



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.04

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ШАРНИРНО-ПОДВИЖНОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ КОНТУРА

И.В. Каменев, А.А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 06 марта 2018 г.
Принята: 22 мая 2018 г.
Опубликована: 29 июня 2018 г.

Ключевые слова:

оболочки, математическая модель, компьютерное моделирование, уравнения в смешанной форме, шарнирно-подвижное закрепление, модель Тимошенко–Рейснера, устойчивость, напряженно-деформированное состояние, метод Бубнова–Галеркина, метод Ньютона.

АННОТАЦИЯ

Оболочечные конструкции часто применяются в разных областях техники, и их исследование важно для многих прикладных задач. Для исключения концентрации напряжений вблизи контура, особенно в угловых точках оболочки, используется шарнирно-подвижное закрепление контура конструкции.

В данной работе рассматриваются пологие оболочки двоякой кривизны, квадратные в плане, выполненные из ортотропных материалов и закрепленные по контуру шарнирно-подвижно. Математическая модель основывается на гипотезах теории оболочек Тимошенко – Рейснера, учитывающей поперечные сдвиги, и представлена в виде системы уравнений в смешанной форме. Также учитывается геометрическая нелинейность.

Для решения системы дифференциальных уравнений применяется метод Бубнова–Галеркина, что позволяет свести задачу к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Показана сходимость метода при увеличении количества слагаемых аппроксимации. Полученная система является нелинейной и решается методом Ньютона. Разработанный алгоритм реализован в среде аналитических вычислений Maple 2017.

Проводится верификация предложенного алгоритма посредством сравнения результатов расчета тестовой задачи с результатом, полученным другими авторами. Совмещение графика зависимости «нагрузка–прогиб» показало хорошую согласованность данных.

Проводится анализ устойчивости трех вариантов пологих оболочечных конструкций двоякой кривизны. По каждой из них получены результаты расчета для четырех вариантов ортотропных материалов. На оболочки действует внешняя равномерно-распределенная поперечная нагрузка, закрепление контура – шарнирно-подвижное. Для всех исследованных конструкций приводятся значения критических нагрузок потери устойчивости, значения наибольшего прогиба, соответствующего данным нагрузкам, а также графики зависимости «нагрузка–прогиб». Сделаны выводы о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемых оболочек.

© ПНИПУ

© Каменев Иван Владимирович – магистрант, e-mail: ivankam447@rambler.ru
Семенов Алексей Александрович – кандидат технических наук, e-mail: sw.semenov@gmail.com

Ivan V. Kamenev – Master Student, e-mail: ivankam447@rambler.ru
Alexey A. Semenov – CSc in Technical Sciences, e-mail: sw.semenov@gmail.com



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

STABILITY OF ORTHOTROPIC DOUBLY CURVED SHALLOW SHELLS WITH A MOVABLE HINGED FIXING OF THE BORDER

I.V. Kamenev, A.A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 06 March 2018
Accepted: 22 May 2018
Published: 29 June 2018

Keywords:

shells, mathematical modelling, simulation, mixed-form equations, movable pin fixing, Tymoshenko – Reisner model, stability, stress-strain state, method of Bubnov – Galerkin, Newton method.

ABSTRACT

Shell structures are often used in different fields and their studies are important for many applications. To eliminate the stress concentration near the contour, especially at the corner points of the shell, the border of the structure has a fixed movable hinge support.

This paper considers double-curved shallow shells, square in a plan, made from orthotropic materials with their border having a fixed movable hinge support. The mathematical model is based on the hypotheses of the theory of Tymoshenko – Reisner shells, which takes into account the transverse shifts and represents the mixed-form equations. In addition, the model takes into account the geometric nonlinearity.

To solve the system of differential equations we used the method of Bubnov – Galerkin, that makes it possible to reduce the problem to the solution of a system of nonlinear algebraic equations. The convergence of the method is also shown for the increasing number of terms of approximation. The resulting system is nonlinear and solved by the Newton method. The developed algorithm is implemented in Maple 2017.

The proposed algorithm is verified by comparing the calculation results of the test problem with the result obtained by other authors. The combination of the load-deflection curve showed a good consistency of the data.

The stability analysis of three variants of shallow shell structures with a double curvature is carried out; each of them is made of four orthotropic materials. The outer uniformly distributed transverse load acts on the shell, the border fixing is hinged-movable. For all the structures studied, the critical buckling load, the maximum value of the deflection, corresponding to this load, and load-deflection curves are given. Conclusions are drawn about the stress-strain state of the shells under consideration.

© PNRPU

Введение

Оболочечные конструкции широко используются в разных областях техники, и их исследование важно для многих прикладных задач: например, подобные конструкции применяются в строительстве и машиностроении [1, 2]. Оболочечные конструкции подвергаются воздействию различных нагрузок [2–14]. Так, в работах [3–6] рассматривается влияние температуры. В работах [7, 8] проводится анализ устойчивости конструкций под воздействием осевого сжатия, причем в работе [7] также проводятся расчеты устойчивости под воздействием точечной нагрузки. В [2, 9–11] рассматривается воздействие статической поперечной равномерно-распределенной нагрузки. В работах [12–14] исследуется процесс деформирования конструкций, находящихся под воздействием динамической нагрузки, причем в [13] также исследуется состояние конструкции под воздействием осевого сжатия.

Конструкции разной геометрии деформируются по-разному, поэтому тип рассматриваемых конструкций также имеет большое значение для исследования их напряженно-деформированного состояния. В большинстве рассмотренных работ [3, 4, 7, 12, 16] исследуются цилиндрические оболочки, в [13, 14] – конические, в [16] исследуются тороидальные, в [2, 17, 19] – пологие двоякой кривизны, в [20] – прямоугольные пластины. В работе [10] приводится общая модель деформирова-

ния для оболочек канонической формы (тороидальные, цилиндрические, конические, пологие двоякой кривизны). Исследование устойчивости таких конструкций является актуальной задачей.

Также актуален вопрос облегчения подобных конструкций, для чего применяются современные композиционные материалы, такие как стеклопластики, боропластики, органопластики, углепластики и текстолиты, а также полимеры [17, 18, 21, 22]. Их использование позволяет существенно снизить вес конструкции.

Приведенные материалы обладают свойством ортотропии, т.е. его физические свойства различны по взаимно перпендикулярным направлениям. Благодаря этому они превосходят традиционные материалы и сплавы по своим механическим и физическим свойствам. Так, композиционные материалы обладают большой удельной прочностью [19] и стойкостью к воздействиям высоких температур и вибрационным нагрузкам [17].

Применение материалов более сложной структуры приводит к необходимости решения задач уточнения и усовершенствования математической модели их деформирования и выбору устойчивого и точного алгоритма ее исследования [23].

Для исследования оболочечных конструкций применяются различные модели. Так, могут быть использованы математические модели в форме функционала полной потенциальной энергии деформации [2, 23]. Также, что особенно удобно в случае шарнирно-

подвижно опертых по контуру конструкций, используются уравнения в смешанной форме [10, 12, 24–28]. Для решения задач устойчивости могут использоваться различные численные методы, такие как метод конечных элементов [2, 20, 29] и метод Ритца [23], а также метод Бубнова–Галеркина [12–15].

