$  – координатные оси по длине и толщине пластины соответственно. Это приводит к тому, что характер изменения продольных перемещений и продольных нормальных напряжений отличается от линейного, а поперечных касательных напряжений – от параболического закона [2]. В частности, показано, что при низких значениях  $G_{YX} / E_Y$  имеет место значительная деформация поперечного сечения. Следствием этого является ярко выраженное отклонение закона изменения продольных нормальных напряжений от линейного закона с концентрацией напряжений у наружной и внутренней границы конструкции (*stress-channelling* эффект [3]). При этом закон изменения касательных напряжений так же значительно отличается от параболического закона. Учет этих особенностей при исследовании механики многослойных конструкций требует применения специализированных, достаточно сложных математических моделей. В литературных обзорах [4, 5] проанализировано более 500 работ, посвященных вопросам построения математических моделей многослойных конструкций.

Модели, построенные на решении трехмерной задачи упругости, представлены [6–10]. Следует выделить эквивалентные однослойные модели [11–21], модели с независимыми слоями [22–26]. Применяются также комбинированные теории [27–29]. Наименьшей математической сложностью обладают модели, построенные в рамках теории деформаций сдвига первого порядка. В частности, при построении математической модели многослойных конструкций с сотовым заполнителем механика несущих обшивок, вследствие их малой толщины в сравнении с длиной или радиусом кривизны, описывается в рамках именно этой теории [30, 31]. Однако в литературе четко не обозначены рамки применения данной теории. В то же время в конструкциях авиационных двигателей, в частности звукопоглощающих конструкциях, отношение  $G_{YX} / E_Y$  выходит за рамки, указанные в [1]. Задача данной работы – определить границы, при которых необходимо учитывать нелинейность изменения продольных перемещений по толщине пластины при построении ее математической модели из композитных материалов с механическими характеристиками  $G_{YX} / E_Y$ , находящимися в пределах  $0,1–0,4$ , и коэффициентом Пуассона  $\mu \geq 0$ .

## Введение

В настоящей работе изучается степень нелинейности функций перемещения деформируемого тела в зависимости от его упругих свойств и геометрической

формы. Для определенности будет рассмотрена двумерная задача деформации прямоугольной пластины, когда в терминах безразмерных величин удастся получить достаточно полное и наглядное решение. Аналогичная трехмерная задача более громоздка, но принципиального отличия не имеет.

Рассмотрим деформацию прямоугольной пластины длиной  $A$  и толщиной  $B$  с коэффициентами упругости  $E, G, \mu$  при условии жестко закрепленных боковых граней под воздействием равномерной нагрузки  $F$ , приложенной к верхней грани. Обозначим через  $U$  и  $V$  функции горизонтального и вертикального перемещения. Степень нелинейности функций перемещения  $U$  и  $V$  в зависимости от переменной  $y$  будет изучаться на вертикальном отрезке при  $x = A/4$ , когда эта степень выражена наиболее явно. Кроме того, для изучения степени нелинейности должным образом будет использоваться только нормированная функция горизонтального перемещения  $U(y)$ , поскольку для функции вертикального перемещения  $V(y)$  эта степень оказывается существенно меньше.

Степень нелинейности функции  $U(y)$  будет изучаться в терминах безразмерных величин  $\alpha = B/A$ ,  $\beta = G/E$  и коэффициента Пуассона  $\mu$ . При этом нагрузка  $F$  также оказывается безразмерной величиной в результате должной нормировки функции  $U(y)$ . Формально степень нелинейности нормированной функции  $U(y)$  определяется через ее максимальное и среднее отклонения от линейной среднеквадратической аппроксимации. Будет показано, что степень нелинейности функции  $U(y)$  практически не зависит от коэффициента Пуассона  $\mu$ . При этом область изменения параметров  $\alpha, \beta$  естественным образом разбивается на три подобласти: подобласть существенной линейности, подобласть существенной нелинейности и промежуточную подобласть. За критерий линейности и нелинейности взято рассогласование по максимальному и среднему значениям между функцией  $U(y)$  и ее линейной среднеквадратической аппроксимацией. Величина рассогласования выбирается из соображений точности проведения инженерных расчетов, равной 5 %.

