

Ляшенко Я.А., Виллерт Э., Попов В.Л. Механика столкновений твердых тел: влияние трения и адгезии. I. Обзор экспериментальных и теоретических работ // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 44–61. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.05

Lyashenko I.A., Willert E., Popov V.L. Mechanics of collisions of solids: influence of friction and adhesion. I. Review of experimental and theoretical works. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 44-61. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.05



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.05

УДК: 531.133.1; 531.311; 539.312

МЕХАНИКА СТОЛКНОВЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ: ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ И АДГЕЗИИ. I. ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАБОТ

Я.А. Ляшенко^{1,2}, Э. Виллерт¹, В.Л. Попов^{1,3,4}

¹Берлинский технический университет, Берлин, Германия

²Сумский государственный университет, Сумы, Украина

³Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

⁴Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 05 июня 2018 г.

Принята: 26 июня 2018 г.

Опубликована: 29 июня 2018 г.

Ключевые слова:

столкновение, нормальный и тангенциальный контакт, адгезия, трение, скольжение, коэффициент восстановления, метод редукции размерности.

АННОТАЦИЯ

Столкновения твердых тел представляют значительный интерес для многих отраслей физики и инженерных наук. Данный обзор посвящен неупругим столкновениям твердых тел, в которых диссипация энергии обусловлена наличием внутреннего или внешнего трения, адгезии, шероховатостей, процессов пластической деформации, а также других специфических каналов затухания. Рассматриваются исключительно двухчастичные столкновения, которые эквивалентно могут быть сведены к задаче о столкновении твердой частицы с упругим полупространством. Эта последняя задача рассматривается как без учета проскальзывания (бесконечный коэффициент трения), так и при наличии трения с конечным коэффициентом, а также при наличии сил адгезии между контактирующими телами. Дан обзор основных результатов теоретических и экспериментальных исследований столкновений как для упругих, так и для упруго-пластических частиц. Основное внимание уделяется, однако, случаю столкновений упругих частиц. Рассмотрен косой удар, в котором в момент столкновения частицы имеют ненулевые нормальную и тангенциальную компоненты скоростей. Во многих случаях приводятся полученные различными авторами аналитические выражения для коэффициента восстановления, который представляет отношение скорости тела после соударения к его начальной скорости до момента контакта. В общем случае коэффициент восстановления зависит от адгезионных и пластических характеристик контактирующих тел. Область высоких скоростей, при которых происходит разрушение, не рассматривается. Статья представляет собой первую часть обзора. Во второй части будут приведены результаты математического и численного моделирования, полученные авторами в рамках метода редукции размерности, который позволяет проводить описание трехмерного контакта путем трансформации к эквивалентной задаче в одномерном пространстве.

© ПНИПУ

© Ляшенко Яков Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник, e-mail: i.lyashenko@tu-berlin.de

Виллерт Эмануэль – научный сотрудник, e-mail: e.willert@tu-berlin.de

Попов Валентин Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: v.popov@tu-berlin.de

Iakov A. Lyashenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Scientific Researcher, e-mail: i.lyashenko@tu-berlin.de

Emanuel Willert – Researcher, e-mail: e.willert@tu-berlin.de

Valentin L. Popov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: v.popov@tu-berlin.de



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MECHANICS OF COLLISIONS OF SOLIDS: INFLUENCE OF FRICTION AND ADHESION. I. REVIEW OF EXPERIMENTAL AND THEORETICAL WORKS

I.A. Lyashenko^{1,2}, E. Willert¹, V.L. Popov^{1,3,4}

¹Berlin University of Technology, Berlin, Germany

²Sumy State University, Sumy, Ukraine

³National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

⁴National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 05 June 2018

Accepted: 26 June 2018

Published: 29 June 2018

Keywords:

impact, normal and tangential contact, adhesion, friction, partial sliding, restitution coefficient, method of dimensionality reduction.

ABSTRACT

Collisions of solid bodies are of significant interest for a great variety of physical and engineering applications. This review is devoted to non-elastic collisions of solid bodies when the energy dissipation is caused by the inner or interface friction, plasticity, adhesion, or other damping mechanisms. We consider only two-particle collisions. This impact problem can be reduced to the collision of a solid particle with a half-space. We discuss the collision without slip (infinite coefficient of friction) and in the presence of a finite coefficient of friction, as well as in the presence of adhesion between contacting bodies. A review is given of the previous theoretical and experimental work on both elastic and non-elastic impacts. However, the focus of the present work is on collisions of elastic particles. We consider the general oblique impact with non-zero normal and tangential velocity components of impacting particles. Analytical expressions for the restitution coefficient obtained by many authors are presented. Generally, the restitution coefficient depends on adhesive and plastic properties of contacting bodies. High velocity impact with destruction of particles does not belong to the scope of the paper. This paper is the first part of a two-parts-review. In the second part the results of analytical and numerical simulations will be presented, which have been obtained by the authors using the method of dimensionality reduction, allowing for reduction of three-dimensional contact problems to a much simpler equivalent problem in a one-dimensional space.

© PNRPU

Введение

Столкновения твердых частиц представляют интерес с точки зрения многих физических и технологических процессов, связанных с динамикой гранулированных сред [1–5]. Даже в простейшем случае, когда частицы имеют сферическую форму, а материал частицы может рассматриваться как упругий, динамика их взаимодействия может быть очень сложной [6] и включать частичное проскальзывание, полное скольжение или схватывание в зоне контакта на протяжении различных фаз столкновения [7]. Это одна из основных причин, по которой до сих пор не существует единой теории, адекватно описывающей процессы, происходящие при столкновениях частиц. Точное аналитическое решение существует только для простейшего случая, когда во всей области контакта наблюдается полное скольжение, происходящее на протяжении всего столкновения. Тем не менее уже в другом предельном случае отсутствия скольжения в зоне контакта (эквивалент бесконечно большого коэффициента трения) полное решение не было получено до недавнего времени, несмотря на кажущуюся простоту задачи. Классическая теория, которая использует только законы сохранения и условие качения и которая может быть найдена в учебниках по механике [8], является противоречивой, поскольку тело считается упругим, однако в то же время используется кинематическое условие вращения несжимаемого твердого

шара. Тангенциальный контакт, а также микропроскальзывание в зоне контакта впервые были описаны в работе [7] (MBF-теория). Авторы указанной работы основывались на теории нормального контакта упругих шаров, предложенной Герцем в 1882 г. [9], и теории Миндлина тангенциальных контактов [10]. Позже Барбер предложил аналитическое описание [11], однако только для тех фаз столкновения, в которых отсутствует проскальзывание. Теория MBF была подтверждена экспериментально сперва самими авторами [12], а затем и другими научными группами [13–16]. Обзор существующих моделей столкновений и их экспериментальные подтверждения можно найти в книге [17]. В другой книге [18] рассматривается большое количество задач о столкновении несжимаемых тел, в том числе при наличии в зоне контакта силы трения. Однако несжимаемость тела является идеализацией, а контактные процессы определяют поведение тел после столкновения, поскольку степень сжимаемости в значительной степени определяет уровень диссипации механической энергии, в том числе ее потери на силу трения, адгезионное взаимодействие, а также на пластическое деформирование в зоне контакта.