Для исключения концентрации напряжений вблизи контура, особенно в угловых точках оболочки, используется шарнирно-подвижное закрепление контура конструкции [30]. Подобное закрепление уменьшает вероятность потери прочности конструкции, что особенно важно, если она изготовлена из ортотропного материала¹.

1. Математическая модель деформирования полой оболочки

Будем рассматривать пологие оболочки двойкой кривизны, квадратные в плане. Срединную поверхность оболочки толщиной h примем за координатную. Оси x, y ортогональной системы координат направлены по линиям главных кривизн оболочки. Ось z ортогональна срединной поверхности и направлена в сторону вогнутости.

Параметры Ляме и параметры кривизны полой оболочки двойкой кривизны соответственно равны

$$A = 1, B = 1, k_x = \frac{1}{R_1}, k_y = \frac{1}{R_2}.$$

Оболочка по контуру закреплена шарнирно-подвижно, находится под действием равномерно-распределенной поперечной нагрузки q (рис. 1).

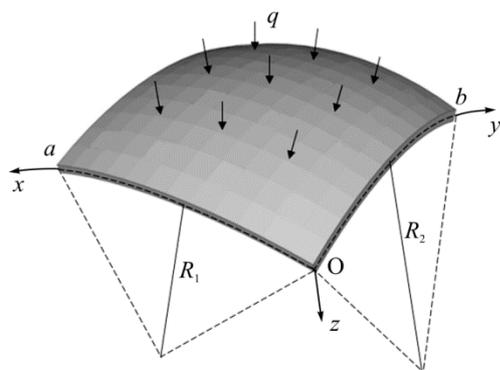


Рис. 1. Схематичное изображение полой оболочки
Fig. 1. Schematic representation of a shallow shell

В качестве математической модели деформирования оболочечной конструкции воспользуемся уравнениями в смешанной форме, полученными в работе [10] для оболочек общего вида (пологих двойкой кривизны, цилиндрических, конических, тороидальных и др.), а также позволяющими учесть наличие подкрепления ребрами жесткости. После некоторых упрощений для гладких пологих оболочек двойкой кривизны получим

¹ Представленные в статье результаты получены в ходе работы над магистерской диссертацией И.В. Каменева.

$$\begin{aligned} & (k_x F_1(\Phi) + k_y F_2(\Phi)) - \frac{\partial}{\partial x} (F_1(\Phi)\theta_1 + F_3(\Phi)\theta_2) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} (F_2(\Phi)\theta_2 + F_3(\Phi)\theta_1) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G_{12}} F_3(\Phi) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\mu_{12}}{E_1 h} F_1(\Phi) \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G_{12}} F_3(\Phi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{E_1 h} F_1(\Phi) - \frac{\mu_{21}}{E_2 h} F_2(\Phi) \right) \right] = \\ & = -(\tilde{\chi}_{12}^2 - \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 + k_x \tilde{\chi}_2 + k_y \tilde{\chi}_1); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})} (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12} G_{12} \chi_{12} \right) - Q_x = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})} (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12} G_{12} \chi_{12} \right) - Q_y = 0,$$

где $E_1, E_2, \mu_{12}, \mu_{21}$ – модули упругости и коэффициенты Пуассона материала; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; $\theta_1 = -\frac{\partial W}{\partial x}$,

$\theta_2 = -\frac{\partial W}{\partial y}$ [10]; $W(x, y)$ – перемещение точки срединной поверхности оболочки вдоль оси z ; χ_1, χ_2 – функции изменения кривизн, χ_{12} – функция изменения кручения,

$$\chi_1 = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}; \quad \chi_2 = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}; \quad \chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Здесь функции Ψ_x, Ψ_y – углы поворота отрезка нормали к срединной поверхности в сечениях xOz, yOz соответственно;

$$Q_x = khG_{13}(\Psi_x - \theta_1); \quad Q_y = khG_{23}(\Psi_y - \theta_2), \quad k = \frac{5}{6}.$$

В соотношениях (1) $F_1(\Phi), F_2(\Phi), F_3(\Phi)$ – обозначения усилий через функцию напряжений в срединной поверхности оболочки $\Phi(x, y)$:

$$F_1(\Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad F_2(\Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad F_3(\Phi) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Здесь также используется упрощенная форма функций изменения кривизн и кручения, соответствующая модели Кирхгофа–Лява [10]:

$$\tilde{\chi}_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}; \quad \tilde{\chi}_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial x}; \quad \tilde{\chi}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Описанные выше уравнения представляют собой систему уравнений равновесия в смешанной форме для

оболочек из ортотропного материала с учетом геометрической нелинейности и поперечных сдвигов. Незвестными функциями здесь являются $W(x, y)$, $\Phi(x, y)$, $\Psi_x(x, y)$, $\Psi_y(x, y)$.

2. Алгоритм решения уравнений математической модели

Для решения полученных уравнений относительно неизвестных функций $W(x, y)$, $\Phi(x, y)$, $\Psi_x(x, y)$, $\Psi_y(x, y)$ применим метод Бубнова–Галеркина. Тогда неизвестные функции будут иметь вид

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{k=1}^N W(k) X1(k) Y1(k); \\ \Phi(x, y) &= \sum_{k=1}^N \Phi(k) X2(k) Y2(k); \\ \Psi_x(x, y) &= \sum_{k=1}^N \Psi_x(k) X3(k) Y3(k); \\ \Psi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^N \Psi_y(k) X4(k) Y4(k). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $W(k)$, $\Phi(k)$, $\Psi_x(k)$, $\Psi_y(k)$ – неизвестные числовые параметры; $X1(k)–X4(k)$, $Y1(k)–Y4(k)$ – некоторые аппроксимирующие функции.

Аппроксимирующие функции $X1(k)–X4(k)$, $Y1(k)–Y4(k)$ выберем исходя из краевых условий при шарнирно-подвижном закреплении контура оболочки:

при $x = 0, x = a$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = 0, \quad \Psi_y = 0; \quad (6)$$

при $y = 0, y = b$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} = 0, \quad \Psi_x = 0. \quad (7)$$

Тогда в качестве аппроксимирующих можно принять следующие тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} X1(k) &= \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a} x\right); & Y1(k) &= \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{b} y\right); \\ X2(k) &= \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a} x\right); & Y2(k) &= \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{b} y\right); \\ X3(k) &= \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{a} x\right); & Y3(k) &= \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{b} y\right); \\ X4(k) &= \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a} x\right); & Y4(k) &= \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{b} y\right). \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с методом Бубнова–Галеркина подставляем разложения искомых функций (5), используя

аппроксимирующие функции (8), в систему уравнений в смешанной форме (1). Обозначим первое уравнение $L_1(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y)$, второе – $L_2(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y)$, третье – $L_3(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y)$, четвертое – $L_4(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y)$. Затем строим систему $\bar{\mathbf{F}}$ из $4N$ уравнений относительно неизвестных числовых параметров $W(k)$, $\Phi(k)$, $\Psi_x(k)$, $\Psi_y(k)$:

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}^1 \\ \bar{\mathbf{F}}^2 \\ \bar{\mathbf{F}}^3 \\ \bar{\mathbf{F}}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\int_0^a \int_0^b L_1(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y) X1(k) Y1(k) dx dy \right]_{k=1}^N \\ \left[\int_0^a \int_0^b L_2(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y) X2(k) Y2(k) dx dy \right]_{k=1}^N \\ \left[\int_0^a \int_0^b L_3(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y) X3(k) Y3(k) dx dy \right]_{k=1}^N \\ \left[\int_0^a \int_0^b L_4(W, \Phi, \Psi_x, \Psi_y) X4(k) Y4(k) dx dy \right]_{k=1}^N \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{0}} \quad (9)$$

Система (9) нелинейная в силу нелинейности самой рассматриваемой модели. Для ее решения применим метод Ньютона.

