



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.01

УДК 539.3

ГАШЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ С ПОМОЩЬЮ НЕСКОЛЬКИХ СТАЦИОНАРНЫХ АКТЮАТОРОВ

А.Ж. Атамуратов¹, И.Е. Михайлов², Н.А. Таран³

¹ООО «Петербургская продуктовая компания», Москва, Россия

²ФИЦ «Информатика и Управление» Российской академии наук, Москва, Россия

³НИУ Московский авиационный институт, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 03 мая 2018 г.
Принята: 26 июня 2018 г.
Опубликована: 29 июня 2018 г.

Ключевые слова:

гашение колебаний, стационарные точечные актюаторы, метод матричной прогонки, метод Марквардта.

АННОТАЦИЯ

Методы управления колебаниями элементов сложных механических систем, таких как струны, мембраны, балки, пластины, начали интенсивно развиваться с 70-х годов прошлого столетия. В частности, колебания балки моделируются уравнением в частных производных четвертого порядка, гиперболическим по Петровскому. Минимизируемым функционалом является интеграл энергии колеблющейся балки. Управление осуществляется с помощью некоторой функции, входящей в правую часть уравнения. Ранее было показано, что решение задачи существует при любом заданном времени гашения, однако с уменьшением этого времени нахождение оптимального управления усложняется. Для получения приближенных численных решений рассматривались так называемые точечные актюаторы. Было рассмотрено управление с помощью одного точечного актюатора, помещенного в некоторой точке балки, однако оказалось, что в этом случае осуществить гашение не всегда возможно. Поэтому было также рассмотрено управление с помощью точечного актюатора, перемещающегося по небольшому участку балки. Однако практическая реализация такого актюатора весьма затруднительна.

В настоящей работе численное гашение колебаний балки осуществляется с помощью нескольких неподвижных точечных актюаторов. Разработаны вычислительные алгоритмы на основе метода матричной прогонки и метода отыскания минимума функций многих переменных Марквардта. Для отыскания хорошего начального приближения при минимизации интеграла энергии используются эмпирические функции с небольшим числом переменных. Это позволило существенно уменьшить время расчета одного примера. Приводятся примеры расчетов гашения колебаний с различным числом актюаторов. Показано, что амплитуда колебаний любых управляющих функций возрастает с уменьшением заданного времени гашения. Приводятся примеры гашения колебаний при наличии ограничений на управляющие функции, в этом случае существует минимальное время гашения. Рассмотрено гашение колебаний в случае, когда на разных временных промежутках гашения колебаний включаются разные комбинации актюаторов.

© ПНИПУ

© Атамуратов Андрей Жиенбаевич – кандидат технических наук, ведущий специалист, e-mail: goofydog@mail.ru
Михайлов Игорь Ефимович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: mikh_igor@mail.ru
Таран Николай Алексеевич – студент, e-mail: n1ckolaytaran@gmail.com

Andrey Zh. Atamuratov – CSc in Technical Sciences, Leading Specialist, e-mail: goofydog@mail.ru
Igor E. Mikhailov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher, e-mail: mikh_igor@mail.ru
Nikolay A. Taran – Student, e-mail: n1ckolaytaran@gmail.com



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

NUMERICAL DAMPING OF OSCILLATIONS OF BEAMS BY USING MULTIPLE POINT ACTUATORS

A.Zh. Atamuratov¹, I.E. Mikhailov², N.A. Taran³

¹“PPK” Ltd, Moscow, Russian Federation

²Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russian Federation

³Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 May 2018
Accepted: 26 June 2018
Published: 29 June 2018

Keywords:

oscillations damping, fixed point actuators, matrix sweep method, Marquardt minimization method.

ABSTRACT

Methods of damping the oscillations of complex mechanical systems' elements, such as strings, membranes, beams, plates, have intensively been developing since the 1970s. In particular, the beam oscillations are modeled by the fourth-order partial differential equation, which is Petrovsky-hyperbolic. The minimized functional is the energy integral of an oscillating beam. Control is implemented via certain function appearing in the right side of the equation. Previously, it was shown that the solution of the problem exists for any given damping time, but as soon as this time decreases, the optimal control becomes more complicated. To obtain approximate numerical solutions, the so-called point actuators were considered. Control was considered via single point actuator placed at some point of the beam, but in this case it turned out that it is not always possible to dampen it. Therefore, control was also considered via point actuator moving along a small section of the beam. However, the implementation of such an actuator is very difficult.

In this work, the numerical damping of beam oscillations is implemented via several fixed point actuators. Computational algorithms have been developed on the basis of the matrix sweep method and the second order Marquardt minimization method of finding the minimum of functions of many variables. To find a good initial approximation, when minimizing the energy integral, empirical functions with a small number of variables are used. This made it possible to significantly reduce the calculation time of the task. The examples of damping the oscillations via a different number of actuators are given. It is shown that the amplitude of the oscillations of any control functions increases with the reduction of the given damping time. The examples of damping the oscillations in the presence of constraints on control functions are given; in this case the minimum damping time exists. The damping of oscillations is considered also in the case when different combinations of actuators are switched on at different time intervals of oscillation damping.

© PNRPU

1. Постановка задачи

Целью данной работы является разработка численных методов гашения вынужденных поперечных колебаний балки с помощью нескольких стационарных актюаторов. Поперечные колебания балки описываются гиперболическим по Петровскому уравнением [1, 2]

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + g(x, t), (x, t) \in \prod = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}. \quad (1.1)$$

Здесь время t и линейный размер x отнесены к характерным величинам t^* и x^* . Начальные отклонение и скорость перемещения балки

$$u|_{t=0} = h_0(x), u_t|_{t=0} = h_1(x), 0 \leq x \leq l \quad (1.2)$$

мы будем рассматривать как начальные возмущения. На концах балки накладываются условия шарнирного закрепления

$$u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = u_{xx}|_{x=l} = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Энергия колеблющейся балки находится как

$$L(t) = \int_0^l [u_t^2(x, t) + a^4 u_{xx}^2(x, t)] dx. \quad (1.4)$$

Задача управления заключается в возможности перевести систему (1.1)–(1.3) из начального состояния в некое произвольное состояние. Следуя Ж. Лионсу [3], данное свойство системы будем называть строгой управляемостью. Задача гашения колебаний заключается в том, что бы найти управляющую функцию $g(x, t)$, переводящую балку из состояния (1.2) в состояние

$$u|_{t=T} = 0, u_t|_{t=T} = 0, 0 \leq x \leq l \quad (1.5)$$

за время T .

Таким образом, задача гашения колебаний заключается в нахождении оптимальной управляющей функции $g(x, t) \in L_2((0, l) \times (0, T))$ такой, что для любых начальных возмущений $h_0(x) \in W_2^1(0, l)$, $h_1(x) \in L_2(0, l)$

$$L(T) = 0. \quad (1.6)$$

Методы гашения колебаний элементов сложных механических систем начали интенсивно развиваться в 70-х годах XX века. Наиболее значимыми были работы Д. Лагнесса [4], Д. Рассела [5], А. Бутковского [6], в которых рассматривалась задача гашения колебаний струны и получены условия существования решения

задачи. В частности, А. Бутковский предложил использовать для гашения колебаний струны точечный актьюатор, моделируемый функцией $g(x, t) = w(t)\delta(x - x_0)$, где δ – дельта-функция Дирака; x_0 – точка помещения актьюатора; $w(t)$ – управляющая функция. Однако в дальнейшем он показал, что в случае возникновения решения (1.1) в виде стоячих волн, если x_0 попадает в узел стоячих волн, то решения задачи может и не существовать. Чтобы избежать такой ситуации, Л. Муравей [7, 8] предложил использовать точечный актьюатор, перемещающийся по небольшому участку струны, однако практическая реализация такого актьюатора весьма затруднительна. В работе [9] показано, что решение задачи существует для любого времени T , однако с уменьшением T нахождение оптимального управления усложняется. Исследования по гашению колебаний различных механических систем продолжают активно развиваться вплоть до настоящего времени [10–19].