В связи с высокой актуальностью рассматриваемой проблемы в настоящее время существует большое количество теоретических и экспериментальных работ, в том числе и отечественных ученых. К примеру, в работе [19] предложена нелинейная модель упруго-пластических

столкновений с сухим трением между контактирующими поверхностями, где аналитически определена зависимость коэффициента восстановления¹ от коэффициента трения. В [20] проведено аналитическое описание различных фаз столкновения с учетом пластической деформации. В работе [21] авторы рассматривают комплексную проблему нормального и тангенциального контакта при взаимодействии жесткого тела с нелинейным упругим полупространством, причем в работе присутствует как математическая модель, так и численный эксперимент. В [22] проводится обсуждение зависимости коэффициента восстановления от упругих свойств материала и его твердости на примере твердого стекла и вязкоупругой резины, когда существенное влияние оказывают вязкие диссипативные эффекты. Изучение влияния твердости на коэффициент восстановления проводится также в работе [23]. Однако, несмотря на длительную историю исследования физики столкновений, существующие теории и результаты по-прежнему покрывают лишь небольшую часть теоретически возможных параметров столкновений. Более того, на сегодняшний день не существует эффективных численных методов, которые позволяли бы полностью описать процессы, происходящие во время контакта при столкновении.

Настоящий обзор посвящен описанию упругого столкновения сферических тел под углом к упругому полупространству, которое основывается на результатах реальных и численных экспериментов. Предлагаемая работа состоит из двух частей: первая часть посвящена анализу литературных данных и описанию существующих экспериментов, а также результатов ряда теоретических подходов. Во второй части описаны результаты моделирования, выполненного авторами настоящей работы в рамках метода редукции размерности (MDR) и проведено обобщение полученных результатов, а также их сравнение с известными экспериментами.

Данная (первая) часть обзора построена следующим образом. В разделе 1 описана постановка задачи, приведены схема рассматриваемой системы и классическое аналитическое решение. В разделе 2 представлен обзор литературных источников, в которых описываются результаты экспериментов по нормальному столкновению сферических тел с упругой плоскостью. Отдельно выделены эксперименты с микрометровыми и миллиметровыми частицами. Приведено краткое описание теоретических подходов, предлагаемых авторами экспериментов. Основное внимание уделено определению коэффициента восстановления. Описаны различные механизмы диссипации, связанные с адгезией, а также неупругими эффектами в материале типа пластической деформации и вязкой диссипации. В конце раздела кратко представлены результаты теоретического подхода, который учитывает адгезию и пластическое течение

¹ Коэффициентом восстановления скорости называется отношение скорости до столкновения (начальной скорости) к скорости после столкновения. В случае столкновения под углом, как правило, отдельно рассматриваются коэффициенты восстановления для нормальной и тангенциальной компонент скоростей.

материала. Показано, что при малых скоростях столкновений диссипация механической энергии происходит за счет адгезии, а при больших скоростях адгезионный вклад становится несущественным, и преобладает диссипация за счет пластической деформации. В разделе 3 проанализированы экспериментальные работы, изучающие процессы, происходящие при столкновении частиц с поверхностью под косым углом. Подробно рассмотрены эксперименты по столкновению в упругой области, а также при наличии пластических эффектов. Описаны фазы столкновения с преобладанием «прилипания» в контакте, частичным проскальзыванием и полным проскальзыванием. Приведена соответствующая диаграмма в зависимости от угла падения. Показано, что при превышении углом падения границы в 30° коэффициент тангенциального восстановления при упругом столкновении хорошо описывается функцией коэффициента трения и угла падения и при этом не зависит от материальных параметров системы типа модулей упругости. Аналогичная аппроксимация приведена для столкновений в пластической области.

1. Схематическое представление столкновения упругого шара с упругим полупространством и классическое аналитическое решение

В настоящем обзоре мы ограничиваемся рассмотрением столкновения частиц с полупространством. Эта базовая задача теории столкновений может быть легко обобщена на случай столкновения двух конечных частиц. Во избежание излишнего усложнения изложения этой и без того достаточно сложной проблемы мы отказались от явного рассмотрения механизма сведения общей задачи столкновений к задаче столкновения с полупространством. Детали этой редукции можно найти в классических учебниках по теории столкновений, например в [17]. Рассмотрим столкновение упругого шара массой m и радиусом R с упругим полупространством, как это показано на рис. 1.

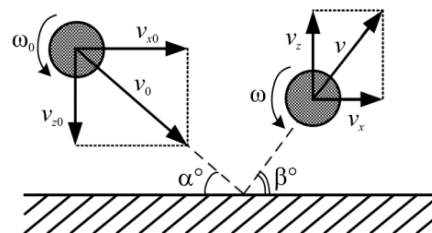


Рис. 1. Схематическое представление столкновения сферического тела с полупространством под углом к поверхности
Fig. 1. Schematic representation of the collision of a spherical body with a half-space at an angle to the surface

Пусть модули упругости шара и полупространства равны E_1 и E_2 , коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 , сдвиговые модули G_1 и G_2 , а плотности материалов шара и полупространства ρ_1 и ρ_2 . Начальная скорость шара

v_0 до акта столкновения раскладывается на вертикальную v_{z0} и горизонтальную v_{x0} компоненты, начальная угловая скорость вращения шара ω_0 . После акта столкновения часть кинетической энергии передается телу, с которым шар контактировал, и в результате эти величины становятся равными v , $-v_z$, v_x , ω . Зная величины компонент скоростей, легко определить угол скольжения для падающего тела α° , а также угол скольжения β° , с которым шар отлетает от поверхности.

Для начала воспроизведем классическое решение этой задачи. Пусть F_x и F_z – силы, действующие на тело во время контакта со стороны полупространства. В интегральной форме уравнения движения шара запишутся в виде [8, 18]

$$m(v_z - v_{z0}) = -\int_0^t F_z(t') dt', \quad (1.1)$$

$$m(v_x - v_{x0}) = -\int_0^t F_x(t') dt', \quad (1.2)$$

$$I(\omega - \omega_0) = -R \int_0^t F_x(t') dt', \quad (1.3)$$

где t – время столкновения, а момент инерции сферы $I = (2/5)mR^2$. Система уравнений (1.1)–(1.3) позволяет определить все параметры после столкновения (скорость v , угол скольжения β° , угловую скорость ω) как функции аналогичных параметров до столкновения. Однако для этого необходимо знать временные зависимости тангенциальной $F_x(t)$ и нормальной $F_z(t)$ сил, определение которых всегда представляет нетривиальную задачу. При использовании условия качения для тангенциальной компоненты скорости отражения v_x

$$v_x + \omega R = 0 \quad (1.4)$$

система (1.1)–(1.3) решается аналитически точно, что приводит к известному результату [8]:

$$\bar{v}_x = \frac{5}{7} v_{x0} - \frac{2}{7} R \omega_0, \quad (1.5)$$

$$\bar{\omega} = \frac{2}{7} \omega_0 - \frac{5}{7} \frac{v_{x0}}{R}, \quad (1.6)$$

который мы в дальнейшем будем обозначать как «классическое» решение. Изменение кинетической энергии в результате столкновения составит

$$\Delta E = \frac{m}{2} (\bar{v}_x^2 - v_{x0}^2) + \frac{I}{2} (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2) = -\frac{m}{7} (v_{x0} + R\omega_0)^2. \quad (1.7)$$

Из выражения (1.7) видно, что удар не является абсолютно упругим, поскольку энергия не сохраняется (ее изменение отрицательно). Отметим, что решения (1.5), (1.6) не содержат материальных параметров типа модулей сдвига, а зависят только от начальных условий, что, как показано далее, имеет место только для узкого

диапазона параметров и в большинстве практических случаев несправедливо. Это связано с тем, что хотя уравнения (1.1)–(1.3) и являются точными (в предположении очень короткого времени воздействия), кинематическое условие (1.4) не может быть действительным на протяжении всего контакта, а его использование в момент отрыва шара от поверхности является произвольным и не обоснованным предположением. В действительности, из-за упругих свойств шара условие (1.4) будет действительным только в один момент времени на протяжении контакта. Поведение системы, показанной на рис. 1, гораздо более сложное, чем описываемое уравнениями (1.5), (1.6) и зависит от многих параметров системы.