В соответствии с методом Ньютона составим матрицу Якоби $\bar{\mathbf{F}}'$ данной системы

$$\bar{\mathbf{F}}' = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^1(k)}{\partial W(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^1(k)}{\partial \Phi(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^1(k)}{\partial \Psi_x(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^1(k)}{\partial \Psi_y(I)} \right]_{k,I=1}^N \\ \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^2(k)}{\partial W(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^2(k)}{\partial \Phi(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^2(k)}{\partial \Psi_x(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^2(k)}{\partial \Psi_y(I)} \right]_{k,I=1}^N \\ \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^3(k)}{\partial W(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^3(k)}{\partial \Phi(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^3(k)}{\partial \Psi_x(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^3(k)}{\partial \Psi_y(I)} \right]_{k,I=1}^N \\ \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^4(k)}{\partial W(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^4(k)}{\partial \Phi(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^4(k)}{\partial \Psi_x(I)} \right]_{k,I=1}^N & \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^4(k)}{\partial \Psi_y(I)} \right]_{k,I=1}^N \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Наконец, выбирается начальное приближение $\{W_0(I), \Phi_0(I), \Psi_{x0}(I), \Psi_{y0}(I), I = 1..N\}$ и решается система относительно вектора поправок $\{\Delta W_1(I), \Delta \Phi_1(I), \Delta \Psi_{x1}(I), \Delta \Psi_{y1}(I), I = 1..N\}$:

$$\mathbf{F}'(W_0, \Phi_0, \Psi_{x0}, \Psi_{y0}) \cdot \begin{bmatrix} [\Delta W_1(I)] \\ [\Delta \Phi_1(I)] \\ [\Delta \Psi_{x1}(I)] \\ [\Delta \Psi_{y1}(I)] \end{bmatrix} = -\mathbf{F}(W_0, \Phi_0, \Psi_{x0}, \Psi_{y0}). \quad (11)$$

Отсюда находятся значения на следующем шаге:

$$\begin{cases} W_1(I) = W_0(I) + \Delta W_1(I), \\ \Phi_1(I) = \Phi_0(I) + \Delta \Phi_1(I), \\ \Psi_{x1}(I) = \Psi_x(I) + \Delta \Psi_x(I), \\ \Psi_{y1}(I) = \Psi_y(I) + \Delta \Psi_y(I), \end{cases} \quad I = 1..N \quad (12)$$

Приведенный итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\frac{\sqrt{\sum_{I=1}^N (\Delta W_k^2(I) + \Delta \Phi_k^2(I) + \Delta \Psi_{xk}^2(I) + \Delta \Psi_{yk}^2(I))}}{\sqrt{\sum_{I=1}^N (W_k^2(I) + \Phi_k^2(I) + \Psi_{xk}^2(I) + \Psi_{yk}^2(I))}} < 10^{-3}. \quad (13)$$

Для улучшения скорости сходимости метода рекомендуется использовать в качестве начального приближения на очередном шаге значения, полученные на шаге предыдущем.

Полученные коэффициенты $W(k)$, $\Phi(k)$, $\Psi_x(k)$, $\Psi_y(k)$ подставляются в разложение (5), таким образом находятся аппроксимации неизвестных функций при заданной нагрузке q .

При исследовании устойчивости оболочек решается геометрически нелинейная задача и строится график зависимости «нагрузка–прогиб» в некоторой точке оболочки, например в ее центре. Анализируются экстремумы этого графика, и таким образом, находятся верхние и нижние критические нагрузки. При этих нагрузках «хлопком» происходит переход на новое равновесное состояние. По сути дела для нахождения критических нагрузок применяется критерий Ляпунова, когда малому изменению входного параметра (нагрузки) соответствует существенное изменение выходного параметра (прогиба).

3. Верификация модели

Прежде чем приступить к исследованию устойчивости оболочечных конструкций, необходимо провести верификацию математической модели для проверки ее адекватности. Сравнение проводится с результатами, полученными в [4] и [7].

В рассмотренных примерах исследовалась цилиндрическая оболочка, выполненная из алюминия, а также шарнирно-подвижно закрепленная по контуру. Цилиндрическую оболочку можно рассматривать как частный случай пологой оболочки двойкой кривизны, но с нулевым коэффициентом кривизны для одной из сторон: $k_x = 0$ или $k_y = 0$, т.е. один из радиусов равняется бесконечности.

Параметры конструкции геометрические:

$$h = 0,01 \text{ м}, \quad a = 0,2 \text{ м}, \quad b = 0,2003 \text{ м}, \\ k_x = 0 \text{ м}^{-1}, \quad k_y = 1 \text{ м}^{-1};$$

физические:

$$E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \mu_{12} = \mu_{21} = 0,3,$$

$$G_{12} = 26923,08 \text{ МПа}, \quad G_{13} = G_{23} = 76923,08 \text{ МПа}.$$

Исследование устойчивости приведенной конструкции проводилось в среде аналитических вычислений Maple с удержанием $N = 16$ членов разложения в методе Бубнова–Галеркина (5). На рис. 2 приводятся графики зависимости «нагрузка–безразмерный прогиб в центре» для данной цилиндрической панели, полученные в [4] и [7], а также по предложенной в данной работе методике.

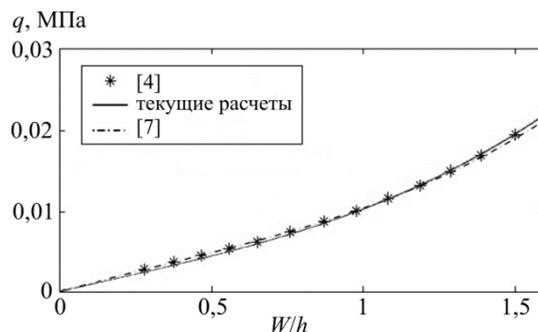


Рис. 2. Сравнительный анализ расчета конструкции
Fig. 2. Comparative analysis of the structure calculation

Как видно из представленного графика, все три кривые достаточно близко лежат друг к другу. Таким образом, можно сделать вывод об адекватности разработанной модели и применимости к ней приведенного алгоритма.