В данной работе рассматривается возможность гашения колебаний балки с использованием нескольких стационарных точечных актьюаторов. В качестве управляющей функции будем рассматривать p стационарных точечных актьюаторов

$$g(x, t) = \sum_{i=1}^p w_i(t)\delta(x - x_i), \quad (1.7)$$

где $w_i(t), i = 1, \dots, p$ – управляющие функции; δ – дельта-функция Дирака. Мы будем предполагать, что $w_i(t) \in L_2(0, T), i = 1, \dots, p$.

2. Численное решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний упругой балки

Уравнение (1.1) можно свести к системе двух уравнений второго порядка [20, 21]

$$\begin{cases} u_t = av_{xx}, \\ v_t = -au_{xx} + \sum_{i=1}^p f_i(x, t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$f_i(x, t) = \begin{cases} w_i(t) \left(-\frac{x}{al}(l - x_i) \right), & x < x_i, \\ w_i(t) \left(\frac{1}{a}(x - x_i) - \frac{x}{al}(l - x_i) \right), & x \geq x_i. \end{cases} \quad (2.2)$$

Начальные и граничные условия переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h_0(x), \\ v(x, 0) &= \frac{1}{a} \int_0^x \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta d\xi - \frac{x}{al} \int_0^l \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta d\xi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, u(l, t) = 0, v(0, t) = 0, \\ v(l, t) &= \int_0^l \sum_{i=1}^p f_i(l, t) dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для численного интегрирования (2.3), (2.4) будем использовать метод трапеций [22].

Построим конечно-разностную схему для приближённого решения системы (2.1). Разобьём рассматриваемую область на прямоугольные ячейки параллельными прямыми $x_m = m \cdot h_x, m = 0, \dots, N_x, t_n = n \cdot h_t, n = 0, \dots, N_T$, где $h_x = \frac{l}{N_x}$ и $h_t = \frac{T}{N_T}$. На этой сетке введем сеточные функции $\{u_m^n, v_m^n\}$. Аппроксимируем уравнения (2.2) со вторым порядком следующими конечно-разностными соотношениями [23]:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{h_t} = \frac{a}{2} \left[\frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h_x^2} + \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right], \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{h_t} = -\frac{a}{2} \left[\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h_x^2} + \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right] + \frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} y_m^n &= \begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix}, \alpha = \frac{2h_x^2}{ah_t}, \beta = \frac{h_x^2}{a}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -f_m^n - f_m^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

то систему (2.2) можно записать в векторной форме

$$\begin{aligned} y_{m-1}^{n+1} - [2E + \alpha B] y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} &= \\ = - \left(y_{m-1}^n - [2E + \alpha B] y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где E – единичная матрица. Положим $C = 2E + \alpha B$, $\tilde{C} = 2E - \alpha B$ и $F_m^n = y_{m-1}^n - \tilde{C}y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V$. Тогда наша система запишется следующим образом:

$$y_{m-1}^{n+1} - Cy_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = -F_m^n. \quad (2.8)$$

Заметим, что схема, которую будем решать методом матричной прогонки [24–27], является безусловно устойчивой [20]. Аппроксимируем управляющие функции $w_i(t), i = 1, \dots, p$ кусочно-постоянными функциями: $\forall t \in [t_j, t_{j+1})$ положим $w_i(t) = w_j^i$, где $w_j^i = \text{const}, i = 1, \dots, p, j = 0, \dots, N_{T-1}$. Тогда интеграл энергии балки будет являться функцией переменных w_j^i .

$$\begin{aligned} L(T) &= L(w_0^1, \dots, w_{N_T}^p) = \\ &= \int_0^l \left[u_t^2(w_0^1, \dots, w_{N_T}^p, x, T) + a^4 u_{xx}^2(w_0^1, \dots, w_{N_T}^p, x, T) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для численного нахождения интеграла энергии (2.9) будем использовать метод Симпсона [22].

3. Минимизация интеграла энергии колеблющейся балки

Оптимальные значения $w_0^1, \dots, w_{N_T}^p$, минимизирующие (2.9) с заданной точностью ϵ , и будут искомым решением задачи. Для решения задачи гашения колебаний будем использовать метод Марквардта [28, 29].

При больших размерах конечно-разностной сетки или при использовании достаточно большого числа актюаторов численное нахождение управляющих функций путем использования прямых методов минимизации второго порядка может быть вычислительно сложной задачей, требующей для своей реализации много времени [30, 31]. Однако возможно существенно сократить время расчета, найдя хорошее начальное приближение из минимизации некоторой эмпирической функции, зависящей от небольшого числа параметров.

Основная идея использования эмпирических функций состоит в замене исходной минимизируемой функции другой непрерывной функцией $w(t)_{EMP}$, зависящей от небольшого числа параметров. Предположим, что каждая из управляющих функций имеет следующий вид:

$$w(e_1, \dots, e_7, t)_{EMP} = e_1 \sin(e_2 t + e_3) + e_4 \sin(e_5 t + e_6) \sin(e_7 t), \quad (3.1)$$

где постоянные значения e_1, \dots, e_7 еще не известны. Введем специальную функцию преобразования

$$L_{EMP}(e_1^1, \dots, e_7^p) = L(w(e_1^1, \dots, e_7^1, 0 \cdot h_1)_{EMP}, \dots, w(e_1^p, \dots, e_7^p, N_T \cdot h_1)_{EMP}). \quad (3.2)$$

Для нахождения эмпирических коэффициентов $e_1^1, \dots, e_7^1, \dots, e_1^p, \dots, e_7^p$ будем решать задачу нахождения минимума функции (3.2), используя метод минимизации Марквардта. Полученные управляющие функции используются в качестве начального приближения для минимизации (2.9) с заданной точностью ϵ .

4. Примеры расчетов

Пример 1. Начальные условия $h_0(x) = 0,1 \sin(2\pi x)$, $h_1(x) = 0$. Входные параметры $a = 1, l = 1$, время, требуемое для гашения, зададим $T = 0,5$, размеры конечно-разностной сетки $N \times K = 20 \times 250$, тогда $h_x = 0,05$, $h_t = 0,002$. Будем считать, что задача гашения колебаний решена, если $L(w(t)) \leq \epsilon$, где $\epsilon = 10^{-4}$.

Актюатор, установленный в точку $x_0 = 0,5$, не может погасить колебания балки, поскольку точка $x_0 = 0,5$ является узлом стоячих волн. Это видно на рис. 1.

Для наглядности во всех примерах будем указывать погрешность вычисления интеграла энергии в экспоненциальном виде в правом верхнем углу.