### 1. Построение нормированной функции горизонтальных перемещений

Изучение зависимости степени нелинейности функций перемещения от упругих свойств и геометрической формы деформируемой пластины будет основываться на методе конечных элементов. В частности, после соответствующей дискретизации возможность решения задачи в пространстве безразмерных параметров  $\alpha, \beta, \mu$  основывается на представлении потенциальной энергии пластины в виде квадратичной формы от перемещений

с коэффициентами от переменных  $\alpha, \beta, \mu$ . Пропуская простые, но достаточно громоздкие вычисления методом конечных элементов, поясним основные действия, приводящие к желаемому представлению потенциальной энергии.

Зададим целое  $n$  и разобьем пластину размером  $A \times B$  на  $n^2$  равновеликих прямоугольников с вершинами  $x_i = ih, y_j = jah$ , где  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$  и  $h = A/n$ . Далее разобьем каждый такой прямоугольник (рис. 1) диагональю на два треугольника с площадью  $S = \alpha h^2 / 2$ .

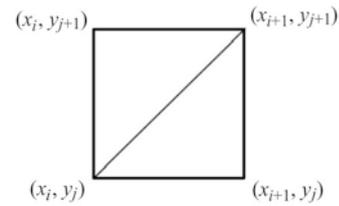


Рис. 1. Конечный элемент

Fig. 1. The finite element

В методе конечных элементов в пределах рассматриваемых треугольников функции перемещения  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  принимаются линейными:

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y, \quad v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y.$$

Поэтому по формулам Коши деформации выражаются в виде

$$\epsilon_x = a_1, \quad \epsilon_y = b_2, \quad \gamma_{xy} = a_2 + b_1.$$

Обозначим через  $(u_{i,j}, v_{i,j})$  перемещения узловых точек  $(x_i, y_j)$ . Выражая  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  через перемещения  $(u_{i,j}, v_{i,j}), (u_{i+1,j}, v_{i+1,j}), (u_{i+1,j+1}, v_{i+1,j+1})$  вершин  $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})$  нижнего треугольника, получаем деформации в виде

$$\epsilon_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, \quad \epsilon_y = \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\alpha h},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\alpha h} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h}.$$

Далее, выражая  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  через перемещения  $(u_{i,j}, v_{i,j}), (u_{i+1,j+1}, v_{i+1,j+1}), (u_{i,j+1}, v_{i,j+1})$  вершин  $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_i, y_{j+1})$  верхнего треугольника, получаем деформации в виде

$$\varepsilon_x = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h}, \quad \varepsilon_y = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\alpha h},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\alpha h} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i,j+1}}{h}.$$

Используя выражение для потенциальной энергии

$$P = \frac{S}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}),$$

где

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = \beta E \gamma_{xy},$$

потенциальную энергию прямоугольника с вершинами  $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_i, y_{j+1})$ , можно представить в виде

$$P_{i,j} = \frac{E}{4\alpha(1-\mu^2)} K_{i,j},$$

где через  $K_{i,j}$  обозначена некоторая квадратичная форма от переменных

$$u_{i,j}, v_{i,j}, u_{i+1,j}, v_{i+1,j}, u_{i+1,j+1}, v_{i+1,j+1}, u_{i,j+1}, v_{i,j+1}$$

с коэффициентами, являющимися многочленами от  $\alpha, \beta, \mu$ . Наконец, осуществляя суммирование по  $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$ , получаем потенциальную энергию деформированной пластины в виде

$$P = \frac{E}{4\alpha(1-\mu^2)} K,$$

где через  $K$  обозначена квадратичная форма от переменных  $(u_{i,j}, v_{i,j})$ , где  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$ , с коэффициентами, являющимися многочленами от  $\alpha, \beta, \mu$ .

Напомним, что прогиб прямоугольной пластины изучается под действием равномерно распределенной нагрузки  $F$ , приложенной к верхней грани, при условиях жесткого закрепления боковых граней. В рамках решения дискретной задачи условия закрепления боковых граней можно записать следующим образом:

$$u_{i,0} = u_{i,n} = v_{i,0} = v_{i,n} = 0, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Работа  $Q$  внешних сил записывается в виде

$$Q = \sum_{j=1}^{n-1} F h v_{n,j} = F h L, \quad L = \sum_{j=1}^{n-1} v_{n,j}.$$

Отметим, что при решении задачи с неравномерной нагрузкой вертикальные перемещения в линейной форме  $L$  идут с весами.