Существует большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению физики столкновений, поскольку даже в рассматриваемом простейшем случае столкновения упругого шара с упругим полупространством задача до сих пор полностью не решена ввиду сложности описания контактных явлений.

2. Экспериментальные результаты и теоретическое описание нормального столкновения

Даже столкновение под прямым углом, без наличия тангенциального движения, с точки зрения теоретического описания является нетривиальным случаем, поскольку существует множество различных вариантов: упругий удар (с адгезией или без) при малых скоростях, упруго-пластический удар при больших скоростях, столкновение между шероховатыми поверхностями [24], столкновение при наличии между поверхностями прослойки жидкости [25], вязко-упругий удар, а также различные комбинации указанных ситуаций. Каждый конкретный случай имеет свои особенности и требует построения отдельной теории.

2.1. Эксперименты с микрометровыми частицами

На рис. 2 показаны результаты экспериментов по нормальному столкновению микроскопических сферических частиц с поверхностями, покрытыми различными веществами, полученные в работах [26–30]. Рисунок представляет собой зависимости величины коэффициента восстановления $e = |v_z|/v_{z0}$ от начальной скорости v_{z0} (см. обозначения на рис. 1) при $v_{x0} = 0$, $\omega_0 = 0$. Результаты, показанные крестиками, соответствуют серии экспериментов по столкновению частиц, выполненных из полистирола $(C_8H_8)_n$ диаметром $D = 1,27$ мкм с поверхностями, покрытыми диоксидом кремния SiO_2 либо золотой фольгой. Эксперименты проводились в условиях вакуума, поэтому изменение энергии частицы было возможным только во время контакта с поверхностью.

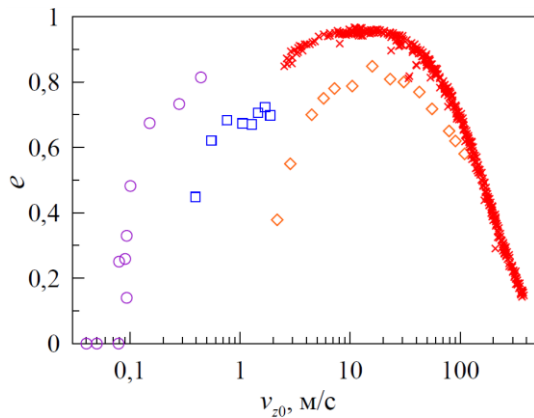


Рис. 2. Коэффициент восстановления $e = |v_z|/v_{z0}$ как функция начальной нормальной скорости v_{z0} для нормального столкновения сферических микрометровых частиц с гладкой поверхностью: крестики (частицы диаметром $D=1,27$ мкм из полистирола [26, 27]); ромбы ($D=4,9$ мкм, аммоний флюоресцеина [28]); квадраты ($D=10...65$ мкм, сталь [29]); кружки ($D=40$ мкм, стекло, покрытое серебром [30]) Fig. 2. Restitution coefficient $e = |v_z|/v_{z0}$ as a function of the initial normal velocity v_{z0} for a normal collision of spherical micrometer particles with a smooth surface: crosses (particles of diameter $D=1,27$ μm from polystyrene [26, 27]); rhombuses ($D=4,9$ μm, ammonium fluorescein [28]); squares ($D=10...65$ μm, steel [29]); circles ($D=40$ μm, glass coated with silver [30])

Показанный на рисунке случай соответствует экспериментам с использованием частиц из полистирола, которые соударялись с упругой поверхностью, покрытой диоксидом кремния SiO_2 . Из рисунка видно, что пластическая деформация частицы незначительна до значения скорости $v_{z0} \approx 16$ м/с, после которого неупругие эффекты типа вязкой диссипации и пластической деформации становятся определяющими. В работах [26], [31] предложена теория, в рамках которой можно описать поведение, показанное восходящей частью зависимости на рис. 2 (крестики) для скоростей $v_{z0} < 16$ м/с. Одним из результатов разработанного подхода является аппроксимационное уравнение вида

$$e = \frac{|v_z|}{v_{z0}} \approx \sqrt{e_n^2 - \frac{2\Pi_i(1-e_n^2)}{mv_{z0}^2}}, \quad (2.1)$$

где в показанном на рис. 2 случае $e_n = 0,955$, а Π_i – потенциальная энергия взаимодействия между поверхностью частицы и отражающей поверхностью в начальный момент контакта. Масса частицы в рассматриваемом случае $m = \rho_1 \pi D^3 / 6$, где плотность полистирола составляет $\rho_1 \approx 1000$ кг/м³. Формула (2.1) соответствует случаю наличия сил адгезии в контакте, за счет чего и идет потеря энергии в области малых скоростей, где наблюдается упругий удар.

Зависимость, показанная на рисунке ромбами, получена в работе [28] для частиц, выполненных из аммония флюоресцеина $C_{20}H_{16}NO_5$ размером 4,9 мкм при отражении от кремниевой мишени. Причем в работе [28] приведены результаты для мишеней из кремния, молибдена, слюды и покрытия на основе поливинилфторида. Все зависимости качественно повторяют показанную на рис. 2 для кремниевой мишени, однако имеют существенные количественные различия. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае сильное влияние оказывают силы адгезии, которые зависят от видов контактирующих материалов. Для описания экспериментальных результатов авторы работы [28] исходят из уравнения энергетического баланса в виде

$$K_i + \Pi_i - K_L = K_r + \Pi_r, \quad (2.2)$$

где Π_i и Π_r – потенциальная энергия взаимодействия частицы с поверхностью в начале и в конце контакта соответственно; K_i и K_r – кинетические энергии частицы до контакта с поверхностью и после ее отражения; K_L – потеря энергии во время столкновения. Согласно уравнению (2.2) отражение происходит в случае $K_r > \Pi_r$, иначе после взаимодействия с поверхностью частица «прилипнет» к ней за счет сил адгезии. Это возможно в случае большого значения поверхностной энергии либо если во время столкновения частица потеряла большую часть своей кинетической энергии, например при малых значениях начальной скорости v_{z0} за счет сил адгезии при взаимодействии с поверхностью либо за счет пластических деформаций при больших значениях начальной скорости (на рис. 2 видно, что при малых и больших начальных скоростях частицы теряют наибольшее количество энергии). Основываясь на соотношении (2.2), авторы работы [28] для описания результатов, представленных на рис. 2, предлагают следующие выражения:

$$e = \frac{|v_z|}{v_{z0}} = \sqrt{e_n^2 + \frac{2\Delta\Pi}{mv_{z0}^2}}, \quad (2.3)$$

$$\Delta\Pi = \Pi_i - \Pi_r,$$

$$e_n = \sqrt{1 - K_L / K_i}.$$

Стоит отметить, что формула (2.1) отличается по структуре от (2.3), поскольку в работе [26] для определения коэффициента восстановления e_n используется выражение

$$e_n = \sqrt{1 - \frac{K_L}{K_i + \Pi_i}},$$

которое не сводится к классическому коэффициенту e при $\Delta\Pi = 0$. Из выражения (2.3) легко найти критическое значение начальной скорости:

$$v_{z_0}^* = \sqrt{\frac{-2\Delta\Pi}{me_n^2}}. \quad (2.4)$$

При выполнении условия $v_{z_0} < v_{z_0}^*$ частица останется на поверхности, не отскакивая от нее. В противоположном случае

$$v_{z_0}^2 \gg 2\Delta\Pi / m$$

согласно уравнению (2.3) имеем $|v_z|/v_{z_0} \approx e_n$, что однозначно выполняется при $\Delta\Pi = 0$ и соответствует классическому определению коэффициента восстановления e . В [28] также проведено исследование влияния размера частиц и показано, что критическая скорость $v_{z_0}^*$ (2.4) возрастает с уменьшением размера частиц от 1,1 м/с (диаметр частицы $D = 6,89$ мкм) до 3,6 м/с ($D = 2,58$ мкм).