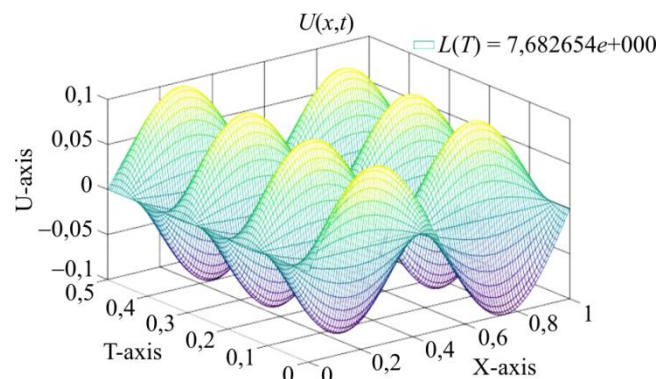


Рис. 1. Процесс гашения колебаний с помощью актюатора в точке $x_0 = 0,5$ (гашение не происходит)
Fig. 1. Damping of oscillations of a beam by using single point actuator in $x_0 = 0,5$ (damping is not possible)

Рассмотрим те же условия примера, но для гашения колебаний используем два стационарных актюатора, стоящих в точках $x_1 = 0,25, x_2 = 0,75$ соответственно. Условие решения задачи перепишем в виде $L(w_1(t), w_2(t)) \leq \epsilon = 10^{-4}$. Размер и шаги конечно-разностной сетки оставим прежними.

Решим задачу для двух случаев: с использованием прямой минимизации функции (2.9) с начальным управлением вида $w_1(t) \equiv 0, w_2(t) \equiv 0$ и с использованием эмпирических функций (3.2) для получения начального приближения. В первом случае задача была решена с погрешностью $L(w_1(t), w_2(t)) = 5,0701 \cdot 10^{-13}$.

Во втором случае, используя метод минимизации Марквардта, найдем следующие эмпирические коэффициенты e :

$$e = \begin{pmatrix} 1000 & -0,1196 & 0,0317 & 1000 & -6,6844 & 2,9977 & -6,5086 \\ 1000 & -2,7326 & 3,2003 & 1000 & -2,5081 & -3,1785 & 9,9958 \end{pmatrix}$$

Подставив их в (3.2), получим управляющие функции $w_1(t)_{EMP}, w_2(t)_{EMP}$, позволяющие решить систему (2.1) с погрешностью $L_{EMP}(e_1^1, \dots, e_7^2) = 0,32495$. Далее возьмем их в качестве начального приближения и повторно используем метод Марквардта для окончательного нахождения управляющих функций $w_1(t), w_2(t)$. В итоге мы минимизировали значение интеграла энергии балки (2.9) с погрешностью $L(w_1(t), w_2(t)) = 4,8804 \cdot 10^{-13}$.

Графики значений функции $u(x, t)$, иллюстрирующей процесс гашения колебаний балки, и итоговый вид управляющих функций $w_1(t)$ и $w_2(t)$ для обоих случаев изображены на рис. 2 и рис. 4 соответственно. На рис. 3 ото-

бражено, как ведет себя балка в точках приложения актюаторов в процессе гашения колебаний в обоих случаях.

Тем самым задача решена за установленное время $T = 0,5$. Наглядно видно, что, несмотря на одинако-

вые начальные условия и параметры сетки, вид управляющих функций различается в зависимости от начального приближения и процесс гашения протекает по-разному.

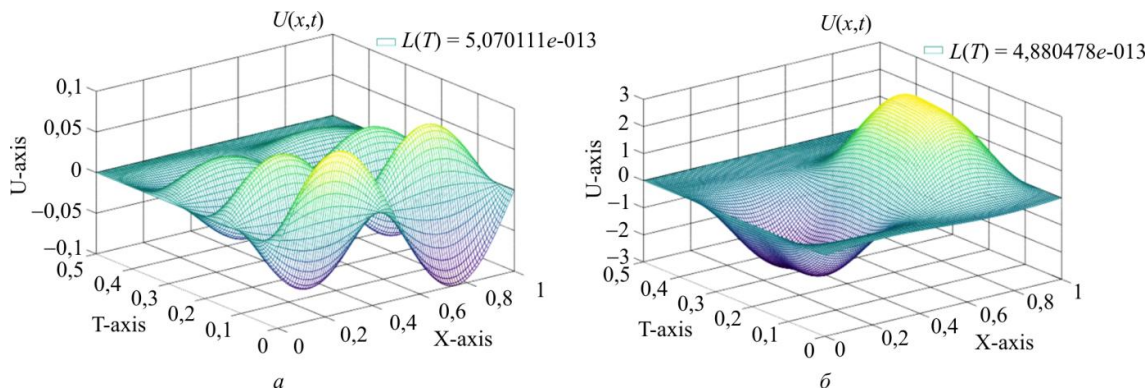


Рис. 2. Процесс гашения колебаний с помощью двух актюаторов в точках $x_1 = 0,25, x_2 = 0,75$ (а) при начальных значениях $w_0^1, \dots, w_{N_T}^2 \equiv 0$; (б) с эмпирическим приближением (3.2)

Fig. 2. Damping of oscillations of a beam by using two point actuators placed in $x_1 = 0,25, x_2 = 0,75$ by control functions obtained (a) with initial minimization values $w_0^1, \dots, w_{N_T}^2 \equiv 0$; (b) via empirical approach (3.2)

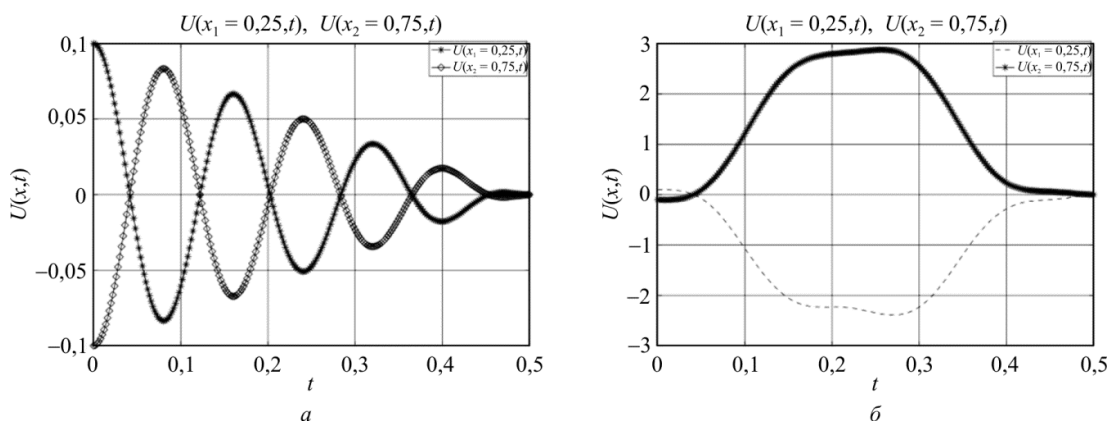


Рис. 3. Процесс гашения колебаний в точках приложения актюаторов $x_1 = 0,25, x_2 = 0,75$ (а) с начальными значениями $w_0^1, \dots, w_{N_T}^2 \equiv 0$; (б) с эмпирическим приближением (3.2)

Fig. 3. Damping of oscillations of a beam at actuator points $x_1 = 0,25, x_2 = 0,75$ with initial minimization values $w_0^1, \dots, w_{N_T}^2 \equiv 0$; (b) with empirical approach (3.2)

