

Битюрин А.А. Моделирование амплитуды поперечных колебаний однородного стержня при ударе о жесткую преграду с учетом собственного веса // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 16–23. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.02

Bityurin A.A. Simulation of the amplitude of transverse vibrations of a homogeneous rod upon impact against a rigid obstacle taking into account its own weight. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 16-23. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.02



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.02

УДК 531.36

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АМПЛИТУДЫ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

А.А. Битюрин

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 14 февраля 2018 г.

Принята: 31 мая 2018 г.

Опубликована: 29 июня 2018 г.

#### Ключевые слова:

поперечные колебания, прогиб, продольный удар, волновая модель, метод начальных параметров, предупредительная скорость, стержень.

### АННОТАЦИЯ

Точное решение динамических задач в нелинейной постановке сопряжено с известными математическими трудностями. В исследовательских работах, посвященных решению задач на динамический прогиб и устойчивость стержней при ударном взаимодействии, рассматривались идеальные стержни с прямолинейной осью и при отсутствии каких-либо внешних воздействий. Учет дополнительных внешних факторов, оказывающих влияние на состояние ударной системы, ведет к дальнейшему усложнению решения поставленной задачи.

В настоящей работе с применением метода начальных параметров и волновой модели продольного удара делается попытка разработать методику расчета динамического прогиба однородного стержня, совершающего поперечные колебания при продольном ударе о жесткую преграду, с учетом поперечной нагрузки. В зависимости от предупредительного состояния стержня задаются соответствующие начальные параметры – начальные прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила. Использование волновой модели продольного удара и метода характеристик учитывает кратковременность действия ударной сжимающей нагрузки, после прекращения действия которой стержень представляется колебательной системой, имеющей начальную скорость и отклонение от положения равновесия. В таком состоянии стержень совершает поперечные затухающие колебания. В представленной работе излагается методика расчета амплитуды поперечных колебаний стержня постоянной продольной жесткости, испытывающего удар об абсолютно жесткую преграду. Особый интерес представляет применение данной методики в расчетах системы однородных и ступенчатых стержней, совершающих поперечные колебания при продольном ударе. Такие системы стержней часто встречаются в современных ударных механизмах и являются элементами строительных конструкций: стержневые элементы ферм, рам, стоек, колонн, свай и проч.

© ПНИПУ

© Битюрин Анатолий Александрович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: [sntk\\_2015@mail.ru](mailto:sntk_2015@mail.ru)

Anatoly A. Bityurin – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: [sntk\\_2015@mail.ru](mailto:sntk_2015@mail.ru)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# MODELLING OF THE AMPLITUDE OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF A HOMOGENEOUS ROD UPON IMPACT AGAINST A RIGID OBSTACLE TAKING INTO ACCOUNT ITS OWN WEIGHT

A.A. Bityrin

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 14 February 2018  
Accepted: 31 May 2018  
Published: 29 June 2018

### Keywords:

transverse vibrations, deflection, longitudinal impact, wave model, initial parameter method, pre-radial velocity, rod.

## ABSTRACT

The accurate solution of dynamic problems in a nonlinear formulation is associated with certain mathematical difficulties. The available research works devoted to the problem solution on the dynamic deflection and stability of the rods under shock wave loading have considered perfect rods with a straight axis and have not considered any external effects. The account of additional external factors influencing the state of a shock system makes this task more complicated.

By using the method of the initial parameters and the wave model of the longitudinal impact, this work attempts to develop the calculation method for dynamic deflection of a homogeneous rod producing lateral vibrations under the longitudinal impact against a hard obstacle, also taking lateral loads into account. Depending on the pre-impact state of the rod, the corresponding initial parameters are set, such as initial deflection, rotation, bending moment and shear force. By using the wave model of the longitudinal impact and method of characteristics, it becomes possible to take the short-term exposure of the shock compressing load into account, after which the rod is considered as a vibratory system having the initial velocity and the deviation from the equilibrium position. In this state, the rod makes transverse shock vibrations. The present article describes the calculation method of the amplitude of transverse vibrations of the rod with a constant longitudinal stiffness under the impact against an absolutely rigid barrier. It is of a particular interest to use this method in order to calculate the system of uniform and stepped rods making lateral vibrations under the longitudinal impact. Such systems of rods are often found in present impact mechanisms, they are used as structural elements, e.g. core elements of trusses, frames, pillars, columns, piles, etc.