4. Расчетные параметры

Рассматривались конструкции трех разных размеров (табл. 1) из четырех разных материалов (табл. 2). Таким образом, всего было исследовано 12 конструкций (табл. 3)

Таблица 1

Варианты геометрических характеристик

Table 1

Variants of geometric characteristics

Характеристика	Вариант геометрии		
	1	2	3
h , м	0,09	0,09	0,09
$a = b$, м	5,4	10,8	18
$R_1 = R_2$, м	20,25	40,05	45,27

Таблица 2

Варианты физических характеристик материала

Table 2

Variants of the physical characteristics of the material

Характеристика	Углеродистый М60J/Эпоxy [8]	Графит AS/3501/Эпоxy [7]	E-Glass/Эпоxy [7]	Стеклопластик T10/УРЕ22-27/ Эпоxy [8]
E_1 , МПа	330000	138000	60700	29400
E_2 , МПа	59000	8960	24800	17800
$G_{12} = G_{13} = G_{23}$, МПа	3900	7100	12000	3010
μ_{12}	0,320	0,300	0,230	0,123
μ_{21}	0,057	0,019	0,094	0,074
Показатель анизотропии	5,59	15,4	2,44	1,65

Таблица 3

Варианты рассматриваемых конструкций

Table 3

Variants of the constructions under consideration

Вариант конструкции	Материал	Вариант геометрических характеристик
1	Углепластик М60J/Ероху	1
2	Графит AS/3501/Ероху	1
3	Е-Glass/Ероху	1
4	Стеклопластик Т10/UPE22-27/Ероху	1
5	Углепластик М60J/Ероху	2
6	Графит AS/3501/Ероху	2
7	Е-Glass/Ероху	2
8	Стеклопластик Т10/UPE22-27/Ероху	2
9	Углепластик М60J/Ероху	3
10	Графит AS/3501/Ероху	3
11	Е-Glass/Ероху	3
12	Стеклопластик Т10/UPE22-27/Ероху	3

Для определения оптимального числа членов разложения проведем сравнение получаемых данных при $N = 4, 9, 16, 25$. Будем рассматривать конструкции 9, 10, 11 и 12, т.е. вариант геометрических характеристик 3, выполненный из всех четырех приведенных материалов. Результаты для варианта конструкции 9 приведены на рис. 3, для варианта 10 – на рис. 4, для варианта 11 – на рис. 5, для варианта 12 – на рис. 6.

Обозначение W_c^i соответствует прогибу в центре конструкции при $i = N$ членах разложения, а W_{max}^i – наибольшему прогибу оболочки.

Для оболочки варианта 10 также проведем сравнение значений нормальных напряжений σ_x , σ_y и интенсивности напряжений σ_i . Анализ значений будем проводить в центре конструкции, так как на краях (в том числе в угловых точках) значения всех компонентов напряжений будут равны нулю. Полученные результаты приведены на рис. 7–9 и в табл. 4.

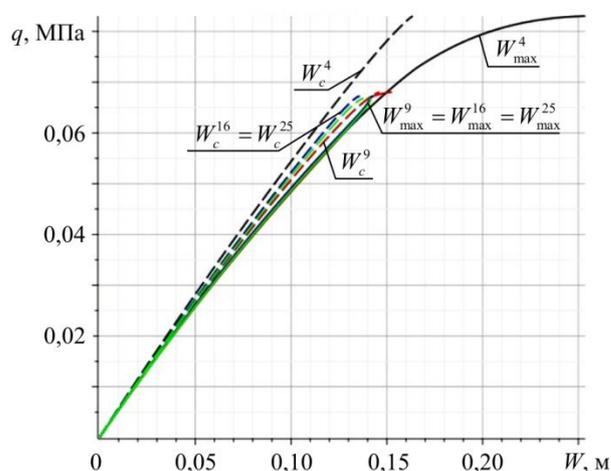


Рис. 4. Сходимость результатов для варианта конструкции 10

Fig. 4. Convergence of results for the 10th variant of the construction

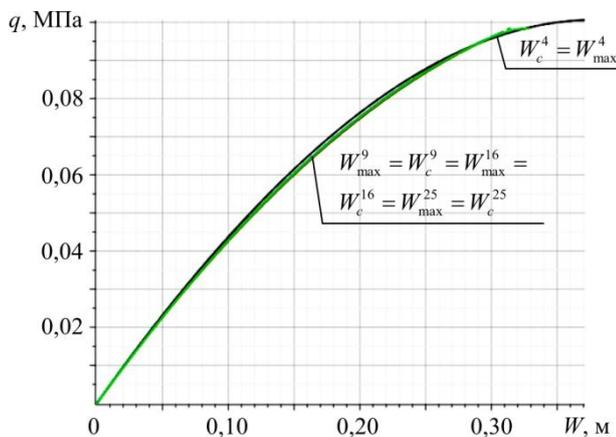


Рис. 3. Сходимость результатов для варианта конструкции 9

Fig. 3. Convergence of results for the 9th variant of the construction

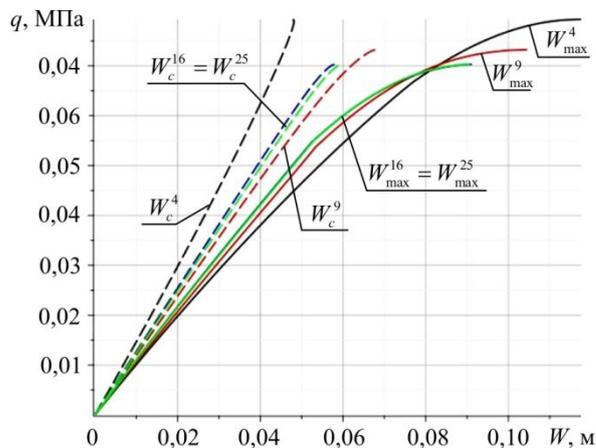


Рис. 5. Сходимость результатов для варианта конструкции 11

Fig. 5. Convergence of results for the 11th variant of the construction

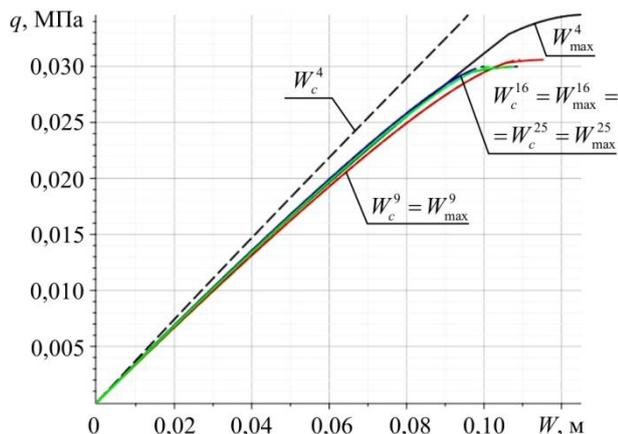


Рис. 6. Сходимость результатов для варианта конструкции 12

Fig. 6. Convergence of results for the 12th variant of the construction

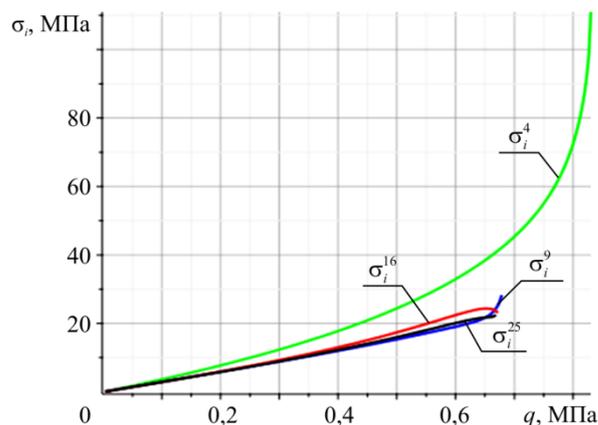


Рис. 9. Сходимость интенсивности напряжений σ_i для варианта конструкции 10

Fig. 9. Convergence of the intensity strain σ_i for the 10th variant of the construction