Из вариационного принципа следует, что в рамках сделанных предположений перемещения  $(u_{i,j}, v_{i,j})$ , где  $0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$ , определяются из решения задачи минимизации

$$K - \lambda L \rightarrow \min,$$

где

$$\lambda = \frac{4\alpha(1-\mu^2)Fh}{E}.$$

Фактическое решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений относительно переменных  $(u_{i,j}, v_{i,j})$ , где  $0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$ . Предполагая  $n$  кратным 4, зададим

$$U_i = \frac{u_{i,n/4}}{|u_{0,n/4}|}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

При изучении степени нелинейности будут использоваться нормированные горизонтальные перемещения  $U_0, U_1, \dots, U_n$ . В частности, из соображений линейности следует, что значения нормированных перемещений не зависят от параметра  $\lambda$ .

## 2. Разбиение области безразмерных параметров

Определим величины  $U_0, U_1, \dots, U_n$  для заданной тройки безразмерных параметров  $\alpha, \beta, \mu$ . Для этого вычислим коэффициенты  $a$  и  $b$  из соображений линейной среднеквадратической аппроксимации

$$\sum_{k=0}^n (a + bk - U_k)^2 \rightarrow \min$$

и зададим величины максимального и среднего рассогласований

$$M(\alpha, \beta, \mu) = \max_{0 \leq k \leq n} |a + bk - U_k|$$

и

$$S(\alpha, \beta, \mu) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a + bk - U_k|.$$

Полезно отметить, что  $S(\alpha, \beta, \mu) \leq M(\alpha, \beta, \mu)$ .

Зададим  $r \geq 0$  и разобьем область изменения безразмерных параметров  $\alpha, \beta, \mu$  на три подобласти: подобласть линейности  $M(\alpha, \beta, \mu) \leq r$ , подобласть нелинейности  $S(\alpha, \beta, \mu) \geq r$  и промежуточную подобласть  $S(\alpha, \beta, \mu) \leq r \leq M(\alpha, \beta, \mu)$ .

Получим предлагаемое разбиение на три подобласти для критерия нелинейности с точностью до 5% в пределах  $0,1 \leq \alpha, \beta \leq 0,4$  при значении  $n = 20$ , достаточном для получения адекватных вычислительных результатов.

Отметим, что для композитных материалов, применяемых в авиадвигателестроении, коэффициент Пуассона изменяется в пределах  $0 \leq \mu \leq 0,5$ .

Важно заметить, что при изменении коэффициента Пуассона в указанных границах величины  $M(\alpha, \beta, \mu)$

и  $S(\alpha, \beta, \mu)$  остаются практически неизменными. Так, при изменении коэффициента Пуассона в пределах  $0,1 \leq \mu \leq 0,4$  вариация величин  $M(\alpha, \beta, \mu)$  не превышает 0,0074, что на порядок меньше заданной точности, равной 5%. В этой связи предлагаемое разбиение на подобласти будет осуществлено при значении коэффициента Пуассона  $\mu = 0,3$ . В частности, это позволит сделать изложение более наглядным.

Зададим шаг  $\delta = 0,015$  измерения параметров  $\alpha, \beta$  и осуществим вычисление величин  $M(\alpha, \beta, 0,3)$  и  $S(\alpha, \beta, 0,3)$  в узловых точках

$$\alpha_i = 0,1 + (i - 0,5)\delta, \quad \beta_j = 0,1 + (j - 0,5)\delta, \quad 1 \leq i, j \leq 20.$$

Пространственное изображение величин  $M(\alpha_i, \beta_j, 0,3)$  и  $S(\alpha_i, \beta_j, 0,3)$  показано на рис. 2.

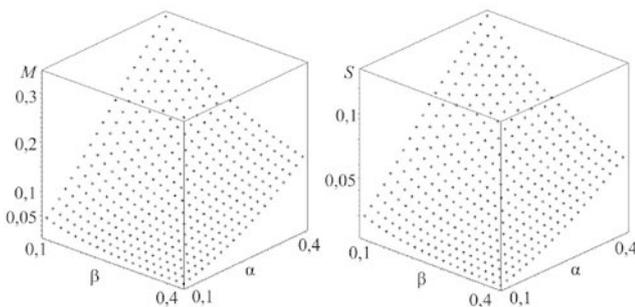


Рис. 2. Величины  $M(\alpha_i, \beta_j, 0,3)$  и  $S(\alpha_i, \beta_j, 0,3)$

Fig. 2. Quantities  $M(\alpha_i, \beta_j, 0,3)$  and  $S(\alpha_i, \beta_j, 0,3)$

Разбиения области изменения безразмерных параметров  $0,1 \leq G/E \leq 0,4$  и  $0,1 \leq B/A \leq 0,4$  на три подобласти по критерию  $r = 0,05$  показано на рис. 3.