© PNRPU

## Введение

Задачи расчета на устойчивость и динамический прогиб при поперечных колебаниях в работах [1–7] реализовывались в основном для идеальных стержней с прямолинейной осью при отсутствии каких либо посторонних внешних воздействий. Однако в реальной ситуации помимо учета действующей продольной нагрузки очень часто необходимо учитывать дополнительные факторы, в том числе поперечное воздействие. Оно может быть связано с собственным весом стержня при его горизонтальном расположении, весом посторонних предметов, а также дополнительных распределенных сил, таких как ветровая нагрузка, вес ледяных или снеговых отложений – для строительных конструкций, воздействие магнитного поля на металлические конструкции, обтекание жидкостью и т.д.

В этом случае решение поставленной задачи усложняется, однако отсутствие учета внешних дополнительных факторов из-за неточности расчетов часто будет приводить к преждевременному износу конструкции в процессе эксплуатации, выходу из строя оборудования, а иногда и к аварийной ситуации. Особенно важным представляет учет динамического характера продольного нагружения стержня, иначе это может привести к дальнейшему усложнению поставленной задачи, как это было справедливо отмечено в работах [8–16].

Как показал обзор литературы, проблема продольного изгиба стержня при динамической нагрузке известна довольно широко. Основную сложность решения динамических задач представляет их нелинейность. Довольно часто исследователи прибегают к приближенному решению нелинейных дифференциальных уравнений при динамической постановке задачи, либо в некоторых случаях предлагается замена точной нелинейной постановки приближенной линейной [8–16]. Такой подход оказывается весьма успешным только на узком интервале изменения тех или иных параметров исследуемой системы. В этом случае расхождение с реальными результатами не превышает нескольких процентов. Однако решение задачи сопровождается громоздкими математическими выкладками, что заставляет применять для проведения расчетов численное программирование, что не всегда удобно в инженерной практике. Таким образом, на сегодняшний день динамическая задача продольного изгиба стержня решена не окончательно.

## Постановка задачи

Ниже приводится модель расчета прогиба однородного стержня при его продольном ударе об абсолютно жесткую преграду с учетом поперечной нагрузки. Разработанная математическая модель расчета позволяет

учесть силы инерции, действующие на колеблющийся стержень и вызванные кратковременностью действия ударной силы. Именно силы инерции вносят максимальный вклад в основные характеристики колебательного процесса. Методом начальных параметров рассчитываются максимальные поперечные смещения и скорость сечений стержня, сжатого постоянной продольной силой. Автором этой методики является В.Г. Чудновский [17]. Далее с применением волновой модели продольного удара и метода характеристик [18] вычисляется продольная сила, возникающая в стержне при продольном ударе, и рассчитывается время ее воздействия. После прекращения действия продольной силы стержень представляет собой колебательную систему, выведенную из положения равновесия и совершающую затухающие поперечные колебания, имея в начале процесса приобретенную скорость и начальное смещение поперечных сечений.

### Применение метода начальных параметров

Возникающие продольные силы в стержне массой  $m$  и длиной  $l$  при продольном ударе со скоростью  $V_0$  об абсолютно жесткую преграду носят кратковременный характер. После прекращения их действия стержень начинает совершать затухающие поперечные колебания. Для определения максимальной амплитуды поперечных колебаний, которая будет иметь место в начале колебательного процесса (рис. 1), можно воспользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня постоянного поперечного сечения, несущего равномерно распределенную массу [17]:

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + v^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} - u^4 y = 0, \quad (1)$$

где  $y$  – прогиб оси стержня;  $\xi = \frac{x}{l}$  – относительная координата;  $v^2 = \frac{Nl^2}{EI}$ ;  $u^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI}$ ;  $N$  – продольная сила (положительная, если стержень сжат);  $l$  – длина стержня или его однородного участка;  $EI$  – жесткость стержня при изгибе;  $m$  – интенсивность массы;  $\omega$  – частота свободных колебаний.

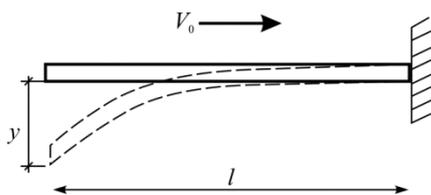


Рис. 1 Схема удара однородного стержня  
Fig. 1. Impact scheme of a uniform rod

Составим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1),

$$\lambda^4 + v^2 \lambda^2 - u^4 = 0. \quad (2)$$

Его корни будут вычислены как [17]

$$\lambda_1^2 = -\frac{v^2}{2} - \sqrt{\frac{v^4}{4} + u^4}; \quad \lambda_2^2 = -\frac{v^2}{2} + \sqrt{\frac{v^4}{4} + u^4}. \quad (3)$$

В зависимости от направления продольной силы (сжатие или растяжение)  $u^4$  и  $v^2$  принимают как положительные, так и отрицательные значения, поэтому корни (3) могут быть вещественными, чисто мнимыми или комплексными сопряженными числами.