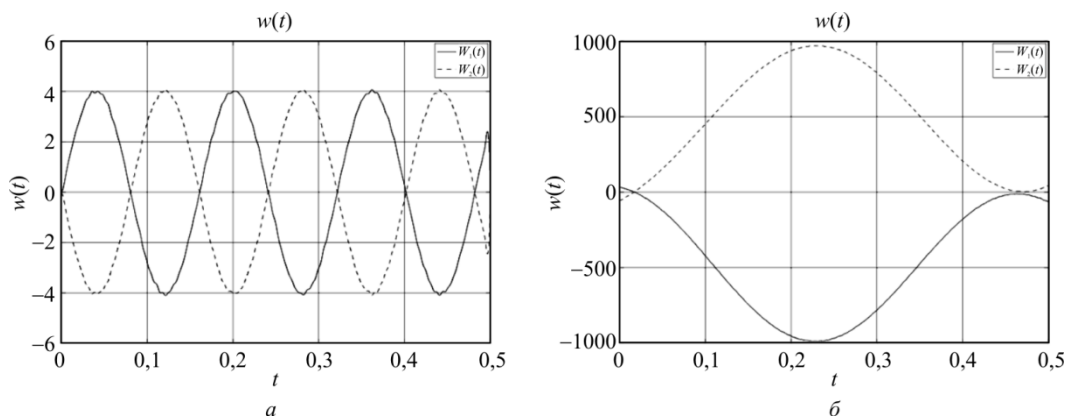


Рис. 4. Управляющие функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$, полученные с начальными значениями $w_0^1, \dots, w_{N_T}^2$ (а); с эмпирическим приближением (3.2) (б)

Fig. 4. Control functions $w_1(t)$ and $w_2(t)$ obtained (a) with initial minimization values $w_0^1, \dots, w_{N_T}^2$, (b) via empirical approach (3.2)

Пример 2. Начальные условия $h_0(x) = 0,1 \sin(2\pi x)$, $h_1(x) = 0$. Входные параметры $a=1, l=1$, размеры конечно-разностной сетки $N \times K = 20 \times 50$, тогда $h_x = 0,05$, $h_t = 0,002$. Для гашения колебаний используем 4 актюатора, стоящие в точках $x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8$ соответственно. Условием гашения колебаний, как и прежде, будем полагать $L(w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t)) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$. Зададим время гашения равным $T = 0,1$. По умолчанию начальное приближение для всех управляющих функций будем принимать нулевым.

На рис. 5 изображены процесс гашения колебаний $u(x,t)$ и управляющие функции $w_i(t), i=1, \dots, 4$ соответственно.

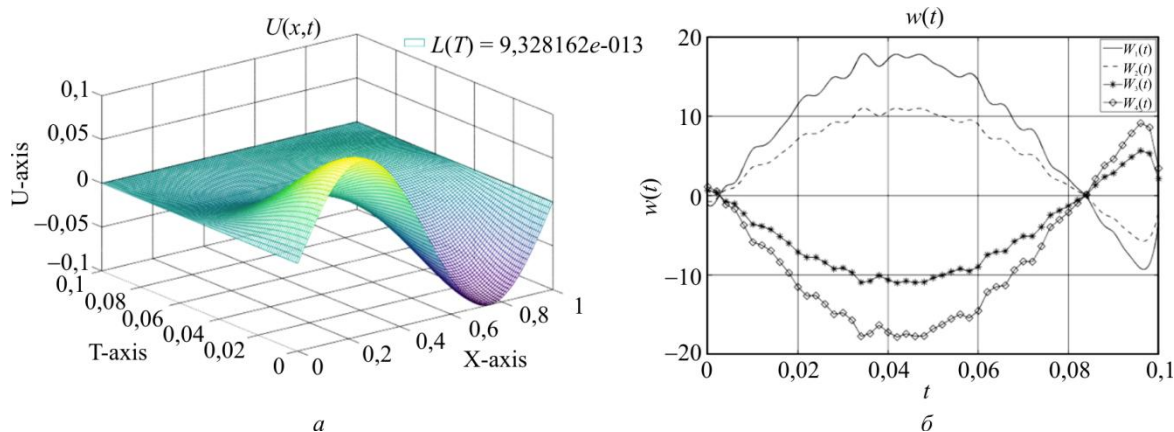


Рис. 5. Процесс гашения колебаний с помощью четырех актюаторов в точках $x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8$ за время $T = 0,1$ (а); управляющие функции $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ и $w_4(t)$ (б)

Fig. 5. Damping of oscillations of a beam by using four point actuators placed in $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8$ within time $T = 0.1$ (a); control functions $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ and $w_4(t)$ (b)

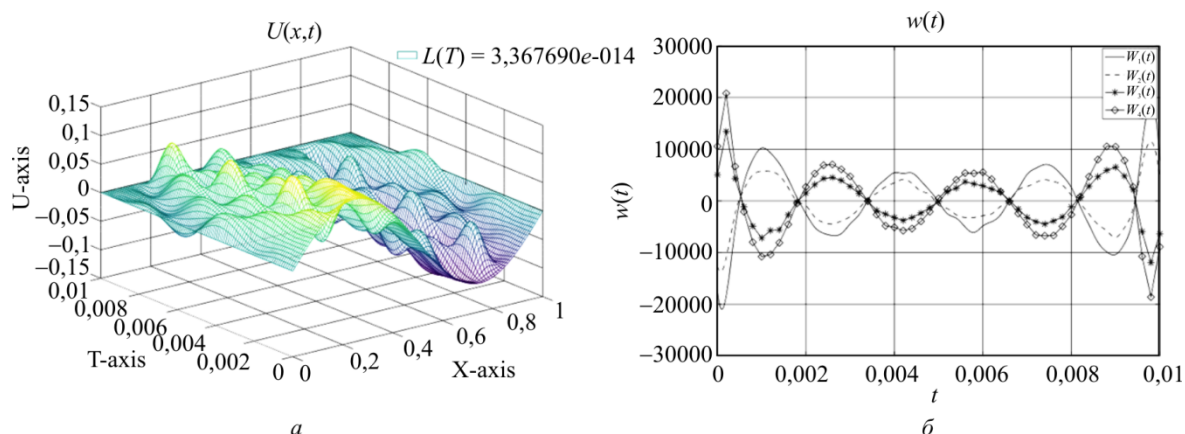


Рис. 6. Процесс гашения колебаний с помощью четырех актюаторов в точках $x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8$ за время $T = 0,01$ (а); управляющие функции $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ и $w_4(t)$ (б)

Fig. 6. Damping of oscillations of a beam by using four point actuators placed in $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8$ within time $T = 0.01$ (a); control functions $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ and $w_4(t)$ (b)

Рассмотрим те же условия примера, но положим $T = 0,01$. На рис. 6 изображены процесс гашения и управляющие функции соответственно.

На рис. 4, а и рис. 5, а можно хорошо видеть различия в процессе гашения колебаний в зависимости от заданного времени гашения T . Так, при достаточно большом времени процесс гашения протекает более плавно. И наоборот, при маленьком времени на балке возникает множество микроколебаний, которые затем сглаживаются управляющими функциями. Амплитуда колебаний любых управляющих функций возрастает вместе с уменьшением заданного времени гашения. На рис. 7 изображена зависимость максимальной амплитуды каждой из управляющих функций от времени T .

Таким образом, можно заметить, что амплитуда управляющих функций растет почти экспоненциально при приближении T к нулю.