На рис. 3 левый уровень  $G/E = 0,125$  соответствует стеклопластику Hexply 914/33%/644, а правый уровень  $G/E = 0,385$  соответствует стали. Для стеклопластика  $G/E = 0,125$  функции нормированных горизонтальных перемещений при  $B/A = 0,1$  (для промежуточной подобласти) и  $B/A = 0,3$  (для подобласти нелинейности) вместе с линейными среднеквадратическими аппроксимациями показаны на рис. 4, а и б соответственно.

Таким образом, для стали первые две точки попадают в область линейности, третья точка – в промежу-

точную область. Для стеклопластика первая точка лежит в области линейности, вторая – в промежуточной области, третья – в области нелинейности.

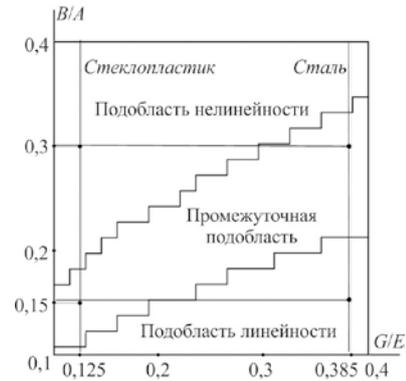


Рис. 3. Подобласти линейности и нелинейности

Fig. 3. The subdivision of linearity and nonlinearity into subdomains

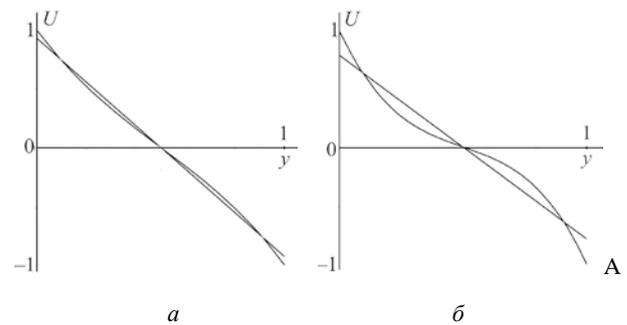


Рис. 4. Функции горизонтальных перемещений стеклопластика Hexply 914/33%/644: а –  $B/A = 0,15$ ; б –  $B/A = 0,3$

Fig. 4. Functions of horizontal displacements of fiberglass Hexply 914/33%/644: а –  $B/A = 0,15$ ; б –  $B/A = 0,3$

Для композитных пластин нелинейность продольных перемещений необходимо учитывать, когда длина пластины на порядок больше ее толщины, тогда как для сталей нелинейность характерна для относительно толстых пластин. Таким образом, результаты данной работы позволяют корректно применять гипотезу о линейном распределении продольных перемещений по толщине пластины из композиционного материала, что значительно упрощает построение ее математической модели деформации.

### Библиографический список

1. Carrera E. Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2002. – Vol. 9 (2). – P. 87–140.
2. Groh R.M.J., Weaver P.M. Static inconsistencies in certain axiomatic higher-order shear deformation theories for beams,

plates and shells // Composite Structures. – 2015. – Vol. 120. – P. 231–245.

3. Everstine G., Pipkin A. Stress channelling in transversely isotropic elastic composites. Zeitung fuer angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). – 1971. – Vol. 22. – P. 825–834.