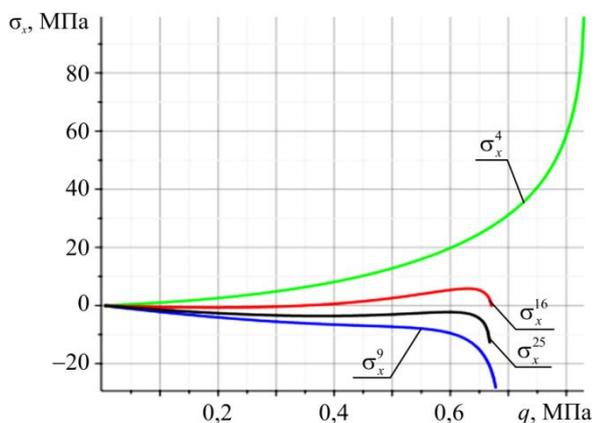


Рис. 7. Сходимость напряжений σ_x для варианта конструкции 10

Fig. 7. Convergence of σ_x strains for the 10th variant of the construction

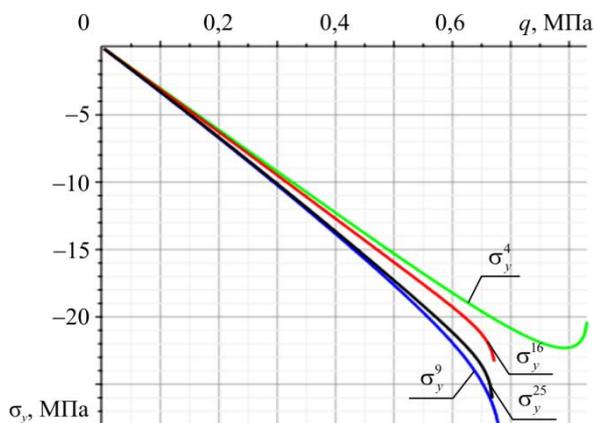


Рис. 8. Сходимость напряжений σ_y для варианта конструкции 10

Fig. 8. Convergence of σ_y strains for the 10th variant of the construction

Таблица 4

Значения напряжений в центре оболочки варианта 10 в момент потери устойчивости

Table 4

The strain values corresponding to the critical buckling load in the center of the 10th variant of the construction

N	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_i , МПа
4	99,38	-20,38	110,98
9	-28,55	-27,98	28,27
16	-0,48	-23,32	23,08
25	-13,01	-26,03	22,55

Полученные значения напряжений для оболочки варианта 10 показывают хорошую сходимость для σ_y и σ_i , для σ_x сходимость есть, но выражена слабее.

Как можно заметить из представленных в данном разделе графиков и таблиц, расчеты на устойчивость при $N = 16$ и $N = 25$ дают близкий результат вне зависимости от материала, из которого изготовлена конструкция. Таким образом, все дальнейшие расчеты будут проводиться при удержании $N = 16$ членах разложения в методе Бубнова–Галеркина (5).

5. Исследование устойчивости

Проводится расчет устойчивости 12 конструкций, приведенных в табл. 3, с геометрическими характеристиками, указанными в табл. 1, и физическими характеристиками, указанными в табл. 2.

На рис. 10 приведены графики «нагрузка–прогиб» для варианта геометрических параметров 1 для всех четырех материалов. Индекс W_{\max}^k соответствует наибольшему прогибу конструкции из материала k , а индекс W_c^k – прогибу в центре. Для рассматриваемой конструкции наибольший прогиб равен прогибу в центре оболочки: $W_{\max}^k = W_c^k$.

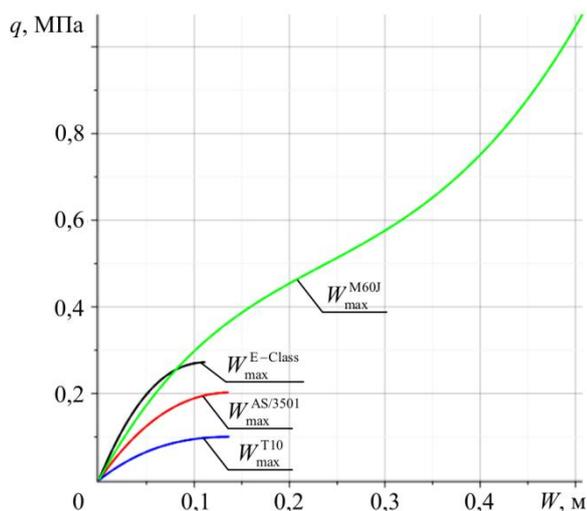


Рис. 10. График зависимости «нагрузка-прогиб» для варианта геометрических параметров 1
 Fig. 10. Graph of the "load-deflection" dependence for the 1st variant of geometric parameters

На рис. 11 приведены графики «нагрузка-прогиб» для варианта геометрических параметров 2 для всех четырех материалов.

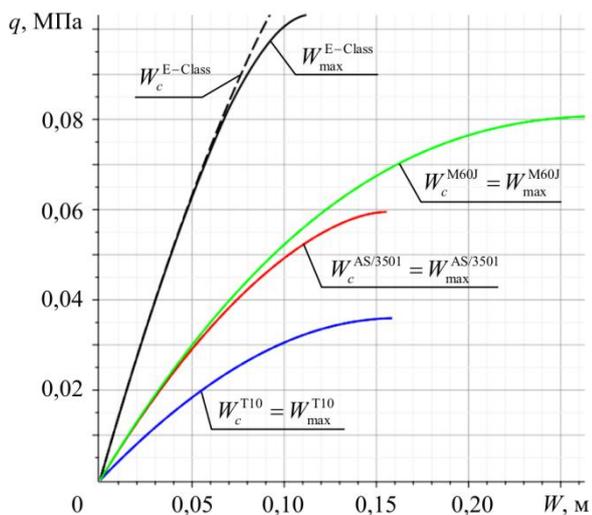


Рис. 11. График зависимости «нагрузка-прогиб» для варианта геометрических параметров 2
 Fig. 11. Graph of the "load-deflection" dependence for the 2nd variant of geometric parameters

На рис. 12 приведены графики «нагрузка-прогиб» для варианта геометрических параметров 3 для всех четырех материалов.