Общий интеграл уравнения (1) при отсутствии кратных корней можно записать в виде ряда

$$y = \sum_{j=1,2} (A_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi), \quad (4)$$

где  $A_j, B_j$  – постоянные интегрирования;  $\lambda_j$  – корни характеристического уравнения (2).

Выражение (4) для прогибов стержня дает возможность составить формулы усилий и углов поворота сечений стержня, если воспользоваться дифференциальными зависимостями [17]

$$\varphi = \frac{dy}{dx}; \quad M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad Q^N = -EI \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Здесь  $\varphi, M$  – амплитуды угла поворота и изгибающего момента в сечении стержня;  $Q^N$  – амплитуда поперечной силы, перпендикулярной к изогнутой оси стержня [17].

Для удобства обозначения примем

$$\tilde{\varphi} = l\varphi; \quad \tilde{M} = \frac{Ml^2}{EI}; \quad \tilde{Q}^N = \frac{Q^N l^3}{EI}. \quad (5)$$

Тогда искомые зависимости запишутся в более простой форме:

$$\tilde{\varphi} = \frac{dy}{d\xi}; \quad \tilde{M} = -\frac{d^2 y}{d\xi^2}; \quad \tilde{Q}^N = -\frac{d^3 y}{d\xi^3} \quad (6)$$

или в рядах

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j=1,2} \lambda_j (A_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi), \quad (7)$$

$$\tilde{M} = -\sum_{j=1,2} \lambda_j^2 (A_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi), \quad (8)$$

$$\tilde{Q}^N = -\sum_{j=1,2} \lambda_j^3 (A_j \operatorname{ch} \lambda_j \xi + B_j \operatorname{sh} \lambda_j \xi). \quad (9)$$

Введем вместо  $Q^N$  величину  $Q$ , обозначающую поперечную силу, перпендикулярную к недеформированной оси стержня, которая определится зависимостью [17]

$$\begin{aligned} Q^N &= Q \cos \varphi + N \sin \varphi = \\ &= Q + v^2 \frac{EI}{l^2} \varphi = Q - \varphi \frac{EI}{l^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая (6) и что  $\tilde{Q} = \frac{QI^3}{EI}$ , получим на основании (9) и (10)

$$\tilde{Q} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \sum_{j=1,2} \frac{1}{\lambda_j} (A_j ch \lambda_j \xi + B_j ch \lambda_j \xi). \quad (11)$$

В дальнейшем поставленную задачу удобнее решать методом начальных параметров, как это предлагается В.Г. Чудновским [17]. Для получения формул метода начальных параметров необходимо постоянные интегрирования  $A_j$  и  $B_j$  выразить через усилия и перемещения сечения стержня, совпадающего с началом координат. Эти усилия и перемещения и будут называться начальными параметрами:  $y_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $M_0$  и  $Q_0$  (рис. 2). Или введем их приведенные величины:  $\tilde{\varphi}_0$ ,  $\tilde{M}_0$ ,  $\tilde{Q}_0$ , определяемые (5).

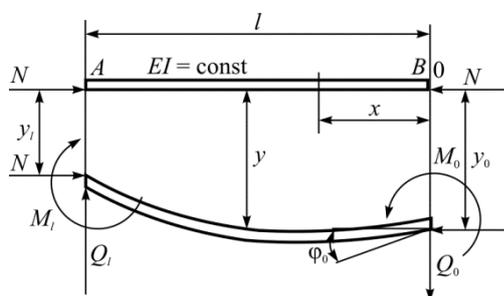


Рис. 2. Схема метода начальных параметров  
Fig. 2. Scheme of the initial parameter method

Подчинив (4), (7), (8) и (11) условиям при  $\xi = 0$   $y = y_0$ ,  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0$ ,  $\tilde{M} = \tilde{M}_0$ ,  $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0$ , получим следующую систему уравнений для определения постоянных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ :

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= y_0, \\ A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 &= \tilde{\varphi}_0, \\ -B_1 \lambda_1^2 - B_2 \lambda_2^2 &= \tilde{M}_0, \\ \lambda_1^2 \lambda_2^2 \left( \frac{A_1}{\lambda_1} + \frac{A_2}{\lambda_2} \right) &= \tilde{Q}_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если значения постоянных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , найденные из системы (12), подставить в зависимости (4), (7), (8) и (11), получим формулы метода начальных параметров [17]:

$$y = -y_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F'_\xi + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{IV} - \tilde{M}_0 F_\xi^{III} - \tilde{Q}_0 F_\xi^{II}; \quad (13)$$

$$\tilde{\varphi} = -y_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F''_\xi + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^V - \tilde{M}_0 F_\xi^{IV} - \tilde{Q}_0 F_\xi^{III}; \quad (14)$$

$$\tilde{M} = y_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F'''_\xi + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{VI} - \tilde{M}_0 F_\xi^V - \tilde{Q}_0 F_\xi^{IV}; \quad (15)$$

$$\tilde{Q} = -y_0 \lambda_1^4 \lambda_2^4 F_\xi + \tilde{\varphi}_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi^{III} - \tilde{M}_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi^{II} - \tilde{Q}_0 \lambda_1^2 \lambda_2^2 F_\xi', \quad (16)$$