Квадратами на рис. 2 показаны данные, полученные в работе [29], для частиц из стали SST65 диаметром от 10 до 65 мкм, где в качестве отражающей поверхности использовалась ультрагладкая (со стандартным отклонением высот шероховатости поверхности порядка 10 Å) плоскость [1,0,0] кремниевого кристалла после ее очищения от поверхностных оксидов. Как видно из рисунка, эксперименты проводились в диапазоне скоростей $v_{z_0} < 2$ м/с, однако численное моделирование, проведенное в [29], показало, что с дальнейшим ростом скорости до значений порядка 10 м/с коэффициент восстановления e выходит на насыщение и не убывает, как в предыдущих рассмотренных случаях. Это связано с тем, что в отличие от полимерных частиц стальные при столкновении деформируются упруго, а потеря энергии происходит за счет адгезионных эффектов. Моделирование, проведенное в [29], строится на численном решении уравнения для вертикальной координаты частицы z вида

$$m\ddot{z} = -\sqrt{R}Kz^{3/2}(1 + C_H\dot{z}) + 2\pi af_0(1 + C_A\dot{z}), \quad (2.5)$$

где R и m – радиус и масса частицы; C_H и C_A – коэффициенты затухания для упругой и адгезионной сил. Комбинированная жесткость K определяется как $K = 4E^*/3$, где эффективный модуль упругости E^* находится из соотношения

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (2.6)$$

в котором E_i и ν_i – введенные ранее модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов шарика и отражающей поверхности. В уравнении (2.5) также присутствуют контактный радиус $a = \sqrt{Rz}$ и адгезионная сила на единицу длины f_0 , которая, основываясь на теории JKR [32] и работе Гилмана [33], авторами работы [29] определяется как

$$f_0 = (18KR\gamma_1\gamma_2 / \pi)^{1/3}, \quad (2.7)$$

где γ_1 и γ_2 – поверхностные энергии для частицы и поверхности, с которой она контактирует во время столкновения.

Кружками на рис. 2 показаны результаты экспериментов по нормальному столкновению для 40 мкм стеклянных частиц, покрытых слоем серебра, при их отражении от поверхности кремниевой пластины в атмосфере при нормальных условиях [30]. Отметим, что остальные эксперименты, результаты которых показаны на рис. 2, проводились в условиях вакуума. В предлагаемой модели для описания нормального столкновения, более подробно описанного в работе [34], коэффициент восстановления определяется как

$$e = \sqrt{1 - \Psi_A(1 + C_A v_{z_0}) - \Psi_H C_H}, \quad (2.8)$$

где C_A и C_H – коэффициенты затухания (см. также формулу (2.5)), а функции Ψ_A и Ψ_H имеют вид

$$\Psi_A = 2C_R f_0 \left(\frac{4}{3\pi}\right) \left(\frac{5}{4K}\right)^{3/5} \left(\frac{R}{m^2}\right)^{1/5} v_{z_0}^{-4/5},$$

$$\Psi_H = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{5/2} \frac{a_m^5 K}{mR^2 v_{z_0}^2},$$

где коэффициент C_R учитывает уменьшение сил адгезии за счет комбинированной шероховатости поверхности частицы и отражающей поверхности при контакте [24]; функция f_0 определяется выражением (2.7); K – комбинированная жесткость, определяемая через (2.6), а $a_m = \sqrt{Rz_m}$ – максимальный контактный радиус, задающийся максимальной глубиной индентирования z_m . Критическая нормальная скорость, т.е. ее минимальное значение, необходимое для отражения частицы от поверхности, в этом случае определяется из выражения (2.8) при $C_A = C_H = 0$, $\Psi_A = 1$, что приводит к результату [30]

$$v_{z_0}^* = \left[2C_R f_0 \left(\frac{4}{3\pi}\right) \left(\frac{5}{4K}\right)^{3/5} \left(\frac{R}{m^2}\right)^{1/5} \right]^{5/4}. \quad (2.9)$$

Для пояснения результатов эксперимента, показанных на рис. 2, были выбраны значения параметров $K = 70$ ГПа, $\gamma_1 = 1,14$ Дж/м², $\gamma_2 = 0,61$ Дж/м², $C_R = 0,9$, а плотность частицы при этом составляла $\rho_1 = 1350$ кг/м³. При этих значениях критическая скорость (2.9) $v_{z_0}^* \approx 0,061$ м/с. На рис. 2 видно, что при значениях $v_{z_0} < v_{z_0}^*$ частица остается на поверхности, что соответствует коэффициенту восстановления $e = 0$ либо скорости частицы после столкновения $v_z = 0$. Отметим, что экспериментальные методики по столкновению частиц могут быть самыми различными, например, в работе [35] микрометровые заряженные частицы сталкивались при их предварительном разгоне в электрическом поле.

В указанном случае задача выходит за рамки чистой механики, поскольку на коэффициент восстановления дополнительное влияние оказывает кулоновское взаимодействие заряженных частиц.

2.2. Эксперименты с миллиметровыми частицами

В подразд. 2.1 показаны результаты экспериментов при столкновении микроскопических сферических частиц. Как известно, размер частиц и их масса оказывают сильное влияние на поведение при столкновениях. Приведем здесь некоторые имеющиеся в литературе результаты по столкновению частиц, размер которых находится в миллиметровом диапазоне.

Результаты, показанные кружками на рис. 3, получены в работе [36], в которой исследовались столкновения сферических тел диаметром 3 мм, выполненных из алюмооксидной керамики с плотностью $\rho_1 = 3860 \text{ кг/м}^3$, модулем упругости $E_1 = 370 \text{ ГПа}$ и коэффициентом Пуассона $\nu_1 = 0,26$.

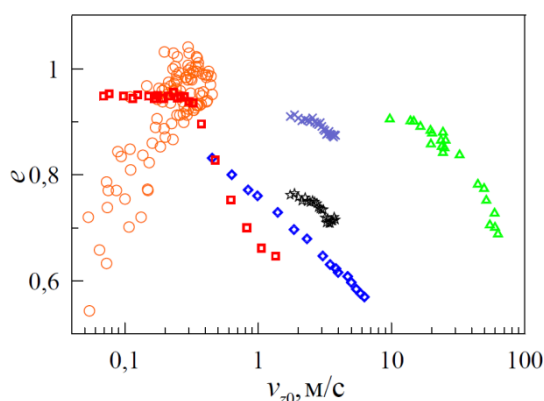


Рис. 3. Коэффициент восстановления $e = |v_z|/v_{z0}$ как функция начальной нормальной скорости v_{z0} для нормального соударения сферических миллиметровых частиц: кружки (частицы диаметром $D=3$ мм из алюмооксидной керамики [36]); ромбы ($D=5$ мм, оксид алюминия [37]); треугольники ($D=6,35$ мм, нейлон [13]); крестики ($D=4,76$ мм, сталь [16]); звездочки ($D=9,52$ мм, сталь [16]); квадраты ($D=13$ мм, сталь [38])

Fig. 3. Restitution coefficient $e = |v_z|/v_{z0}$ as a function of the initial normal velocity v_{z0} for a normal collision of spherical millimeter particles: circles (particles of diameter $D=3$ mm from alumina ceramic [36]); rhombuses ($D=5$ mm, aluminum oxide [37]); triangles ($D=6.35$ mm, nylon [13]); crosses ($D=4.76$ mm, steel [16]); asterisks ($D=9.52$ mm, steel [16]); squares ($D=13$ mm, steel [38])