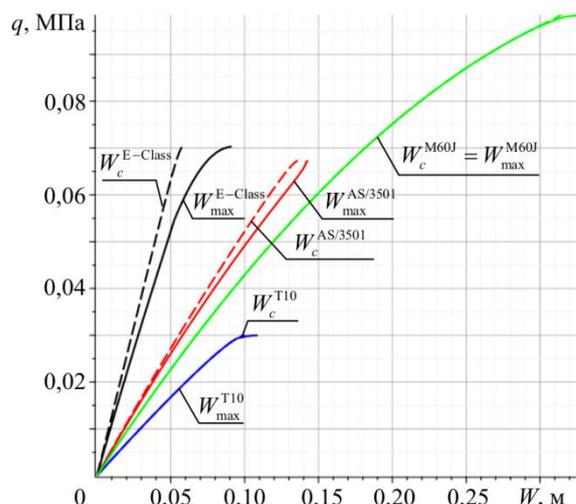


Рис. 12. График зависимости «нагрузка-прогиб» для варианта геометрических параметров 3
 Fig. 12. Graph of the "load-deflection" dependence for the 3rd variant of geometric parameters

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что для конструкций с вариантом геометрических параметров 1 прогиб в центре совпадает с максимальным для всех четырех материалов. Это связано с отношением длины сторон оболочки к ее толщине. Для остальных двух вариантов геометрических параметров при той же толщине размеры в плане существенно больше, чем у первого варианта. Отсюда возникает различие между значениями прогиба в центре конструкции и ее максимальным прогибом, особенно вблизи критической нагрузки потери устойчивости. Для вариантов конструкций 5–8 (вариант геометрических параметров 2) это характерно только для стекловолокна E-Glass/Эпоху, а для вариантов конструкций 9–12 (вариант геометрических параметров 3) – уже для всех исследуемых материалов.

Все значения критических нагрузок q_{kr} , при которых оболочки теряют устойчивость, сведены в табл. 5, а значение наибольшего прогиба, соответствующего этой нагрузке, – в табл. 6.

Таблица 5

Значения критических нагрузок потери устойчивости q_{kr}

Table 5

The values of the critical loads of buckling q_{kr}

Вариант геометрии	q_{kr} , МПа			
	Углепластик М60J/Эпоху	Графит AS/3501/Эпоху	E-Glass/Эпоху	Стеклопластик T10/УРЕ22-27/ Эпоху
1	0,575	0,205	0,265	0,105
2	0,081	0,059	0,120	0,036
3	0,098	0,067	0,070	0,030

Значения наибольшего прогиба W_{max}^{kr} , соответствующего потере устойчивости

Table 6

The values of the maximum deflection W_{max}^{kr} corresponding to the critical buckling load

Вариант геометрии	W_{max}^{kr} , М			
	Углепластик М60J/Эпоху	Графит AS/3501/Эпоху	E-Glass/Эпоху	Стеклопластик T10/UPE22-27/ Эпоху
1	0,300	0,130	0,115	0,135
2	0,261	0,155	0,115	0,159
3	0,328	0,143	0,091	0,109

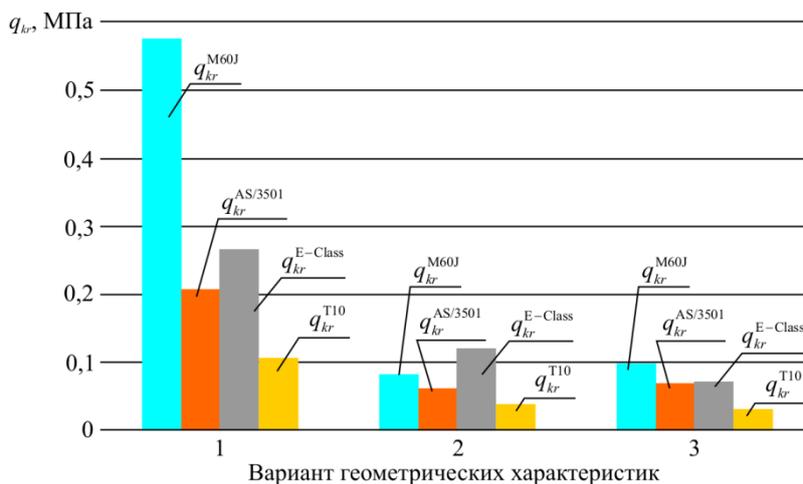


Рис. 13. Критические нагрузки потери устойчивости в зависимости от выбранного материала

Fig. 13. The critical buckling loads, depending on a chosen material

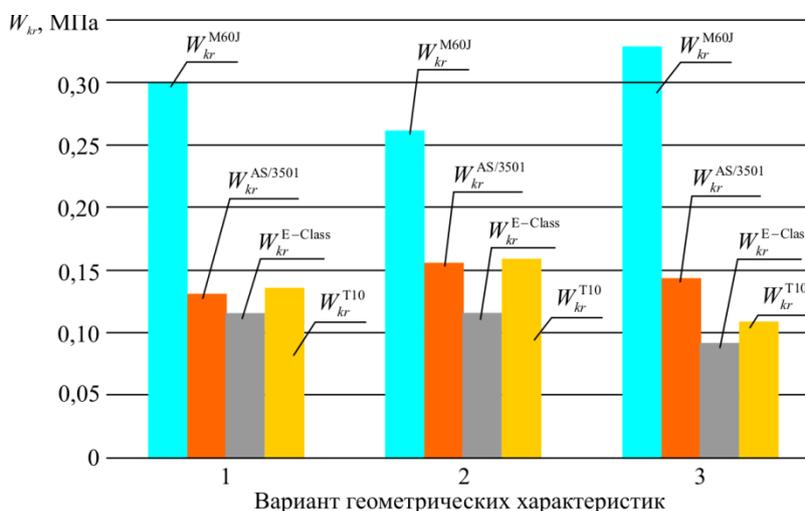


Рис. 14. Значения максимального прогиба, соответствующего потере устойчивости, в зависимости от выбранного материала

Fig. 14. The values of the maximum deflection corresponding to the critical buckling load, depending on a selected material

Для лучшего восприятия данных в табл. 5, 6 те же самые значения приведены на рис. 13 и 14 соответственно. На следующих графиках индекс W_{kr}^i обозначает максимальный прогиб оболочки из материала i , соответствующий потере устойчивости, то есть при нагрузке $q = q_{kr}^i$.

Как видно из представленных графиков и таблиц, наибольшее значение критической нагрузки потери устойчиво-

сти из рассмотренных материалов дают углепластик М60J/Эпоху и стекловолокно E-Glass/Эпоху. При этом оболочки, выполненные из стекловолокна E-Glass/Эпоху, к моменту достижения критической нагрузки потери устойчивости имеют наименьший максимальный прогиб среди всех четырех рассматриваемых материалов, в то время как конструкции из углепластика – наибольший.

Таким образом, можно говорить о том, что наилучшим выбором среди четырех рассмотренных материалов будет E-Glass/Ероху в силу высокой устойчивости и большой несущей способности выполненных из него конструкций. Однако заметим, что углепластик М60J/Ероху в данном случае был выбран однонаправленный, в то время как стеклопластик имеет волокна, уложенные в обоих направлениях. Укладка волокон углепластика в обоих направлениях может сделать его наиболее оптимальным материалом.