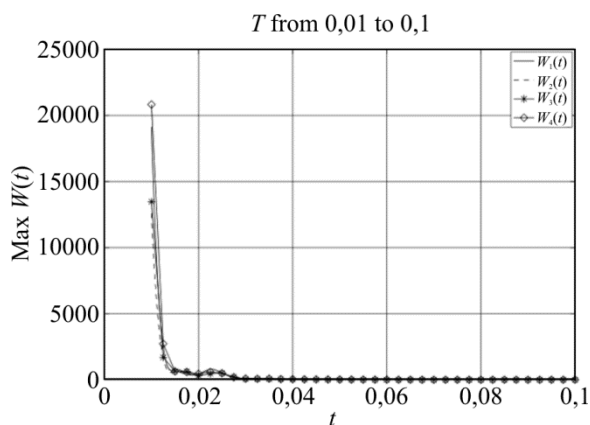


Рис. 7. Зависимость максимальной амплитуды управляющих функций от $T \in [0,01;0,1]$

Fig. 7. Dependence of the maximum amplitude of control functions on time $T \in [0,01;0,1]$

Пример 3. Рассмотрим случай, когда на управляющие функции накладываются ограничения. Данный случай является более приближенным к практической реализации, так как при проектировании механизмов актюаторов необходимо закладывать предельно допустимую мощность приводов. Для нахождения ограниченных управляющих функций необходимо использовать методы нахождения условного минимума. В этой работе используется метод внешних штрафов с использованием метода Марквардта для решения соответствующей задачи нахождения безусловного минимума.

Так как при приближении времени гашения к нулю максимальная амплитуда каждой из управляющих функций начинает возрастать, необходимо подбирать такое время гашения, при котором $L(w_1(t), \dots, w_p(t)) \leq \varepsilon$ и $w_i(t) \in [a; b]$. Назовем минимальное время T , при котором выполняются оба

условия оптимальным временем гашения. Время гашения можно уменьшить либо при помощи расширения допустимых границ управляющей функции, либо увеличением числа актюаторов.

Пусть $h_0(x) = 0, 2x(1-x)$, $h_1(x) = 0$. Входные параметры $a = 1, l = 1$, размер сетки $N \times K = 40 \times 120$. Будем считать, что задача гашения колебаний решена, если $L(w_1(t), \dots, w_p(t)) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$.

Покажем, что за счет увеличения числа актюаторов при неизменных ограничениях возможно уменьшить минимальное время гашения. Первоначально будем решать задачу с использованием одиночного стационарного актюатора, помещенного в $x_1 = 0,5$. На управляющую функцию наложим ограничение $w(t) \in [-2; 2]$. Минимальное время, требуемое для гашения, $T = 0,2265$.

Вид управляющей функции $w(t)$ изображен на рис. 8, а.

Теперь решим эту же задачу с использованием двух актюаторов, помещенных в $x_1 = 0,25$ и $x_2 = 0,75$ соответственно. Ограничения, налагаемые на управляющие функции, оставим прежними. В этом случае удастся сократить минимальное время, требуемое для гашения, до $T = 0,1825$.

Управляющие функции $w_1(t), w_2(t)$ изображены на рис. 8, б.

И, наконец, решим задачу с использованием 4 актюаторов в точках $x_1 = 0,25, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,75$. Наложим прежние ограничения на все управляющие функции. В этом случае минимальное время удалось сократить до $T = 0,1237$.

На рис. 9 изображены процесс гашения колебаний и управляющие функции соответственно.

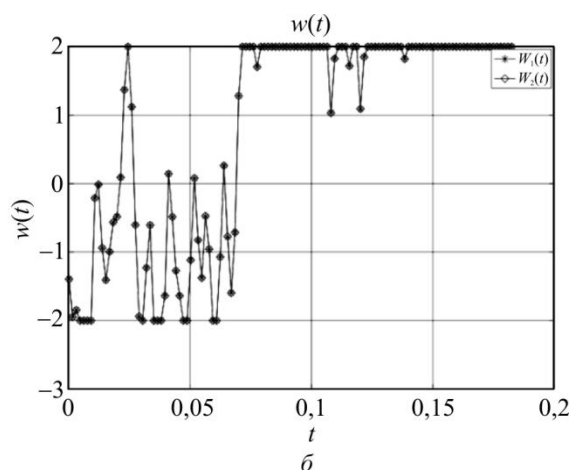
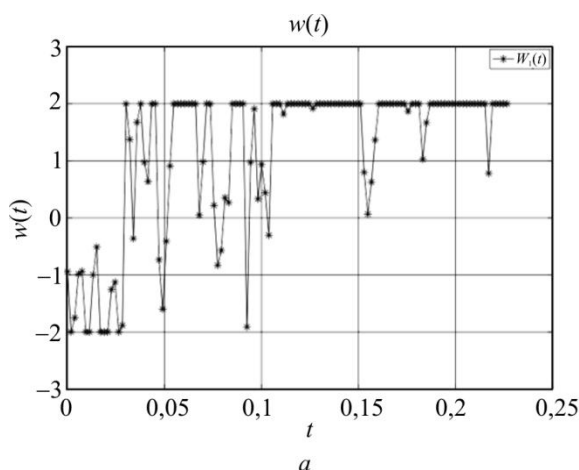


Рис. 8. Управляющие функции $w_i(t)$ с ограничениями $w_i(t) \in [-2; 2], i = 1, \dots, p$

для (а); $p = 1, T = 0,2265$, для (б) $p = 2, T = 0,1825$

Fig. 8. Control functions $w_i(t)$ with constraints $w_i(t) \in [-2; 2], i = 1, \dots, p$

for (а); $p = 1, T = 0,2265$, (б) $p = 2, T = 0,1825$

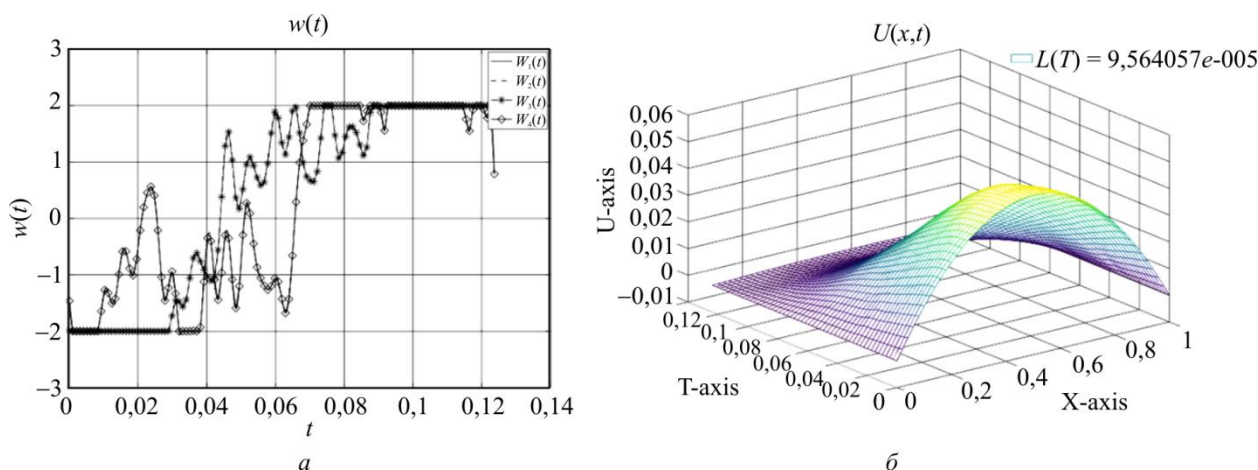


Рис. 9. Управляющие функции $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ и $w_4(t)$ с ограничениями $w_1(t)w_2(t)w_3(t)w_4(t) \in [-2;2]$ для $T = 0,1237$ (а); процесс гашения колебаний с помощью четырех актюаторов в точках $x_1 = 0,25, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,75$ за время $T = 0,1237$ с ограничениями $w_1(t)w_2(t)w_3(t)w_4(t) \in [-2;2]$ (б)
 Fig. 9. Control functions $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ and $w_4(t)$ with constraints $w_1(t)w_2(t)w_3(t)w_4(t) \in [-2;2]$ for $T = 0.1237$ (a); damping of oscillations of a beam by using four point actuators placed in $x_1 = 0.25, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.75$ within time $T = 0.1237$ with constraints $w_1(t)w_2(t)w_3(t)w_4(t) \in [-2;2]$ (b)