Эксперимент в [36] состоял в соударении шаров, подвешенных на нитях и отведенных на расстояние друг от друга (фактически два маятника). При этом потеря энергии во время контакта ε рассчитывалась согласно соотношению

$$T_{i+1} = (1 - \varepsilon)T_i, \quad (2.10)$$

где T_{i+1} и T_i – механическая энергия до и после столкновения, которую легко рассчитать в крайней точке как потенциальную энергию $T_i = mgz_i$, где z_i – вертикальная высота соответствующей сферической частицы, а g – ускорение свободного падения. В связи с тем что в работе [36] исследуется довольно ограниченный диапазон начальных скоростей частиц $v_{z0} < 1 \text{ м/с}$, в логарифмическом масштабе на рис. 3 не прослеживается универсальное поведение коэффициента восстановления типа его убывания либо выхода на стационарное значение. В [36] коэффициент восстановления рассчитывался согласно соотношению

$$\mathbf{v}^- \cdot \hat{\mathbf{n}} = -e\mathbf{v}^+ \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.11)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ – относительная скорость движения частиц; \mathbf{c}_i – их абсолютные скорости, а $\hat{\mathbf{n}}$ – единичный вектор, соединяющий центры частиц. Индексы «+» и «-» в выражении (2.11) относятся к моментам до и после столкновения. Относительные скорости движения частиц рассчитываются из соотношений

$$|\mathbf{v}^\pm \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \sqrt{2gz_1^\pm \left(1 \mp \frac{\varepsilon}{4}\right)} + \sqrt{2gz_2^\pm \left(1 \mp \frac{\varepsilon}{4}\right)},$$

$$z_i = R - \sqrt{R^2 - n_i^2},$$

где n_i – наблюдаемая в эксперименте горизонтальная координата, а $\varepsilon \ll 1$ – рассеяние энергии, определяемое из (2.10). Выражение для критической скорости, при которой $e = 0$, имеет вид [36]

$$v_c^+ = \sqrt{\frac{6C(\lambda)\gamma^{5/3}(1-v_1^2)^{2/3}}{\pi\rho_1 D^{5/3} E_1^{2/3}}}, \quad (2.12)$$

$$C(\lambda) = \frac{\lambda(C_\infty \lambda^3 - 3,6\lambda^2 + 5\lambda + 0,14)}{\lambda^4 - 0,49\lambda^3 + 0,47\lambda^2 + 0,079\lambda + 0,00036},$$

где $C_\infty = C(\lambda \rightarrow \infty) \approx 7,0921$, а параметр λ был введен в работе [39] для описания перехода между граничными случаями JKR ($\lambda \rightarrow \infty$) [32] и DMT ($\lambda \rightarrow 0$) [40]. В формуле (2.12) используется равновесная поверхностная энергия γ , которая для алюмооксидной керамики $\gamma \approx 1,6-11 \text{ Дж/м}^2$. Отметим, что на рис. 3 для рассматриваемого случая некоторые точки показывают значения $e > 1$, что является ошибкой эксперимента [36]. Помимо алюмооксидной керамики в работе [36] описаны эксперименты с шариками из стали и акрила, которые показывают схожее поведение.

Данные, показанные на рис. 3 ромбами, получены в работе [37] и соответствуют эксперименту по нормальному столкновению сферических частиц из оксида алюминия диаметром 5 мм, которые отражались от ми-

шени из алюминиевого сплава. Для пояснения экспериментальных результатов авторы работы [37] пользуют моделью, предложенной в [41], согласно которой начальная скорость частицы v_{z0} связана со скоростью ее отражения v_z соотношением

$$|v_z| = k(v_{z0}^2 - \beta v_z^2)^\beta, \quad (2.13)$$

где постоянная k зависит от материала, а параметр β – функция упрочнения, которая связана с индексом Майера n [42]:

$$\beta = \frac{2n-1}{2n+4}.$$

Коэффициент k легко определить, если найти предельную нормальную скорость $v_{z0,y}$, при которой начинают пластические деформации [37]:

$$k = \frac{v_{z0,y}}{(v_{z0,y}^2 - \beta v_{z0,y}^2)^\beta}.$$

Данные, показанные ромбами на рис. 3, хорошо аппроксимируются кривой (2.13) при значениях $v_{z0,y} = 0,09$ м/с и $n = 2,29$ [37].

Результаты, представленные треугольниками на рис. 3, иллюстрируют эксперимент по столкновению нейлоновых сферических частиц диаметром 6,35 мм друг с другом, описанный в работе [13]. При таких начальных скоростях происходит пластическая деформация, что приводит к снижению коэффициента восстановления с ростом v_{z0} . В [13] предложена модель для описания этой ситуации. Во-первых, получено выражение для критической скорости, при превышении которой частица деформируется пластически [13]:

$$v_{z0,y} = \frac{1}{9\sqrt{10}} \sqrt{\frac{\pi^4 \sigma_y^5}{\rho_1 E_1^4}}, \quad (2.14)$$

где $\sigma_{zz}(r=0) = \sigma_y$ – напряжения в центре контакта, при которых начинается пластическое течение. Относительное расстояние между центрами соударяющихся сфер в контакте можно определить как [13]

$$\delta = \delta_y = \frac{\pi^2 R \sigma_y^2}{18 E_1^2}.$$

При значениях начальной скорости $v_{z0} < v_{z0,y}$ (2.14) диссипации не происходит и коэффициент восстановления $e = 1$, а если $v_{z0} > v_{z0,y}$, то коэффициент восстановления может быть рассчитан при сравнении работы сил отталкивания в фазах нагрузки и разгрузки. В пределе $v_{z0} \gg v_{z0,y}$ коэффициент восстановления принимает вид [13]

$$e = 1,18(v_{z0}/v_{z0,y})^{-1/4}. \quad (2.15)$$

Данные, показанные на рис. 3, хорошо аппроксимируются выражением (2.15) при параметрах $\sigma_y \approx 4,0 \cdot 10^7$ Н/м², $v_{z0,y} \approx 9$ м/с.

В работе [16] описаны эксперименты по столкновению стальных сферических частиц с пластиной из органического стекла (полиметилметакрилат [C₅O₂H₈]_n), при вариации толщины пластины и диаметра частиц. На рис. 3 крестиками показаны результаты эксперимента по нормальному столкновению шарика диаметром 4,76 мм с пластиной толщиной 1,27 см. Если в предыдущих описанных экспериментах толщина пластины, от которой происходило отражение, намного превышала размер отражаемых частиц, то в работе [16] исследуется ситуация, когда толщина пластины ограничена и оказывает существенное влияние на коэффициент восстановления. Для объяснения полученных результатов авторы в [16] пользуют теорией, разработанной в [43], согласно которой коэффициент восстановления определяется единственным безразмерным параметром вида

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi \rho_1}{\rho_2} \right)^{3/5} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \left[\frac{v_{z0}^2 \rho_2 (1-v_2^2)}{E_2} \right]^{1/10} \times \left[1 + \frac{E_2(1-v_1^2)}{E_1(1-v_2^2)} \right]^{-2/5}, \quad (2.16)$$

который является функцией отношения радиуса сферы к толщине пластины R/h . Индекс «1» в формуле (2.16), как и раньше, соответствует материалу шарика, а индекс «2» – материалу пластины. В работе [43] коэффициент восстановления определяется как

$$e = \frac{1-0,88\lambda}{1+0,88\lambda}.$$

На рис. 3 показаны результаты эксперимента, проведенного при параметрах $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $v_1 = 0,208$, $E_2 = 2,6 \cdot 10^9$ Па, $v_2 = 0,3$, $\rho_1 = 7800$ кг/м³, $\rho_2 = 1180$ кг/м³, зная которые легко определить коэффициент λ (2.16) как функцию начальной скорости v_{z0} , и, используя полученную функцию, найти коэффициент восстановления $e(v_{z0})$. Отметим, что в [16] также проводились исследования влияния диаметра шарика и показано, что с его ростом коэффициент восстановления e уменьшается. Так, на рис. 3 звездочками показаны результаты экспериментов с частицами диаметром $D = 9,52$ мм, коэффициент восстановления e для которых значительно ниже, чем для аналогичных экспериментов с частицами с меньшим диаметром, $D = 4,76$ мм (показаны крестиками).