4. Kreja Ir. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels // *Central European Journal of Engineering* – 2011. – Vol. 1(1). – P. 59–80.
5. Atteshamuddin S. Sayyad, Yuwaraj M. Ghugal. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature // *Composite Structures* – 2017. – Vol. 171. – P. 486–504.
6. Srinivas S., Rao A.K. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates // *International Journal of Solids and Structures*. – 1970. – Vol. 6. – P. 1463–1481.
7. Brischetto S., Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells // *Composites Part B*. 2017. – Vol. 119. – P. 230–252.
8. Meyer-Piening H.R. Experiences with 'Exact' linear sandwich beam and plate analyses regarding bending, instability and frequency investigations // *Proceedings of the Fifth International Conference On Sandwich Constructions, Zurich, Switzerland, September 5–7. 2000.* – P. 37–48.
9. Pagano N.J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // *Journal of Composite Materials*. – 1969. – Vol. 3. – P. 389–411.
10. Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // *Journal of Composite Materials*. – 1970. – Vol. 4. – P. 20–34.
11. Groh R.M.J., Weaver P.M. A computationally efficient 2D model for inherently equi brated 3D stress predictions in heterogeneous laminated plates. Part I: Model formulation // *Composite Structures* 156. – 2016. – P. 171–185.
12. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
13. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. – М.: Машиностроение, 1965. – 272 с.
14. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 264 с.
15. Whitney J.M., Pagano, N.J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates // *Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME* 37. – 1970. – P. 1031–1036.
16. Dong S.B., Tso F.K.W. On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation // *Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME* 39. – 1972. – P. 1091–1096.
17. Reissner E. Small bending and stretching of sandwich-type shells. *NACA Report No. 975.* – 1950. – P. 483–508.
18. Reddy J.N., Arciniega R.A. Shear deformation plate and shell theories: From Stavsky to Present // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2004. – Vol. 11. – P. 535–582.
19. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates // *Journal of Applied Mechanics*. – 1951. – Vol. 18. – P. 1031–1036.
20. Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics // *Compute Structures*. – 2005. – Vol. 83. – P. 2225–2237.
21. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear deformation theory // *Mechanics of Advanced Composite Structures*. – 2015 – Vol. 2(1). – P. 45–53.
22. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционного материала. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
23. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек. – Новосибирск: Западно-сибирское книжное издательство, 1966. – 221 с.
24. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение, 1973. – 172 с.
25. Болотин В.В., Новичков Ю.В. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
26. Nguyen Duc Thai, Michele D'Ottavio, Jean-Francois Caron. Bending analysis of laminated and sandwich plates using a layer-wise stress model. *Composite Structures*, 96. – 2013. – P. 135–142.
27. Carrera E., Pagani A., Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structures. *Composites Part B*. – 2017. – Vol. 111. – P. 294–314.
28. Carrera E., Pagani A., Valvano S. Multilayered plate elements accounting for refined theories and node-dependent kinematics. *Composites. Part B*. – 2017. – Vol. 114. – P. 189–210.
29. Botshekanan Dehkordi M., Khalilib S.M.R., Carrera E. Non-linear transient dynamic analysis of sandwich plate with composite face-sheets embedded with shape memory alloy wires and flexible core- based on the mixed LW (layer-wise) / ESL (equivalent single layer) models. *Composites Part B*. – 2016. – Vol. 87. – P. 59–74.
30. Осадчий Н.В., Малышев В.А. Шепель В.Т. Построение моделей статической и динамической прочности многослойных конструкций на основе вариационного исчисления // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника*. – 2019. – № 56. – С. 58–71.
31. Осадчий Н.В., Шепель В.Т. Исследование поперечно-го изгиба сотовой трехслойной панели с круговой осью. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2018. – № 1. – С. 86–93.

## References

1. Carrera E. Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2002, vol. 9 (2), pp.87-140.
2. Groh R.M.J., Weaver P.M. Static inconsistencies in certain axiomatic higher-order shear deformation theories for beams, plates and shells. *Composite Structures*, 2015, vol.120, pp.231-245.
3. Everstine G, Pipkin A. Stress channelling in transversely isotropic elastic composites. *Zeitung fuer angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1971, vol.22, pp.825 – 834.
4. Kreja Ir. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Central European Journal of Engineering*, 2011. vol.1(1), pp.59-80.
5. Atteshamuddin S. Sayyad, Yuwaraj M. Ghugal. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. *Composite Structures*, 2017, vol.171, pp. 486-504.
6. Srinivas S., Rao A.K. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 1970, vol. 6. pp.1463-1481.