где

$$F_\xi = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left( \frac{sh \lambda_2 \xi}{\lambda_2^3} - \frac{sh \lambda_1 \xi}{\lambda_1^3} \right); \quad (17)$$

$$F'_\xi = \frac{dF_\xi}{d\xi} = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left( \frac{ch \lambda_2 \xi}{\lambda_2^2} - \frac{ch \lambda_1 \xi}{\lambda_1^2} \right); \quad (18)$$

$$F''_\xi = \frac{d^2 F_\xi}{d\xi^2} = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left( \frac{sh \lambda_2 \xi}{\lambda_2^2} - \frac{sh \lambda_1 \xi}{\lambda_1^2} \right); \quad (19)$$

$$F_\xi^{III} = \frac{d^3 F_\xi}{d\xi^3} = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} (ch \lambda_2 \xi - ch \lambda_1 \xi); \quad (20)$$

$$F_\xi^{IV} = \frac{d^4 F_\xi}{d\xi^4} = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} (\lambda_2 sh \lambda_2 \xi - \lambda_1 sh \lambda_1 \xi); \quad (21)$$

$$F_\xi^V = \frac{d^5 F_\xi}{d\xi^5} = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} (\lambda_2^2 ch \lambda_2 \xi - \lambda_1^2 ch \lambda_1 \xi); \quad (22)$$

$$F_\xi^{VI} = \frac{d^6 F_\xi}{d\xi^6} = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} (\lambda_2^3 sh \lambda_2 \xi - \lambda_1^3 sh \lambda_1 \xi); \quad (23)$$

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – корни характеристического уравнения, которые могут быть вещественными, мнимыми или комплексными числами в зависимости от величины и знака начальных параметров.

Формулы (13)–(16), полученные В.Г. Чудновским, выражают перемещения и усилия в любом сечении колеблющегося стержня в зависимости от начальных параметров (см. рис. 2). Таким образом, данный подход дает возможность ответить на вопросы, касающиеся поперечных колебаний стержня, имеющего начальную кривизну, эксцентриситет ударной силы. Помимо этого, данный подход позволяет учесть поперечную нагрузку, действующую на стержень, а также прочие внешние факторы, в чем и состоит основная его ценность.

При горизонтальном ударе однородного стержня о жесткую преграду с учетом собственного веса стержня, используя метод начальных параметров, выражение для прогиба торцевого сечения в соответствии с (13) запишем в виде

$$y_{\max} = -\tilde{M}_0 F_\xi^{III} - \tilde{Q}_0 F_\xi^{II}. \quad (24)$$

Здесь  $\tilde{M}_0$  и  $\tilde{Q}_0$  – соответственно изгибающий момент и поперечная сила в ударном сечении стержня, возникающие при учете его собственного веса и рассчитанные по формулам (5). Поскольку удар предполагается центральным и поворот ударного сечения относительно жесткой преграды отсутствует, начальные угол поворота  $\varphi_0$  и прогиб  $y_0$  будут равны нулю. Коэффициенты  $F_\xi^{III}$  и  $F_\xi^{II}$  будут зависеть от продольной силы  $N$ , возникающей в стержне в процессе удара.

### Определение продольной силы

Для определения продольной силы  $N$  используется волновая модель продольного удара однородного стержня о жесткую преграду [18, 24]. Решается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (25)$$

где  $u(x,t)$  – продольное перемещение поперечного сечения однородного стержня;  $x$  – координата сечения;  $t$  – время;  $a$  – скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние стержня перед ударом: при  $t = t_0 = 0$

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

Граничные условия определяют отсутствие силы в сечении  $x = 0$  и равенство нулю скорости сечения  $x = l$  при взаимодействии однородного стержня с жесткой преградой:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} < 0. \quad (27)$$

Для решения волнового уравнения (25) применяется метод Даламбера [1, 3]:

$$u(x,t) = f(at - x) + \varphi(at + x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (28)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -f'(at - x) + \varphi'(at + x),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a[f'(at - x) + \varphi'(at + x)], \quad (29)$$

где  $f(at - x)$  – функция, описывающая прямую волну, распространяющуюся по стержню в направлении оси  $x$ ;  $\varphi(at + x)$  – функция, описывающая обратную волну, распространяющуюся по стержню в противоположном направлении;  $f'(at - x)$ ,  $\varphi'(at + x)$  – производные функций.