И наконец, данные, показанные на рис. 3 квадратами, получены в работе [38] в результате серии экспериментов по столкновению сферического тела из стали диаметром 1,3 см с толстой пластиной из аналогичного материала. Из зависимости видно, что при малых значениях скоростей реализуется упругий удар, для кото-

рого в условиях эксперимента $e = \text{const} \approx 0,95$, после чего включаются механизмы пластического течения, а коэффициент восстановления начинает убывать с ростом начальной скорости v_{z0} . Авторы работы [38] не приводят теории, описывающей их результаты, однако одновременно с коэффициентом восстановления экспериментально измеряют время контакта и проводят его сравнение с классическим результатом [9]:

$$\tau = 2,943 \left[2,5\pi\rho_1(1-v_1^2)/E_1 \right]^{2/5} Rv_{z0}^{-1/5}. \quad (2.17)$$

Экспериментально определенные в работе [38] величины продолжительности контакта при различных начальных скоростях v_{z0} с высокой точностью совпадают с (2.17) в области скоростей, при которых наблюдается упругий удар, что говорит об адекватности выбранной экспериментальной методики. Также измерение величины τ (2.17) позволяет определить критическую скорость, после превышения которой начинается пластическое течение и удар перестает быть упругим.

Результаты, показанные на рис. 2 и 3, а также обзор ряда других экспериментальных работ по физике нормальных столкновений приведены в работе [44]. В частности, в [44] описаны эксперименты по столкновению сферических ледяных частиц, коэффициент восстановления для которых монотонно уменьшается согласно соотношению [45]

$$e = (0,32 \pm 0,02)v_{z0}^{-0,234 \pm 0,008}.$$

Аналогичное монотонное уменьшение величины коэффициента восстановления с ростом начальной скорости движения частицы описано в экспериментальных работах [46, 47].

2.3. Теоретическое описание нормального столкновения частиц в упругопластическом режиме с учетом адгезии

В подразд. 2.1 и 2.2 приведены результаты различных экспериментов по нормальному столкновению сферических частиц. Основной величиной, интересующей исследователей, является коэффициент восстановления, представляющий отношение скорости частицы после столкновения $|v_z|$ к ее начальной скорости v_{z0} . На рис. 2 и 3 видно, что зависимости коэффициента восстановления от начальной скорости могут быть различными и иметь особенности. Это связано с тем, что возможна реализация различных ситуаций: упругий удар, упруго-пластический удар, наличие адгезии между контактирующими поверхностями и т.д. В работе [48] разработана теория, позволяющая описать указанные ситуации и объяснить результаты, показанные на рис. 2 и 3, исходя из единого подхода. Воспроизведем здесь кратко основные результаты этой теории.

2.3.1. Упругопластический удар без адгезии

В случае столкновения сферического тела с упругим полупространством пластические эффекты начинают проявляться, если нормальная скорость превышает критическое значение [48, 49] (сравнить с (2.14)):

$$v_{z0,y} = \left(\frac{\pi}{2E^*} \right)^2 \left(\frac{2}{5\rho_1} \right)^{1/2} p_y^{5/2} \approx 1,56 \left(\frac{p_y^5}{E^{*4}\rho_1} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

Здесь величина E^* определяется равенством (2.6), а критическое контактное давление

$$p_y = \frac{2E^*a_y}{\pi R}, \quad (2.19)$$

где a_y – контактный радиус, при котором начинается пластическое течение. Далее в работе [48] определяется коэффициент восстановления e_p ,

$$e_p = \left(\frac{6\sqrt{3}}{5} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{v_{z0,y}}{v_{z0}} \right)^2 \right]^{1/2} \times \left[1 + 2 \sqrt{\frac{6}{5} \left(\frac{v_{z0,y}}{v_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{5}} \right]^{-1/4}, \quad (2.20)$$

где скорость $v_{z0,y}$ определяется формулой (2.18). В случае $v_{z0} = v_{z0,y}$ выражение (2.20) дает значение $e_p = 1$. При больших начальных скоростях $(v_{z0,y}/v_{z0}) \rightarrow 0$ коэффициент восстановления (2.20) записывается в виде

$$e_p = \left(\frac{6\sqrt{3}}{5} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \frac{v_{z0}}{v_{z0,y}} \right]^{-1/4}, \quad (2.21)$$

а если $v_{z0} \gg v_{z0,y}$, получим выражение

$$e_p = \left(\frac{6\sqrt{3}}{5} \right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \right)^{1/4} \left(\frac{v_{z0,y}}{v_{z0}} \right)^{1/4} \approx 1,185 \left(\frac{v_{z0,y}}{v_{z0}} \right)^{1/4}, \quad (2.22)$$

которое совпадает с (2.15), использованным в работе [13]. На рис. 4 сплошной кривой показан коэффициент восстановления (2.20) как функция нормированной на значение $v_{z0,y}$ (2.18) начальной нормальной скорости v_{z0} .

Из рисунка видно, что при условии $v_{z0} = v_{z0,y}$ коэффициент восстановления $e_p = 1$, то есть потеря механической энергии во время контакта не происходит. Если же скорость увеличивается, то коэффициент восстановления падает, что связано с увеличением уровня пластических деформаций. Штриховой кривой на рисунке показана аппроксимация (2.21), а пунктирной – более грубое выражение (2.22), которого однако достаточно для аппроксимации многих экспериментальных данных. К примеру, в работе [13] (данные показаны треугольниками на рис. 3) при скоростях $v_{z0} > 10$ м/с использовалось именно это выражение (см. (2.15)).

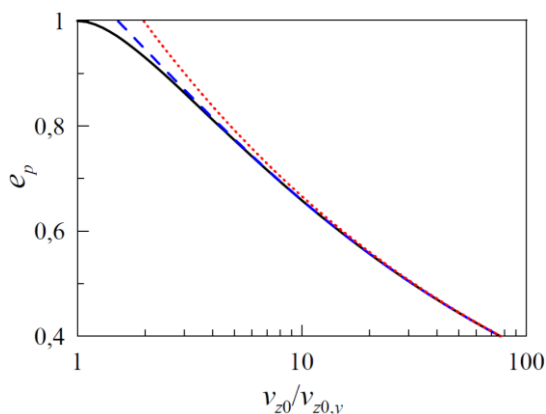


Рис. 4. Коэффициент восстановления $e_p = |v_z|/v_{z0}$ как функция нормированной начальной скорости $v_{z0}/v_{z0,y}$. Сплошная кривая – формула (2.20), штриховая – (2.21), пунктирная – (2.22)
 Fig. 4. Restitution coefficient $e_p = |v_z|/v_{z0}$ as a function of the normalized initial velocity $v_{z0}/v_{z0,y}$. The solid curve is the formula (2.20), the dashed curve is (2.21), the dotted curve is (2.22)

2.3.2. Упругий удар с учетом адгезии

Основываясь на теории адгезионного взаимодействия JKR [32], в случае упругого удара при наличии адгезионных сил, авторы работы [48] получают критическую начальную скорость в виде

$$v_{z0}^* = 1,84 \left(\frac{\gamma^5}{R^5 \rho_1^3 E^{*2}} \right)^{1/6}, \quad (2.23)$$

где γ – поверхностная энергия, а R – радиус частицы. Отражение шарика от поверхности происходит только тогда, когда $v_{z0} > v_{z0}^*$ (2.23), иначе за счет сил адгезии он «прилипает» к ней. Если удар упругий, а потеря энергии во время контакта осуществляется только за счет работы сил адгезии, коэффициент восстановления может быть записан как [48]

$$e_a = \sqrt{1 - (v_{z0}^*/v_{z0})^2}, \quad (2.24)$$

где скорость v_{z0}^* определяется выражением (2.23). На рис. 5 показана зависимость (2.24) как функция нормированной скорости v_{z0}/v_{z0}^* .