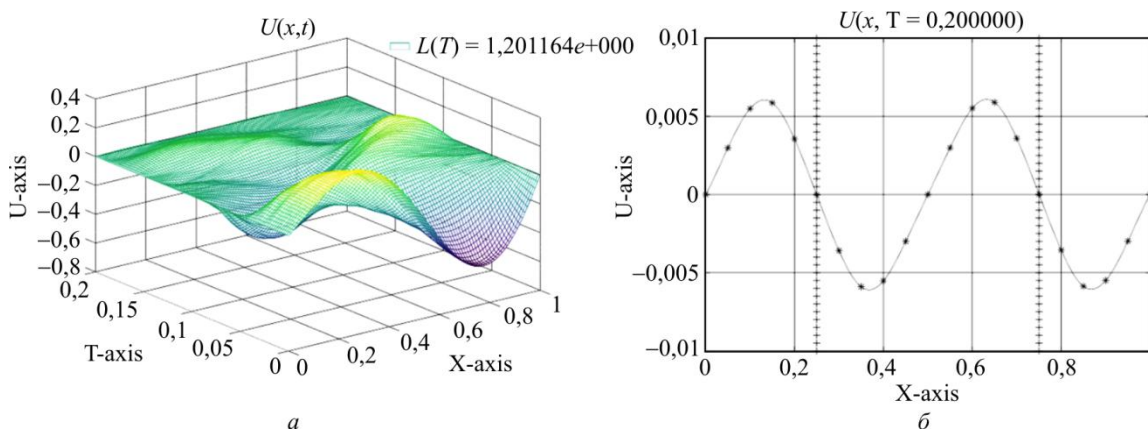


Рис. 10. Процесс гашения колебаний с помощью двух актюаторов в точках $x_1 = 0,25, x_2 = 0,75$ (частичное гашение) (а); срез значений функции $u(x,t), t = T = 0,2$ (окончательного гашения не происходит) (б)

Fig. 10. Damping of oscillations of a beam by using two point actuators placed in $x_1 = 0.25, x_2 = 0.75$ (partial damping) (a), function $u(x,t)$ values cut at $T = 0.2$ (new nodes of standing waves appear at all points of the actuators, further damping is not possible) (b)

Пример 4. Для гашения колебаний в случае некоторых начальных возмущений необходимо использование на разных промежутках времени разных групп актюаторов. Начальные условия $h_0(x) = 0,25 \exp(x) \sin(2\pi x)$, $h_1(x) = 0$. Входные параметры $a = 1, l = 1$, время, требуемое для гашения, зададим $T = 0,2$, размеры конечно-разностной сетки $N \times K = 20 \times 250$, тогда $h_x = 0,05$, $h_t = 0,0008$. Будем считать, что задача гашения колебаний решена, если $L(w_1(t), \dots, w_p(t)) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$.

На временном срезе $T = 0,2$ (рис. 10, б) заметно, что два актюатора, установленные в точках $x_1 = 0,25$ и $x_2 = 0,75$, не могут погасить начальное возмущение (рис. 10, а).

Для гашения колебаний разделим задачу на два временных промежутка. Будем использовать 4 актюатора, установленные в точках $x_1 = 0,15, x_2 = 0,25, x_3 = 0,65, x_4 = 0,75$, однако на первом промежутке $T \in [0; 0,1]$ будем использовать лишь два из них в точках x_2 и x_4 . Другие два актюатора в точках x_1 и x_3 на этом промежутке оставим неактивными.

Минимизируя функцию (3.2), получим эмпирические коэффициенты e :

$$e = \begin{pmatrix} 1000 & -3,2196 & 3,0779 & 1000 & -5,9374 & -0,0239 & 7,5418 \\ 1000 & 30,536 & 3,0844 & 1000 & 25,405 & 0,1781 & 29,208 \end{pmatrix}$$

Далее, получив $w_2(t)_{EMP}, w_4(t)_{EMP}$ и используя их в качестве начального приближения для $w_2(t), w_4(t)$, решим задачу с погрешностью $L(w_2(t), w_4(t)) = 1,1797$. На рис. 11 изображен процесс частичного гашения колебаний на временном промежутке $T \in [0; 0,1]$ и временной срез на $T = 0,1$.

На втором временном промежутке $T \in [0,1; 0,2]$ для гашения колебаний используем оставшиеся два актюатора в точках $x_1 = 0,15, x_3 = 0,65$. Предыдущие два актюатора в точках x_2 и x_4 оставим неактивными. Будем использовать решение предыдущей подзадачи в качестве нового начального возмущения. Для начальной скорости в этом случае положим

$v(l,t)$ предыдущей подзадачи как $v(0,t)$ второй подзадачи.

Минимизируя (3.2), получим e :

$$e = \begin{pmatrix} 1000 & 2,8741 & 3,1415 & 1000 & 10,572 & 0,9895 & 3,0815 \\ 1000 & 6,8311 & 3,1421 & 1000 & 13,532 & -2,3983 & -7,1904 \end{pmatrix}$$

Используя $w_1(t)_{EMP}, w_3(t)_{EMP}$ как начальное приближение для $w_1(t)$ и $w_3(t)$, получим погрешность $L(w_1(t), w_3(t)) = 2,2163 \cdot 10^{-13}$ для второй подзадачи. На рис. 12 изображены процесс гашения колебаний на временном промежутке $T \in [0,1; 0,2]$ (используется шкала для функции $u(x,t)$, в 20 раз меньшая, чем на рис. 11) и временной срез на $T = 0,2$.

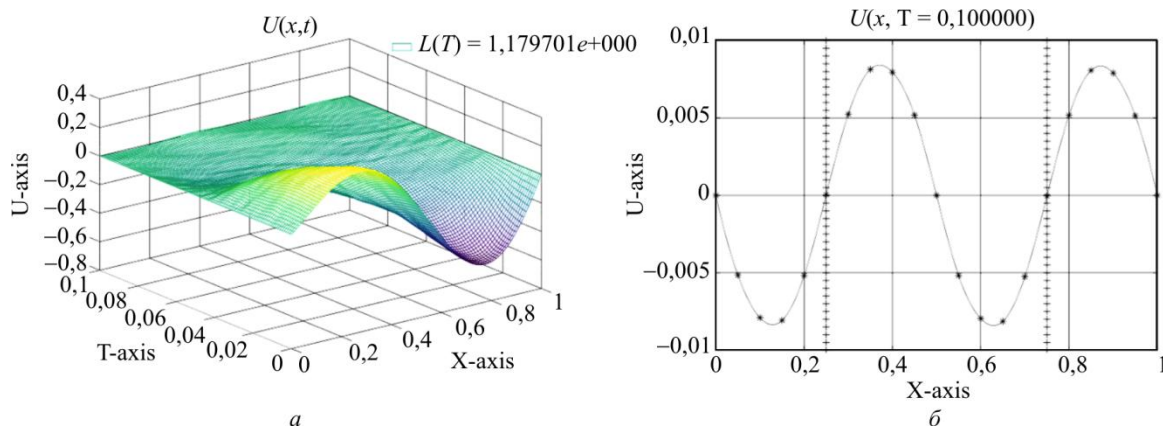


Рис. 11. Процесс гашения колебаний с помощью двух актюаторов в точках $x_2 = 0,25, x_4 = 0,75$ на промежутке $T \in [0; 0,1]$ (частичное гашение) (а); срез значений функции $u(x,t), t = T = 0,1$ (окончательного гашения не происходит) (б)