Заключение

В ходе исследования рассматривались пологие оболочки двоякой кривизны, прямоугольные в плане. Оболочки закреплены по контуру шарнирно-подвижно и выполнены из ортотропного материала. По результатам исследования были получены следующие выводы и результаты:

Библиографический список

1. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – №1. – С. 51–56.
2. Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А. Конечно-элементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками // Инженерно-строительный жур. – 2015. – № 1(53). – С. 56–69. DOI: 10.5862/МСЕ.53.6
3. Спасская М.В., Трещев А.А. Термоупругое деформирование цилиндрической оболочки из анизотропного разноспротивляющегося материала // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2015. – № 1. – С. 65–74.
4. Duc N.D., Tung H.V. Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92 – P. 1664–1672. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.11.033
5. Гумерова Х.С. Влияние деформации поперечного сдвига на устойчивость ортотропной термочувствительной цилиндрической оболочки // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2017. – Т. 20, № 7. – С. 91–92.
6. Kukudzhyanov S. The stability of orthotropic shells of revolution, close to cylindrical ones, with an elastic filler, under the action of torsion, normal pressure and temperature // Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. – 2017. DOI: 10.1016/j.trmi.2017.10.005
7. Zhao X., Liew K.M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells // International Journal of Mechanical Sciences. – 2009. – Vol. 51 – P. 131–144. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2008.12.004
8. Rotter J.M., Sadowski A.J. Cylindrical shell bending theory for orthotropic shells under general axisymmetric pressure distributions // Engineering Structures. – 2012. – Vol. 24 – P. 258–265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.04.024
9. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Расчет ортотропных конструкций вариационным методом на основе трехмерных функций с конечным носителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 195–207. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.11
10. Karpov V.V., Semenov A.A. Mixed-form equations for stiffened orthotropic shells of arbitrary canonical shape with static load // Journal of Mechanics. – 2017. DOI: 10.1017/jmech.2017.82
11. Bich D.H., Nam V.H., Phuong N.T. Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells // Vietnam Journal of Mechanics. – 2011. – Vol. 33 – P. 131–147. DOI: 10.15625/0866-7136/33/3/207
12. Okhovat R., Boström A. Dynamic equations for an orthotropic cylindrical shell // Composite Structures. – 2018. – Vol. 184 – P. 1197–1203. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.10.034
13. Sofiyev A.H., Pancar E.B. The effect of heterogeneity on the parametric instability of axially excited orthotropic conical shells // Thin-Walled Structures. – 2017. – Vol. 115 – P. 240–246. DOI: 10.1016/j.tws.2017.02.023
14. Sofiyev A.H. The effect of elastic foundations on the nonlinear buckling behaviour of axially compressed heterogeneous orthotropic truncated conical shells // Thin-Walled Structures. – 2014. – Vol. 80 – P. 178–191. DOI: 10.1016/j.tws.2014.03.016
15. Nonlinear dynamic stability of the orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation subjected to a linearly increasing load / K. Gao, W. Gao, D. Wu, S. Song // Journal of Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 415 – P. 147–168. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.11.038
16. Kaplunov J., Nobili A. A robust approach for analysing dispersion of elastic waves in an orthotropic cylindrical shell // Journal of Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 401. – P. 23–35. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.04.028
17. Jiang W., Redekop D. Static and vibration analysis of orthotropic toroidal shells of variable thickness by differential quadrature // Thin-Walled Structures. – 2003. – Vol. 41. – P. 461–478. DOI: 10.1016/S0263-8231(02)00116-7
18. Ungbhakorn V., Singhatanadgid P. A Scaling Law for Vibration Response of Laminated Doubly Curved Shallow Shells by Energy Approach // Structural Engineering and Mechanics. – 2002. – Vol. 14. – P. 345–364. DOI: 10.1080/15376490902970430
19. Stress and strain recovery for functionally graded free-form and doubly-curved sandwich shells using higher-order equivalent single layer theory / F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, R.C. Batra // Composite Structures. – 2015. – Vol. 119. – Iss. 1. – P. 67–89. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.08.005

20. Paccola R.R., Sampaio M.S.M., Coda H.B. Continuous stress distribution following transverse direction for FEM orthotropic laminated plates and shells // *Applied Mathematical Modelling*. – 2016. – Vol. 40. – P. 7382–7409. DOI: 10.1016/j.apm.2016.03.005

21. Тышкевич В.Н. Выбор критерия прочности для труб из армированных пластиков // *Изв. ВолгГТУ*. – 2011. – № 5 (78). – С. 76–79.

22. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // *Изв. вузов. Сер. Машиностроение*. – 2012. – № 8. – С. 70–77.

23. Karpov V.V., Maslennikov A.M. Methods for Solving Non-Linear Tasks for Calculating Construction Structures // *World Applied Sciences Journal*. – (Problems of Architecture and Construction). – 2013. – Vol. 23. – P. 178–183. DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035. – URL: <http://idosi.org/wasj/wasj23%28pac%2913/35.pdf> (accessed 12 February 2018).

24. Kuo S.-R., Yau J.D. Buckling Equations of Orthotropic Thin Plates // *Journal of Mechanics*. – 2012. – Vol. 28. – P. 555–567. DOI: 10.1017/jmech.2012.64

25. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Komarov S.A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. –

2005. – Vol. 194. – No. 27–29. – P. 3108–3126. DOI: 10.1016/j.cma.2004.08.005.

26. Analytical Method of Determining Folded Depressed Shells Free Oscillation Frequency / L.N. Kondratyeva, Yu.L. Routman, A.M. Maslennikov, O.V. Golykh // *Advanced Materials Research*. – 2014. – Vol. 1020. – P. 291–296. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.291

27. Zerlin Z. The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure // *Structural Engineering and Mechanics*. – 2012. – Vol. 43. – No. 1. – P. 89–103. DOI: 10.12989/sem.2012.43.1.089

28. Karpov V. Variational method for derivation of equations of mixed type for shells of a general type // *Architecture and Engineering*. – 2016. – Vol. 1. – No. 2. – P. 43–48. DOI: 10.23968/2500-0055-2016-1-2-43-48

29. Korobko V.I., Savin S.Yu., Ivlev I.A. Stability analysis of orthotropic plates by the form factor interpolation method // *Procedia Engineering*. – 2017. – Vol. 206. – P. 924–928. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.573

30. Chupin V.V., Chernogubov D.E. Stability of flexible spherical panels of variable thickness under various fixing conditions // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2015. – No. 5. – P. 45–57. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.045-057

References

1. Krivoschapko S.N. O vozmozhnostiakh obolocheknykh sooruzhenii v sovremennoi arkhitekture i stroitel'stve [On opportunity of shell structures in modern architecture and building]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2013, No. 1, pp. 51–56.

2. Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A. Konechno-elementnye modeli issledovaniia nelineinogo deformirovaniia obolochek stupenchato-peremennoi tolshchiny s otverstiiami, kanalami i vyemkami [Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal – Magazine of Civil Engineering*, 2015, No. 1(53), pp. 56–69. doi: 10.5862/MCE.53.6

3. Spasskaya M.V., Treshchev A.A. Termouprugoe deformirovanie tsilindricheskoi obolochki iz anizotropnogo raznosoprotivliaiushchegosia materiala [Thermoelastic deformation of the cylindrical shell made of anisotropic different resistant material]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ia. Iakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoiianiia – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Series: Mechanics of Limit State*, 2015, No. 1, pp. 65–74

4. Duc N.D., Tung H.V. Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects. *Composite Structures*, 2010, Vol. 92, pp. 1664–1672. doi: 10.1016/j.compstruct.2009.11.033

5. Gumerova H.S. Vliianie deformatsii poperechnogo sdviga na ustoychivost' ortotropnoi termochuvstvitel'noi tsilindricheskoi obolochki [Influence of the transverse shear strain on the stability of an orthotropic thermally sensitive cylindrical shell]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Bulletin of the Kazan Technological University*, 2017, Vol. 20, No. 7, pp. 91–92.

6. Kukudzhinov S. The stability of orthotropic shells of revolution, close to cylindrical ones, with an elastic filler, under the action of torsion, normal pressure and temperature. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, 2017. doi: 10.1016/j.trmi.2017.10.005

7. Zhao X., Liew K.M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2009, Vol. 51, pp. 131–144. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2008.12.004

8. Rotter J.M., Sadowski A.J. Cylindrical shell bending theory for orthotropic shells under general axisymmetric pressure distributions. *Engineering Structures*, 2012, Vol. 24, pp. 258–265. doi: 10.1016/j.engstruct.2012.04.024

9. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Calculation of orthotropic constructions by a variation method on the basis of three-dimensional functions with final carriers. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 2, pp. 195–207. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.11

10. Karpov V.V., Semenov A.A. Mixed-form equations for stiffened orthotropic shells of arbitrary canonical shape with static load. *Journal of Mechanics*, 2017. doi: 10.1017/jmech.2017.82

11. Bich D.H., Nam V.H., Phuong N.T. Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells. *Vietnam Journal of Mechanics*, 2011, Vol. 33, pp. 131–147. doi: 10.15625/0866-7136/33/3/207

12. Okhovat R., Boström A. Dynamic equations for an orthotropic cylindrical shell. *Composite Structures*, 2018, Vol. 184, pp. 1197–1203. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.10.034

13. Sofiyev A.H., Pancar E.B. The effect of heterogeneity on the parametric instability of axially excited orthotropic conical shells. *Thin-Walled Structures*, 2017, Vol. 115, pp. 240–246. doi: 10.1016/j.tws.2017.02.023

14. Sofiyev A.H. The effect of elastic foundations on the nonlinear buckling behaviour of axially compressed heterogeneous orthotropic truncated conical shells. *Thin-Walled Structures*, 2014, Vol. 80, pp. 178–191. doi: 10.1016/j.tws.2014.03.016

15. Gao K., Gao W., Wu D., Song S. Nonlinear dynamic stability of the orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation subjected to a linearly increasing load. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, Vol. 415, pp. 147–168. doi: 10.1016/j.jsv.2017.11.038

16. Kaplunov J., Nobili A. A robust approach for analysing dispersion of elastic waves in an orthotropic cylindrical shell.

Journal of Sound and Vibration, 2017, Vol. 401, pp. 23-35. doi: 10.1016/j.jsv.2017.04.028

17. Jiang W., Redekop D. Static and vibration analysis of orthotropic toroidal shells of variable thickness by differential quadrature. *Thin-Walled Structures*, 2003, Vol. 41, pp. 461-478. doi: 10.1016/S0263-8231(02)00116-7

18. Ungbhakorn V., Singhatanadgid P. A Scaling Law for Vibration Response of Laminated Doubly Curved Shallow Shells by Energy Approach. *Structural Engineering and Mechanics*, 2002, Vol. 14, pp. 345-364. doi: 10.1080/15376490902970430

19. Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Batra R.C. Stress and strain recovery for functionally graded free-form and doubly-curved sandwich shells using higher-order equivalent single layer theory. *Composite Structures*, 2015, Vol. 119, Issue 1, pp. 67-89. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.08.005

20. Paccola R.R., Sampaio M.S.M., Coda H.B. Continuous stress distribution following transverse direction for FEM orthotropic laminated plates and shells. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, Vol. 40, pp. 7382-7409. doi: 10.1016/j.apm.2016.03.005

21. Tyshkevich V.N. Vybor kriteriia prochnosti dlia trub iz armirovannykh plastikov [The choice of the criterion of strength for pipes from reinforced plastics]. *Izvestiia Volgogradskogo Gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Izvestiya VolgGTU*, 2011, No.5 (78), pp. 76–79.

22. Smerdov A.A., Buyanov I.A., Chudnov I.V. Analiz optimal'nykh sochetanii trebovaniy k razrabatyvaemym ugleplastikam dlia krupnogabaritnykh raketno-kosmicheskikh konstruksii [Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space rocket designs]. *Izvestiia VUZov. Seriia "Mashinostroenie" – Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*. 2012, No. 8, pp. 70-77.

23. Karpov V.V., Maslennikov A.M. Methods for Solving Non-Linear Tasks for Calculating Construction Structures. *World Applied*

Sciences Journal, 23 (Problems of Architecture and Construction), 2013, pp. 178-183, available at <http://idosi.org/wasj/wasj23%28pac%2913/35.pdf> doi: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035.

24. Kuo S.-R., Yau J.D. Buckling Equations of Orthotropic Thin Plates. *Journal of Mechanics*, 2012, Vol. 28, pp. 555-567. doi: 10.1017/jmech.2012.64

25. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Komarov S.A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, Vol. 194, No. 27-29, pp. 3108-3126. doi: 10.1016/j.cma.2004.08.005.

26. Kondratyeva L.N., Routman Yu.L., Maslennikov A.M., Golykh O.V. Analytical Method of Determining Folded Depressed Shells Free Oscillation Frequency. *Advanced Materials Research*, 2014, Vol. 1020, pp. 291-296. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.291.

27. Zerlin Z. The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure. *Structural Engineering and Mechanics*, 2012. Vol. 43, No. 1, pp. 89-103. doi: 10.12989/sem.2012.43.1.089.

28. Karpov V. Variational method for derivation of equations of mixed type for shells of a general type. *Architecture and Engineering*, 2016, Vol. 1, No. 2, pp. 43-48. doi: 10.23968/2500-0055-2016-1-2-43-48.

29. Korobko V.I., Savin S.Yu., Ivlev I.A. Stability analysis of orthotropic plates by the form factor interpolation method. *Procedia Engineering*, 2017, Vol. 206, pp. 924-928. doi: 10.1016/j.proeng.2017.10.573

30. Chupin V.V., Chernogubov D.E. Stability of flexible spherical panels of variable thickness under various fixing conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, No. 5, pp. 45-57. doi: 10.17804/2410-9908.2015.5.045-057. (rus)