Из рисунка видно, что коэффициент восстановления при скорости меньше критического значения $v_{z0} < v_{z0}^*$ равен нулю и увеличивается с ростом начальной скорости v_{z0} .

2.3.3. Упругопластический удар с учетом адгезии

Согласно рис. 5 при $v_{z0} = 10v_{z0}^*$ значение коэффициента восстановления $e_a \approx 0,995$, и оно продолжает увеличиваться с ростом начальной скорости. Экспериментальные данные, приведенные на рис. 2 и 3, такого поведения не показывают. Это связано с тем, что

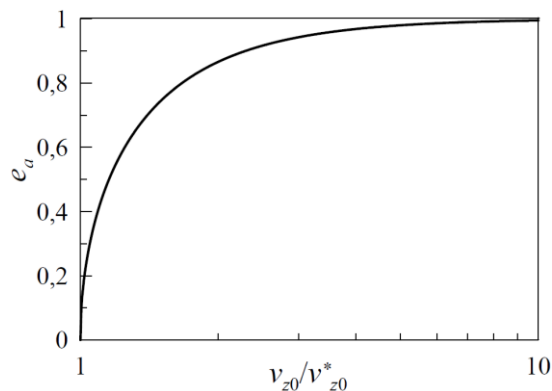


Рис. 5. Коэффициент восстановления $e_a = |v_z|/v_{z0}$ как функция нормированной начальной скорости v_{z0}/v_{z0}^* (2.24)
 Fig. 5. Restitution coefficient $e_a = |v_z|/v_{z0}$ as a function of the normalized initial velocity v_{z0}/v_{z0}^*

Fig. 5. Restitution coefficient $e_a = |v_z|/v_{z0}$ as a function of the normalized initial velocity v_{z0}/v_{z0}^*

в подразд. 2.3.2 описывается влияние адгезии при упругом соударении, без учета пластических эффектов, которые вносят существенный вклад в диссипацию механической энергии. В действительности при превышении скоростью критического значения $v_{z0,y}$ (которое при наличии сил адгезии будет отличаться от (2.18)) будет наблюдаться пластическое течение, и его необходимо учитывать совместно с адгезией. В случае учета адгезии и пластических эффектов в области малых скоростей, при которых нет пластических деформаций, диссипация механической энергии будет осуществляться за счет работы сил адгезии, а в пластической области одновременно за счет адгезии и пластического течения, причем второй механизм при больших скоростях становится определяющим.

В рассматриваемом случае выражение для критического давления в центре контакта, при котором начинаются пластические эффекты, принимает вид

$$p_y = \frac{2E^* a_y}{\pi R} - \sqrt{\frac{2\gamma E^*}{\pi a_y}},$$

и за счет адгезии оно меньше значения, определяемого выражением (2.19). Далее авторы работы [48] проводят аналитическое исследование, в результате чего приходят к выводу, что при упругопластическом ударе с учетом адгезии получение точного аналитического выражения для коэффициента восстановления e ввиду сложности проблемы не представляется возможным. Однако, используя результаты для упругопластического удара (2.20) и упругого удара с адгезией (2.24), возможно получить аппроксимационное соотношение, учитывающее эти два механизма диссипации. Таким аппроксимационным соотношением является конструкция вида

$$(1 - e^2) = (1 - e_p^2) + (1 - e_a^2), \quad (2.25)$$

где e_p – коэффициент восстановления в случае диссипации механической энергии за счет пластической де-

формации (2.20), а e_a – коэффициент восстановления для адгезионного упругого контакта (2.24). Выражение (2.25) дает следующее: при $v_{z0} \leq v_{z0}^*$ (2.23) имеем $e = 0$; в промежуточном диапазоне скоростей $v_{z0}^* \leq v_{z0} \leq v_{z0,y}$ (2.18) коэффициент восстановления задается выражением (2.24); при еще больших скоростях $v_{z0} \geq v_{z0,y}$ используется равенство

$$e^2 = \frac{6\sqrt{3}}{5} \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{v_{z0,y}}{v_{z0}} \right)^2 \right] \left[1 + 2 \sqrt{\frac{6}{5} \left(\frac{v_{z0}}{v_{z0,y}} \right)^2 - \frac{1}{5}} \right]^{-1/2} - \left(\frac{v_{z0}^*}{v_{z0}} \right)^2.$$

На рис. 6 показан коэффициент восстановления e (2.25) как функция нормированной начальной скорости $v_{z0}/v_{z0,y}$ при различных соотношениях $v_{z0}^*/v_{z0,y}$.

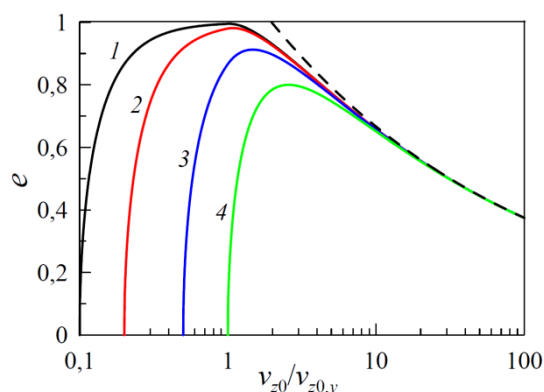


Рис. 6. Комбинированный коэффициент восстановления $e = |v_z|/v_{z0}$ (2.25) как функция нормированной начальной скорости $v_{z0}/v_{z0,y}$ (2.18). Кривые 1–4 соответствуют значениям $v_{z0}^*/v_{z0,y} = 0,1; 0,2; 0,5; 1,0$ соответственно. Штриховой линией показана аппроксимация (2.22)
Fig. 6. Combined restitution coefficient $e = |v_z|/v_{z0}$ (2.25) as a function of the normalized initial velocity $v_{z0}/v_{z0,y}$ (2.18). Curves 1–4 correspond to the values $v_{z0}^*/v_{z0,y} = 0,1; 0,2; 0,5; 1,0$, respectively. The dashed line shows the approximation (2.22)

Из рисунка видно, что зависимости начинаются со значения $v_{z0} = v_{z0}^*$, при котором $e = 0$, т.е. частица после контакта не отражается от поверхности. Все кривые на рисунке при больших скоростях показывают аналогичное поведение, задаваемое аппроксимацией (2.22), показанной на рисунке штриховой линией. Кривые на рис. 6 хорошо согласуются с численным моделированием, проведенным в [50], а также во многих случаях объясняют эксперименты, показанные на рис. 2 и 3. Стоит отметить, что описанный в подразд. 2.3 подход не является единственным. Так, в работах [34, 51, 52] предложены модели описания упруго-пластического столкновения под нормальным углом с учетом адгезии, дающие аналогичные результаты.

3. Столкновение сферического тела под углом к отражающей поверхности: теория и эксперимент

Если для столкновений под прямым углом, описанных в разд. 2, существует большое количество экспериментальных данных и теоретических моделей, которые способны охватить практически полную наблюдаемую картину, то для столкновения под углом к отражающей поверхности на сегодняшний день не существует единой полноценной теории. Это связано со сложностью процессов, происходящих в контакте при тангенциальном движении. Здесь помимо пластических эффектов и адгезии необходимо учитывать трение в зоне контакта, которое приводит к возникновению областей «прилипания» и проскальзывания, а также ряд других эффектов. В разд. 1 представлена ситуация с бесконечным коэффициентом трения, когда во время контакта проскальзывание отсутствует. Однако даже в этом случае получаемые решения (1.5), (1.6) далеки от того, что реально происходит в таких системах. Связано это с использованием противоречивого приближения (1.4). Приведем здесь краткое описание существующих теорий и экспериментов, имеющих в литературе. Некоторые результаты теоретических моделей и экспериментов по столкновению под углом можно найти в работах [7, 12, 13, 16, 34, 37, 53–59].