Применим метод характеристик для построения поля состояний (рис. 3) [18]. Наклонные линии определяют прямые и обратные волны деформаций. Относительная продольная деформация, позволяющая в дальнейшем рассчитать продольную сжимающую силу  $N$  на рассматриваемый стержень (см. рис. 2), связана с параметрами прямых и обратных волн следующим образом:  $\tilde{\epsilon}(x,t) = -f'(at - x) + \varphi'(at + x)$ . Длительность деформированного состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат  $t$ , которые имеют точки наклонных линий для этого сечения. Следуя методике определения величины относительной продоль-

ной деформации в [24], находим  $\tilde{\epsilon}(x,t) = -1$  в течение периода времени  $t = l/a$ . Таким образом, при известной величине продольной силы

$$N = EA\tilde{\epsilon} \frac{V_0}{a} \quad (30)$$

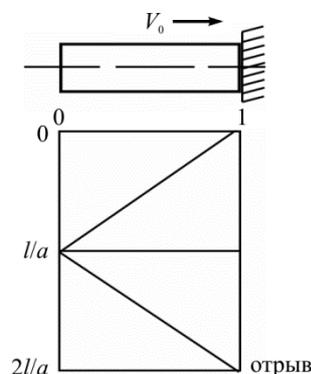


Рис. 3. Поле состояний  
Fig. 3. The area of states

и продолжительности ее действия можно, используя метод начальных параметров, рассчитать прогиб  $y$  торцевого сечения стержня и его скорость  $y' = \frac{dy}{dt}$  в момент прекращения действия продольной силы  $N$ . Далее сечения стержня, имея приобретенную поперечную скорость  $y'$  и двигаясь по инерции до некоторого максимального отклонения  $y^*_{\max}$  от положения равновесия, начинают совершать свободные колебания. В реальных условиях этот колебательный процесс будет затухающим.

### Вычисление максимального прогиба

Максимальное отклонение торцевого сечения стержня от положения равновесия, которое и будет его максимальным прогибом, легко определится по известной формуле [7, 19–23]

$$y^*_{\max} = \sqrt{y^2 + \frac{y'^2}{\omega^2}}, \quad (31)$$

где  $y$  – максимальный прогиб стержня, равный максимальной координате торцевого сечения в момент прекращения действия продольной силы  $N$ ;  $\omega$  – циклическая частота свободных поперечных колебаний стержня при отсутствии продольной силы. Для расчета прогиба торцевого сечения относительная координата  $\xi$  принимается равной единице.

Учитывая первую форму поперечных колебаний ( $n = 1$ ), как наиболее часто встречающуюся на практике, а также зависимость (30), имеем для сжатого стержня круглого поперечного сечения выражение циклической частоты поперечных колебаний:

$$\varpi = \omega \sqrt{1 - \frac{64V_0 \tilde{\epsilon} l^2}{\pi^2 d^2 a}}. \quad (32)$$

Анализируя формулу (32), можно заключить, что с ростом предупредной скорости частота поперечных колебаний сжатого стержня  $\varpi$  уменьшается и будет равна нулю при достижении продольной силы величины  $P_{кр}$  по Эйлеру, что отмечено в работах [7], [17, 19–23, 25–32].

Частоту свободных поперечных колебаний стержня  $\omega$ , имеющего свободный торец, по первой форме  $n=1$  можно рассчитать по формуле [25]

$$\omega = \frac{3,5}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (33)$$

Предполагая гармонический закон колебательного процесса стержня, имеем

$$y = y_{\max} \sin(\varpi t) \text{ и } y' = y_{\max} \varpi \cos(\varpi t). \quad (34)$$

При малых значениях  $t$  максимальная скорость торцевого сечения

$$y' \approx y_{\max} \varpi. \quad (35)$$

Подставляя значения частоты свободных колебаний стержня  $\omega$  и скорость  $y'$  в формулу (31), получим искомый максимальный прогиб стержня, равный максимальной амплитуде поперечных колебаний торцевого сечения  $y^*_{\max}$ . В этом случае имеет место учет сил инерции, действующих на стержень при динамической нагрузке, что представляло в традиционных моделях расчета довольно сложную задачу.

### Пример

Рассмотрим продольный удар однородного стержня об абсолютно жесткую преграду:  $l = 1$  м,  $d = 0,05$  м, предупредная скорость  $V_0 = 1$  м/с, материал – сталь СТ 5. Масса такого стержня составит 15,31 кг, которая при длине в  $l$  м будет равна погонной массе  $m$ . Циклическая частота  $\Omega$  собственных поперечных колебаний стержня, рассчитанная по (33), будет равна 221,5 рад/с.