Fig. 11. Damping of oscillations of a beam by using two point actuators placed in $x_2 = 0.25, x_4 = 0.75$ on $T \in [0; 0,1]$ (partial damping) (a), function $u(x,t)$ values cut at $T = 0.1$ (new nodes of standing waves appear at all points of the actuators, further damping is not possible) (b)

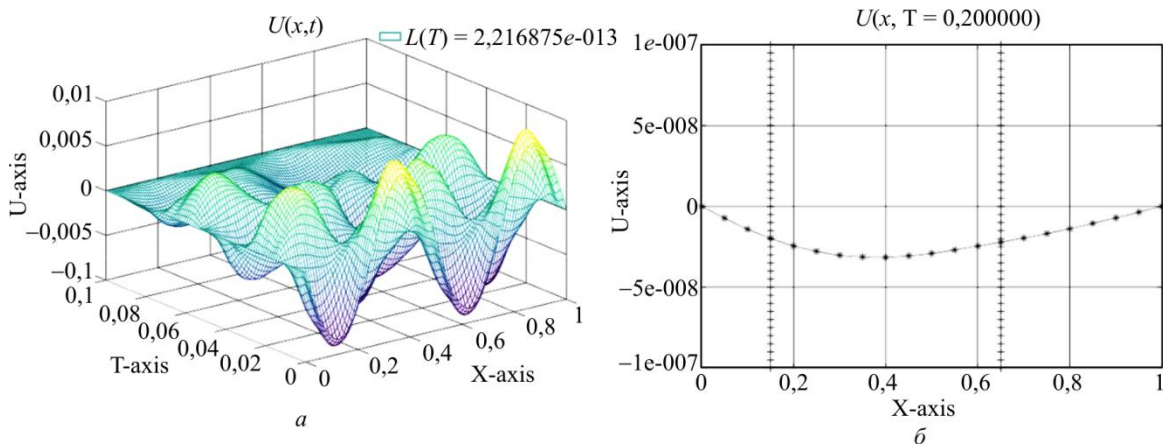


Рис. 12. Процесс гашения колебаний с помощью двух актюаторов в точках $x_1 = 0,15, x_3 = 0,65$, на промежутке $T \in [0,1; 0,2]$ (а); срез значений функции $u(x,t), t = T = 0,2$ (б)

Fig. 12. Damping of oscillations of a beam by using two point actuators placed in $x_1 = 0.15, x_3 = 0.65$ on $T \in [0,1; 0,2]$ (a); function $u(x,t)$ values cut at $T = 0.2$ (b)

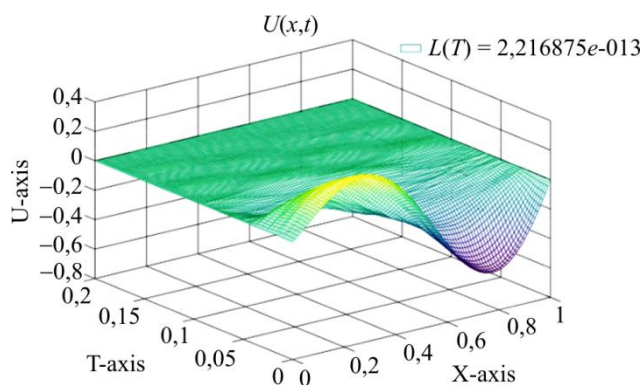


Рис. 13. Полный процесс гашения колебаний с помощью четырех актюаторов: $x_1 = 0,15, x_2 = 0,25, x_3 = 0,65, x_4 = 0,75$
 Fig. 13. Complete damping of oscillations of a beam by using four point actuators placed in $x_1 = 0,15, x_2 = 0,25, x_3 = 0,65, x_4 = 0,75$

Таким образом, задача решена за время $T = 0,2$ при помощи двух актюаторов $x_2 = 0,25$ и $x_4 = 0,75$ на $T \in [0; 0,1]$ и двух актюаторов $x_1 = 0,15$ и $x_3 = 0,65$

Библиографический список

1. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
2. Тимошенко Н.В. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
3. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
4. Lagness J. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // SIAM Journ. Control and Optim. – 1983. – Vol. 1. – No. 1. – P. 68–85.
5. Russel D. Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations // SIAM Review. – 1978. – Vol. 20. – No. 5. – P. 639–739.
6. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
7. Muravey L.A. On the suppression on membrane oscillations // Summaries of IUTAM Symposium «Dynamical problems of rigid-elastic system». – М., 1990. – P. 50–51.
8. Muravey L.A., Mathematical problems on the damp of vibration // Preprint of IFAC Conference “Identification and system parameter estimations”. – Budapest, 1991. – Vol. 1. – P. 746–747.
9. Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – № 9. – С. 587–598. – URL: <http://novtex.ru/mech/mech/2016/archiv09.html> (дата обращения: 11.03.2018).
10. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
11. Lions J.L. Exact controllability for distributed systems: some trends and some problems. In Applied and Industrial Mathematics, R. Spigler, ed., Kluwer, Dordrecht. – 1991. – P. 59–84.
12. Lions J.L. On some hyperbolic equation with a pressure term // In Partial Differential Equations and Related Subjects, ed. M. Miranda. – Longman Scientific and Technical. Harlow, UK. – 1992. – P. 196–208.
13. Lions J.L. Very rapid oscillations and control // In HERMIS '96, Proceedings of the Third Hellenic-European Con-

ference on Mathematics and Informatics, ed. E.A. Lipitakis, EA Publisher, Athens, 1997. – P. 1–10.

на $T \in [0,1; 0,2]$ с итоговой погрешностью $L(w_1(t), \dots, w_p(t)) = 2,2163 \cdot 10^{-13}$. Объединив $u_1(x,t)$, и $u_2(x,t)$ в $u(x,t)$ проиллюстрируем на рис. 13 полный процесс гашения колебаний в этой задаче.

Таким образом, разработан численный метод гашения колебаний балки с помощью нескольких неподвижных точечных актюаторов. Он позволяет провести исследования процесса гашения колебаний при различном времени T .

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 17-19-01247.

Acknowledgements

The work is supported by the grant of the Russian Science Foundation Nr. 17-19-01247.

14. Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 5. – С. 692–704.
15. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при свободном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Докл. Акад. наук. – 2005. – Т. 400, № 5. – С. 587–591.
16. Костин Г.Б., Саурин В.Б. Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Докл. Акад. наук. – 2006. – Т. 408, № 6. – С. 750–753.
17. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х. Применение обобщенного принципа Гаусса к решению задачи о гашении колебаний механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 2. – С. 20–25.
18. Солтаханов Ш.Х. Гашение колебаний консоли // Вестн. С.-Петербург, ун-та. Сер. 1. – 2009. – Вып. 4. – С. 105–112.
19. Зегжда С.А., Товстик П.Е., Юшков М.П. Обобщенный принцип Гамильтона-Остроградского и его применение для гашения колебаний // ДАН. – 2012. – Т. 447, № 3. – С. 1–4.
20. Атамуратов А.Ж. Исследование гашения колебаний элементов механических структур: дис. ... канд. техн. наук. 22.01.15. – М., 2015. – 130 с.
21. Асланов С.Ж. Расчет оптимальных режимов гашения колебаний механических систем: дис. ... канд. техн. наук. 26.10.11. – М., 2011. – 101 с.
22. Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам: учеб. пособие. Серия: МГУ. Классический университетский учебник. – М.: Логос, 2004. – С. 184.
23. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
24. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

25. Калиткин Н.Н. Численные методы. – СПб.: ВВУ, 2011. – 592 с.
 26. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний. 2011. – 632 с.
 27. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука. 1984. – 192 с.
 28. Моисеев Н.Н., Иванчиков Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 351 с.

29. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
 30. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
 31. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – 2-е изд. – Долгопрудный: Интеллект, 2008. – 504 с.

References

1. Lur'e A. I. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1970, 940 p.
 2. Timoshenko N.V. Kurs teorii uprugosti [Course of the theory of elasticity]. *Kiev, Naukova dumka*, 1972, 508 p.
 3. Lions Zh.L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimum control of systems described by partial differential equations]. *Moscow, Mir*, 1972. 414 p.
 4. Lagness J. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion. *SIAM Journ. Control and Optim.* 1983, vol. 1, no. 1. pp. 68-85.
 5. Russel D., Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations. *SIAM Review*, vol. 20, no. 5, 1978. pp. 639-739.
 6. Butkovskii A.G. Metody upravleniia sistemami s raspredelemnymi parametrami [Methods of controlling systems with distributed parameters]. *Moscow, Nauka*, 1975, 568 p.
 7. Muravey L.A., On the suppression on membrane oscillations. *Moscow, Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system"*, 1990, pp. 50-51.
 8. Muravey L.A., Mathematical problems on the damp of vibration. *Budapest, Preprint of IFAC Conference "Identification and system parameter estimations"*. 1991.Vol. 1, pp. 746-747.
 9. Atamuratov A.Zh., Mikhailov I.E., Muravey L.A. Problema momentov v zadachakh upravleniia uprugimi dinamicheskimi sistemami [The problem of moments in problems of control of elastic dynamical systems]. *Mechatronics, Automation, Control*, 2016, no. 9, pp. 587-598, available at: <http://novtex.ru/mech/eng/mech2016/archiv09.html>
 10. Chernousko F.L, Akulenko L.D, Sokolov B.N Upravlenie kolebanijami. [Control of oscillations.] *Moscow, Nauka*, 1980, 384 p.
 11. Lions J.L. Exact controllability for distributed systems: some trends and some problems. *In Applied and Industrial Mathematics, R. Spigler, ed., Kluwer, Dordrecht*. 1991, pp. 59-84.
 12. Lions J.L. On some hyperbolic equation with a pressure term. *In Partial Differential Equations and Related Subjects, M. Miranda, ed., Longman Scientific and Technical, Harlow, UK*, 1992, pp. 196-208.
 13. Lions J.L. Very rapid oscillations and control. *In HERMIS '96, Proceedings of the Third Hellenic-European Conference on Mathematics and Informatics, E.A. Lipitakis, ed., LEA Publisher, Athens*, 1997. pp. 1-10.
 14. Ilyin V.A, Tikhomirov V.V Volnovoe uravnenie s granichnym upravleniem na dvuh koncah i zadacha o polnom uspokoenii kolebatel'nogo processa [The wave equation with boundary control at two ends and the problem of complete relaxation of the oscillatory process]. *Differencial'nye uravnenija*. 1999, vol. 35, no. 5. pp. 692-704
 15. Ilyin V.A, Moiseyev E.I Optimal'noe granichnoe upravlenie smeshheniem na odnom konce pri svobodnom vtorom konce i otvechajushhee emu raspredelenie polnoj jenerгии struny [Optimum boundary control of the displacement at one end at a free second end and the corresponding distribution of the total energy of the string]. *Proceedings of the academy of sciences*. 2005, vol. 400, no. 5. pp. 587-591.

16. Kostin G.B., Saurin V.B. Modelirovanie i optimizacija dvizhenij uprugih sistem metodom integrodifferencial'nyh sootnoshenij [Modeling and optimization of motions of elastic systems by the method of integro-differential relations]. *Proceedings of the Academy of Sciences*, 2006, vol. 408, no. 6. pp. 750-753.
 17. Zegzhda S.A, Soltakhanov Sh.H. Primenenie obobshhennogo principa Gaussa k resheniju zadachi o gashenii kolebanij mehanicheskikh sistem [Application of the generalized Gauss principle to the solution of the problem of damping vibrations of mechanical systems]. *Izv. RAN. Teorija i sistemy upravlenija*, 2010, no. 2, pp. 20-25.
 18. Soltakhanov Sh.H. Gashenie kolebanij konsoli [Consolation damping]. *Vestn. S.-Peterburg, un-ta. Ser. 1*, 2009, no. 4, pp. 105-112.
 19. Zegzhda S.A, Tovstik P.E, Yushkov M.P. Obobshhennyj princip Gamil'tona-Ostrogradskogo i ego primenenie dlja gashenija kolebanij [The generalized Hamilton-Ostrogradsky principle and its application to damping vibrations]. *Proceedings of the Academy of Sciences*, 2012, vol. 447, no 3, pp. 1-4.
 20. Atamuratov A.Zh. Issledovanie gashenija kolebanij jelementov mehanicheskikh struktur. Diss. ... kand. tehn. nauk. [Investigation of vibration damping of elements of mechanical structures. Diss. ... cand. tech. sciences.] 22.01.15. *Moscow*, 2015, 130 p.
 21. Aslanov S.Zh. Raschet optimal'nyh rezhimov gashenija kolebanij mehanicheskikh sistem. Diss. ... kand. tehn. nauk. [Calculation of optimal modes of vibration damping of mechanical systems. Dis. ... cand. tech. sciences.] 26.10.11. *Moscow*, 2011, 101 p.
 22. Kostomarov D.P, Favorsky A.P Vvodnye lekci po chislennym metodam (Ucheb. posobie). [Introductory lectures on numerical methods (Textbook)]. *Moscow, Izd-vo Logos, Serija: MGU. (Klassicheskij universitetskij uchebnik)*, 2004, pp. 184.
 23. Godunov S.K, Ryabenky V.S Raznostnye shemy. [Difference schemes.] *Moscow, Nauka*, 1977, 440 p.
 24. A.A Samarskii, A.V Gulin. Chislennye metody: Ucheb. posobie dlja vuzov. [Numerical methods: Proc. manual for universities.] *Moscow, Nauka*, 1989, 432 p.
 25. Kalitkin N.N. Chislennye metody. BHV-Spb, 2011, 592 с.
 26. N.S Bakhvalov, N.P Zhidkov, G.M Kobelkov. Chislennye metody. [Numerical methods] Binom. Laboratorija znanij, *Moscow*, 2011, 632 p.
 27. Ikramov Kh.D. Chislennoe reshenie matrichnyh uravnenij. [Numerical solution of matrix equations.] *Moscow, Nauka*, 1984, 192 p.
 28. Moiseev N.N, Ivanilov Yu.P., Stolyarova E.M. Metody optimizacii. [Methods of optimization.] *Moscow, Nauka*, 1978, 351 p.
 29. A.V. Panteleev, T.A Letova. Metody optimizacii v primerah i zadachah: Ucheb. posobie. [Methods of optimization in examples and tasks: Proc. allowance.] *Moscow, Vyssh. shk.*, 2005, 544 p.
 30. Vasilyev F.P. Chislennye metody reshenija jekstremal'nyh zadach. 2-e izd., pererabot. i dop. [Numerical methods for solving extremal problems. 2 nd ed., Revised. and additional]. *Moscow, Nauka*, 1988. 552 p.
 31. Fedorenko R.P. Vvedenie v vychislitel'nuju fiziku. 2-e izd. [Introduction to Computational Physics. 2 nd ed.] *Dolgoprudnyj, Intellect*, 2008, 504 p.