7. Brischetto S., Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells. *Composites Part B*, 2017, vol.119, pp. 230 – 252.
8. Meyer-Piening H.R. Experiences with 'Exact' linear sandwich beam and plate analyses regarding bending, instability and frequency investigations. Proceedings of the Fifth International Conference On Sandwich Constructions, Zurich, Switzerland, September 5-7. 2000, I, pp.37-48.
9. Pagano N.J. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. *Journal of Composite Materials*, 1969, – vol.3, pp.389-411.
10. Pagano N.J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. *Journal of Composite Materials*, 1970, vol.4, pp. 20-34.
11. Groh R.M.J., Weaver P.M. A computationally efficient 2D model for inherently equi brated 3D stress predictions in heterogeneous laminated plates. Part I: Model formulation. *Composite Structures*, 2016, vol. 156, pp. 171-185.
12. Timoshenko C.P., Vojnovskij –Kriger S.. *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. *Moscow, Nauka*, 1966, 635 p.
13. Koroljov V.I. Sloistye anizotropnye plastinki i obolochki iz armirovannyh plastmass [Laminated anisotropic plates and shells made of reinforced plastics]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1965, 272 p.
14. Vasil'ev V.V. *Mehanika konstrukcij iz kompozicionnyh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1988, 264 p.
15. Whitney J.M., Pagano N.J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME*, 1970, 37, pp.1031-1036.
16. Dong S.B., Tso F.K.W. On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation. *Journal of Applied Mechanics. Trans, ASME* 39, 1972, pp.1091-1096.
17. Reissner E. Small bending and stretching of sandwich-type shells. *NACA Report No. 975*, 1950, pp.483-508.
18. Reddy J.N., Arciniega R.A. Shear deformation plate and shell theories: From Stavsky to Present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2004, vol. 11, pp. 535-582.
19. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, vol. 18, pp. 1031-1036.
20. Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Compute Structures*, 2005, vol. 83, pp. 2225-2237.
21. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear deformation theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 2015, vol. 2(1), pp. 45-53.
22. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. Raschjot mnogoslojnyh plastin i obolochek iz kompozicionnogo materiala [Calculation of multilayer plates and shells made of composite material]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1984, 264 p.
23. Grigoljuk Je.I., Chulkov P.P. Kriticheskie nagruzki trehslojnyh cilindriche-skih i konicheskikh obolochek [Critical loads of three-layer cylindrical and conical shells]. *Novosibirsk. Zapadno-sibirskoe knizhnoe izdatel'stvo*, 1966, 221 p.
24. Grigoljuk Je.I., Chulkov P.P. Ustojchivost' i kolebanija trjohslojnyh obolochek [Chulkov P.P. Stability and vibrations of three-layer shell]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1973, 172 p.
25. Bolotin V.V., Novichkov Ju.V. *Mehanika mnogoslojnyh konstrukcij* [Mechanics of multilayer structures]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1980, 375 p.
26. Nguyen Duc Thai, Michele D'Ottavio, Jean-Francois Caron. Bending analysis of laminated and sandwich plates using a layer-wise stress model. *Composite Structures*, 2013, vol. 96, pp. 135–142.
27. Carrera E., Pagani A., Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structures. *Composites Part B*, 2017, vol.111, pp.294 – 314.
28. Carrera E., Pagani A., Valvano S. Multilayered plate elements accounting for refined theories and node-dependent kinematics. *Composites. Part B*, 2017, vol.114, pp.189 – 210.
29. Botshekanan Dehkordi M., Khalilib S.M.R., Carrera E. Non-linear transient dynamic analysis of sandwich plate with composite face-sheets embedded with shape memory alloy wires and flexible core- based on the mixed LW (layer-wise) / ESL (equivalent single layer) models. *Composites Part B*, 2016, vol.87, pp.59-74.
30. Osadchij N.V., Malyshev V.A., Shepel' V.T. Postroenie modelej staticheskoj i dinamicheskoj prochnosti mnogoslojnyh konstrukcij na osnove variacionnogo ischislenija [Construction of models of static and dynamic strength of multilayer structures based on the calculus of variations]. *Vestnik PNIIPU. Ajerokosmicheskaja tehnika*, 2019, no. 56, pp. 58-71.
31. Osadchij N.V., Shepel' V.T. Issledovanie poperechnogo izgiba sotovoj trjoh-slojnoj paneli s krugovoj os'ju [Study of the transverse bending of a honeycomb three-layer panel with a circular axis]. *Problemy mashinostroenija i nadjozhnosti mashin*. 2018, no. 1, pp. 86-93.