Строим поле состояний при продольном ударе (см. рис. 3) и определяем относительную продольную деформацию  $\tilde{\epsilon} = -1$ . Знак минус означает сжатие. По формуле (30) определяем продольную силу  $N = 78,5$  кН, которая для данного стержня меньше критической  $P_{кр}$ . Начальные параметры в ударном сечении, связанные с собственным весом стержня:  $M_0 = 75$  Нм,  $Q_0 = 150$  Н. Для удобства ведения расчета, учитывая (5) и (24), преобразуем выражения для  $v^2$  и  $y_{\max}$  относительно  $V_0$ ,  $d$  и  $l$ :

$$v^2 = \frac{16\tilde{\epsilon}V_0 l^2}{ad^2} = 2,56; \quad u^4 = \frac{\pi^4}{16};$$

$$y_{\max} = -\frac{64l^2}{\pi d^4 E} \left( M_0 F_{\xi}''' + Q_0 l F_{\xi}'' \right). \quad (36)$$

Правильность составленных выражений (36) проверена методом размерностей.

Вычисляем корни характеристического уравнения по формулам (3):

$$\lambda_1^2 = -\frac{v^2}{2} - \sqrt{\frac{v^4}{4} + u^4} = -4,06;$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{v^2}{2} + \sqrt{\frac{v^4}{4} + u^4} = 1,5. \quad (37)$$

Подставляя значения (37) в формулы (19) и (20), учитывая  $\bar{\lambda}_1 = i\lambda_1$ , получим  $F_{\xi}'' = -0,1$ ,  $F_{\xi}''' = -0,354$ . После подстановки этих значений в выражение (36) для  $y_{\max}$  получим  $y_{\max} = 0,7$  мм. Однако такое значение прогиба возникает при постоянной продольной силе  $N$ . При кратковременном ее действии стержень будет только выведен из положения равновесия и далее предоставлен самому себе. Для гармонического закона изменения поперечной координаты торцевого сечения стержня имеем (34)

$$y = 0,7 \sin \varpi t, \text{ мм.} \quad (38)$$

Циклическая частота колебаний кратковременно сжатого стержня, рассчитанная по (32),  $\varpi = 153,7$  рад/с.

Отклонение свободного торца стержня при  $t = \frac{l}{a} = \frac{1}{5000}$  с в соответствии с (38) будет равно 0,021 мм. В соответствии с (35) поперечная скорость торцевого сечения 0,108 м/с. Тогда получаем максимальное отклонение торцевого сечения от положения равновесия при свободных колебаниях в соответствии с (31)  $y^*_{\max} = 0,5$  мм.

Таким образом, если при горизонтальном продольном ударе стержня о жесткую преграду на стержень не действуют никакие внешние распределенные силы, кроме его собственного веса, его максимальный прогиб будет не столь существенным. В иных случаях, когда на стержень воздействуют внешние, более интенсивные распределенные силы, например обтекание потоком жидкости или газа и прочие воздействия, прогиб может существенно увеличиться. В этом случае потребуются учет деформации сдвига и возникающих касательных напряжений [30]. Это особенно существенно при рассмотрении композитов и деталей из дерева и прочих материалов, разрушение которых может происходить за счет разрушения связующего при сдвиге.

### Заключение

Метод расчета величины прогиба однородного стержня при поперечных колебаниях, описанный выше, позволил эффективно совместно применить метод начальных параметров и волновую модель продольного удара. Дан-

ный метод дает возможность моделировать амплитуды поперечных колебаний однородных стержней при самых различных видах закрепления и характере ударного взаимодействия. Можно учесть изначальный эксцентриситет стержня при продольном ударе, а также начальное искривление. Метод начальных параметров позволяет провести достаточно точный расчет, изменяя лишь начальные параметры: изгибающий момент, поперечную силу, начальный угол поворота и начальное смещение.

## Библиографический список

1. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. – 1949. – Т. 65, № 6.
2. Малый В.И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. – 1972. – № 4. – С. 138–144.
3. Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. – 1973. – № 4. – С. 181–186.
4. Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 1. – С. 52–61.
5. Hutchinson W.J., Budiansky B. Dynamic Buckling Estimates // AIAA Journal. – 1966. – Vol. 4. – No. 3. – P. 527–530.
6. Knauss W.G., Ravi-Chandar K. Some basic problems in stress wave dominated fracture // Int. J. Fracture. – 1985. – No. 27. – P. 127–143. DOI: 10.1007/978-94-009-5123-5\_1
7. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
8. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. – 2013. – Вып. 3. – С. 131–141.
9. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при продольном ударе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. – 2009. – Вып. 2. – С. 105–111.
10. Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского-Лаврентьева // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 5. – С. 28–33.
11. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Поперечные колебания стержня, вызванные продольным ударом // Докл. АН. – 2013. – Т. 452, № 1. – С. 37–41.
12. Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О статической и динамической неустойчивости тонких стержней // Механика деформируемого твердого тела: тр. 7-й Всерос. конф. – Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2013. – С. 80–84.
13. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Статика и динамика стержня при продольном нагружении // Вестн. Южно-Уральского ун-та. Сер. мат. модел. и прогр. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 76–89.
14. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Еще раз о задаче Ишлинского-Лаврентьева // Докл. АН. – 2014. – Т. 455, № 4. – С. 412–415.
15. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей эйлеровой // Докл. АН. – 2014. – Т. 453, № 3. – С. 282–285.

Особый интерес представляет применение данной методики в расчетах системы однородных и ступенчатых стержней, совершающих поперечные колебания при продольном ударе, которые часто встречаются в современных ударных механизмах. В строительной сфере актуален учет амплитуд поперечных колебаний жестко или шарнирно закрепленных стержней, являющихся элементами ферм, рамных конструкций, а также колонн, стоек и проч.

16. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Устойчивость стержня при длительном осевом сжатии // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Н. Новгород, 2015. – № 77(1). – С. 40–48.
17. Чудновский В.Г. Методы расчета колебаний стержневых систем. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – 403 с.
18. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Распространение волн деформаций в ударных системах. – М.: Наука. – 1985. – 354 с.
19. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 474 с.
20. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит, 1961. – 404 с.
21. Новацкий В. Динамика сооружений: пер. с пол. – М.: Госстройиздат, 1963. – 392 с.
22. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Изд-во лит. по строительству, 1969. – 424 с.
23. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
24. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду. – Ульяновск, 2009. – 164 с.
25. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 600 с.
26. Снитко Н.К. Динамика сооружений. – М., Л.: Гос. изд-во лит. по строит-ву, арх. и строит. матер., 1960. – 356 с.
27. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1991. – 334 с.
28. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
29. Папкович П.Ф. Труды по строительной механике корабля в 4-х т. Т. 4. Устойчивость стержней, перекрытий и пластин. – Л.: Судостроение, 1963. – 552 с.
30. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек: избр. работы. – М.: Наука, 1967. – 808 с.
31. Kollar L., Dulacska E. Bucking of shells for engineers // Budapest: Akademiai Kiado, 1984. – 303 p.
32. Petersen C. Statik und Stabilitat der Baukonstruktionen. – Braunschweig: Vieweg, 1982. – 960 p.

## Reference

1. Lavrentyev M.A., Ishlinskiy A.Yu. Dinamicheskie formy poteri ustoychivosti uprugikh system [Dynamic forms of loss of stability of elastic systems]. *Doklady akademii nauk SSSR*, 1949, vol. 65, no. 8.

2. Malyy V.I. Dlinnovolnovoye priblizhenie v zadachakh o potere ustoychivosti pri udare [Long-wave approximation in problems of stability loss upon impact]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1972, no 4, pp. 138-144.

3. Malyy V.I. Vypuchivaniye sterzhnya pri prodolnom udare. Malyye progiby [Buckling of the rod with a longitudinal impact. Small deflections]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1973, no. 4, pp. 181-186.
4. Malyy V.I. «Vypuchivaniye sterzhnya pri prodolnom udare. Bolshiyе progiby [Buckling of the rod with a longitudinal impact. Large deflections]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1975, no. 1, pp. 52-61.
5. Hutchinson W.J., Budiansky B. Dinamic Buckling Estimates. *AIAA Journal*. 1966, vol.4, no. 3, pp. 527-530.
6. Knauss, W. G., Ravi-Chandar, K. Some basic problems in stress wave dominated fracture. *Int. J. Fracture*, 1985, no. 27, pp. 127-143. DOI: 10.1007/978-94-009-5123-5\_1
7. Filippov A.P. Kolebaniya deformiruyemykh system [Vibrations of deformable systems]. *Moscow, Mashinostroyeniye*, 1970, 734 p.
8. Morozov N.F. Dinamika sterzhnya pri kratkovremennom prodolnom udare [Dynamics of the rod with a short-term longitudinal impact]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1*, 2013, iss. 3, pp. 131-141.
9. Morozov N.F. Dinamika sterzhnya pri prodolnom udare [Dynamics of the rod for longitudinal impact]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1*, 2009, iss. 2. pp. 105-111.
10. Belyaev A.K. Dinamicheskiy podkhod k zadache Ishlinskogo-Lavrentyeva [A dynamic approach to the Ishlinski-Lavrent'ev problem]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 2013, no. 5, pp. 28-33.
11. Morozov N.F. Poperechnyye kolebsniya sterzhnya, vyzvannye prodolnym udarom [Transverse vibrations of the rod caused by longitudinal impact]. *Doklady akademii nauk SSSR*, 2013, vol. 452, no. 1, pp. 37-41.
12. Belyaev A.K. O staticheskoy i dinamicheskoy neustoychivosti tonkhih sterzhney [On the static and dynamic instability of thin rods]. *Rostov na Donu, Trudy 7 Vserossiysk. Konf. «Mechanika deformiruemogo Tvordogo tela», Izdatel'stvo iuzhnogo federal'nogo universiteta*, 2013, pp. 80-84.
13. Morozov N.F. Statika i dinamika sterzhnya pri prodolnom nagruzhении [Statika i dinamika sterzhnia pri prodol'nom nagruzhении]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo un-ta. Ser. Mat. Model. I progr.*, 2014, vol. 7, no. 1. pp. 76-89.
14. Morozov N. F. Yesho raz o zadache Ishlinskogo-Lavrentyeva [Once again about the Ishlinsky-Lavrentiev problem]. *Doklady akademii nauk SSSR*, 2014, vol. 455, no. 4, pp. 412-415.
15. Morozov N.F. O dinamicheskoy potere ustoychivosti pri prodolnoy nagruzke menshey eylerovskoy [On the dynamic loss of stability of a rod with a longitudinal load, a smaller Euler]. *Doklady akademii nauk SSSR*, 2014, vol. 453, no 3, pp. 282-285.
16. Morozov N.F. Ustoychivost sterzhnya pri dlitelnom osevom szhatii [Stability of the rod with prolonged axial compression]. *Problemy prochnosti i plastichnosti. Mezhdusovskiy sbornik. Nizhniy Novgorod*, 2015, no. 77(1), pp. 40-48.
17. Chunovskiy V.G. Metody rascheta kolebaniy sterzhnevikh system [Methods for calculating the vibrations of rod systems]. *Kiyev, Izdatelstvo akademii nauk SSSR*, 1952, 403 p.
18. Alimov O.D. Rasprostraneniye voln deformatsiy v udarnykh sistemakh [Propagation of strain waves in impact systems]. *Moscow, Nauka*, 1985, 354 p.
19. Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele [Fluctuations in Engineering]. *Moscow, Fizmatgiz*, 1959, 474 p.
20. Rakhmatulin Kh.A. Prochnost pri intensivnykh kratkovremennykh nagruzkakh [Strength at intensive short-term loads]. *Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury*, 1961, 404 p.
21. Novatskiy V. Dinamika sooruzheniy [Dynamics of constructions]. *Moscow, Gosstroyizdat*, 1963, 392 p.
22. N. I. Bezukhov. Ustoychivost i dinamika sooruzheniy v primerakh i zadachakh [Stability and dynamics of structures in examples and problems]. *Moscow, Izdatelstvo literatury po stroitelstvu*, 1969, 424 p.
23. Panovko Ya.G. Ustoychivost i kolebsniya uprugikh [Stability and oscillations of elastic systems]. *Moscow, Nauka*, 1987, 352 p.
24. Biturin A.A. Prodolnyy udar neodnorodnogo sterzhnya o zhestkuyu pregradu [Longitudinal impact of a non-uniform rod on a rigid obstacle], *Ulyanovsk*, 2009, 164 p.
25. Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustoychivost uprugikh sistem [Dynamic stability of elastic systems], *Moscow, Gos. izd. Tekhniko-teoreticheskoy literatury*, 1956, 600 p.
26. Snitko N.K. Dinamika sooruzheniy [Dynamics of constructions]. *Moscow, Leningrad, Gos. izd. liter. Po stroit-vu, arkh. i stroit. Mater*, 1960, 356 p.
27. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh system [Basics of calculating the stability of elastic systems]. *Moscow, Mashinostroyeniye*, 1991, 334 p.
28. Bolotin V.V. Nekonservativnyy zadachi teorii uprugoy ustoychivosti [Non-conservative problems of the theory of elastic stability]. *Moscow, Fizmatgiz*, 1961, 339 p.
29. Papkovich P.F. Trudy po stroitelnoy mekhanike korablya v 4-kh t. T 4. Ustoychivost sterzhney, perekrytiy i plastin [Proceedings of the building mechanics of a ship in four vols. T. 4. Stability of rods, overlappings and plates]. *Leningrad, Sudostroyeniye*, 1963, 808 p.
30. Timoshenko S.P. Ustoychivost sterzhney, plastin i obolochek. Izbrannyye trudy [Stability of rods, plates and shells. Selected Works]. *Moscow, Nauka*, 1967, 808 p.
31. Kollar L. Bucking of shells for engineers. *Budapest, Akademiai Kiado*, 1984, 303 p.
32. Petersen C. Statik und Stabilitat der Baukonstruktionen. *Braunschweig, Vieweg*, 1982, 960 p.