В [37] для объяснения экспериментальных результатов, полученных в этой же работе, предложена модель, в которой авторы отдельно определяют коэффициенты восстановления для нормальной и тангенциальной компонент скоростей. В обозначениях на рис. 7 они запишутся как

$$e_n = |v_z|/v_{z0}, \quad (3.1)$$

$$e_t = v_x/v_{x0}, \quad (3.2)$$

где индексы n и t обозначают нормальную и тангенциальную составляющие. В работе изучается отражение шарика диаметром 5 мм, выполненного из оксида алюминия, падающего под углом на упругую поверхность при нулевой начальной частоте вращения $\omega_0 = 0$. На рис. 7 показаны результаты экспериментов по столкновению шарика с отражающей поверхностью в области упругого удара для диапазона скоростей, при которых отсутствуют пластические деформации².

В случае, показанном на рис. 7, нормальный коэффициент восстановления e_n (3.1) составлял от 0,976 до 0,986, что говорит о полностью упругом ударе. Из рис. 7, а следует, что минимальное значение тангенциального коэффициента восстановления $e_t \approx 0,6$ реализуется при значении

² На рис. 7, б циклическая частота ω показана с обратным знаком, поскольку в работе [37] за положительное направление вращения сферы выбрано направление, противоположное по отношению к обозначенному на рис. 1. Это утверждение верно и для рис. 9, б.

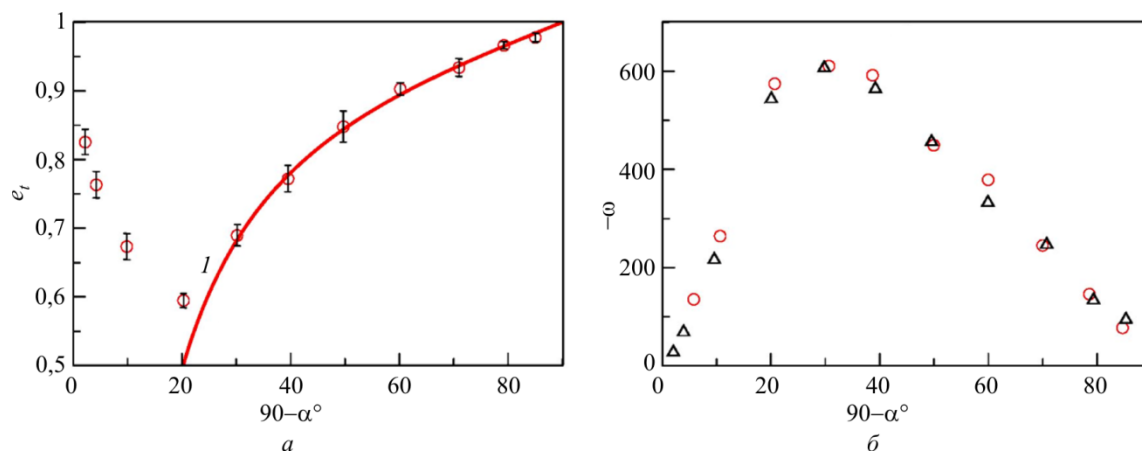


Рис. 7. Тангенциальный коэффициент восстановления e_t (3.2) (а) и угловая скорость $-\omega$ (б) как функции угла падения $(90 - \alpha^\circ)$ в области упругого удара [37]. Кривая 1 на панели (а) получена по формуле (3.4) при $\mu = 0,092$, $e_n = 1,0$

Fig. 7. The tangential restitution coefficient (3.2) (a) and the angular velocity $-\omega$ (b) as a function of the angle of incidence $(90 - \alpha^\circ)$ in the region of elastic impact [37]. Curve 1 on the panel (a) is obtained from (3.4) at the parameters at $\mu = 0.092$, $e_n = 1.0$

угла падения порядка 20° , а при полном скольжении, когда скорость имеет только тангенциальную составляющую ($\alpha^\circ = 0^\circ$), коэффициент восстановления $e_t \approx 1^3$. Каждая точка на рис. 7 получена усреднением минимум 10 экспериментов с фиксированными значениями начальной скорости v_0 и угла падения $(90 - \alpha^\circ)$. На рис. 7, б показана зависимость циклической частоты вращения шарика после столкновения от угла падения, которая определяется как в [37, 50] (см. обозначения на рис. 1):

$$\omega = \frac{5 v_0 \cos \alpha^\circ}{2 R} (1 - e_t). \quad (3.3)$$

На рис. 7, б кружки представляют данные измерений угловой скорости непосредственно, а значения, показанные треугольниками, определены по формуле (3.3), основываясь на результатах измерений, показанных на рис. 7, а. Из рисунка видно, что формула (3.3) выполняется с высокой точностью, определяющей точностью измерений соответствующих величин в эксперименте. Если предположить, что сфера несжимаемая, то при малых углах (близких к нормальному падению) будет наблюдаться качение, а при больших – проскальзывание. Пусть проскальзывание описывается законом Кулона с коэффициентом трения μ , тогда справедливо соотношение между нормальной F_n и тангенциальной F_t силами в виде

$$F_t = \mu F_n,$$

из чего легко получить выражение для тангенциального коэффициента восстановления [16]:

$$e_t = 1 - \mu(1 + e_n) \operatorname{tg} \alpha^\circ, \quad (3.4)$$

где для эксперимента, показанного на рис. 7, при углах падения, находящихся в диапазоне между 90° и 30° , коэффициент трения $\mu \approx 0,092$. Коэффициент e_t , рассчитанный по формуле (3.4), соответствующий значениям $\mu = 0,092$ и $e_n = 1,0$, показан на рис. 7, а сплошной линией⁴, откуда видно, что приближение несжимаемого тела хорошо работает в данном случае для углов падения $(90^\circ - \alpha^\circ) > 30^\circ$. Это связано с тем, что в зоне контакта наблюдаются области проскальзывания и «прилипания». Однако при больших значениях углов падения (когда нормальная скорость v_{z0} существенно меньше тангенциальной v_{x0}) преобладает зона проскальзывания, и эта ситуация хорошо описывается аппроксимацией (3.4). В работах [7, 12] введен параметр

$$\kappa = 2(1 - \nu) / (2 - \nu), \quad (3.5)$$

который является отношением тангенциальной контактной жесткости к нормальной в случае, если оба контактирующих тела имеют одинаковый коэффициент Пуассона ν . Далее фазы столкновения могут быть описаны в терминах величин [7, 12]

$$\chi = 7\kappa / 4, \quad (3.6)$$

$$\psi_1 = \kappa \operatorname{ctg} \alpha^\circ / \mu, \quad (3.7)$$

$$\psi_2 = \kappa \operatorname{ctg} \beta^\circ / \mu, \quad (3.8)$$

⁴ Несмотря на то, что в эксперименте коэффициент e_n принимал значения от 0,976 до 0,986, а его среднее значение составляло 0,980, при расчете зависимости (3.4) было выбрано значение $e_n = 1$, соответствующее упругому нормальному столкновению.

³ Подобное поведение наблюдалось в эксперименте, описанном в работе [60].

где ψ_1 и ψ_2 – безразмерные углы падения и отражения (углы α° и β° обозначены на рис. 1). Используя (3.6) и (3.7), можно выделить три характерные области. В случае

$$\psi_1 \leq 1 \quad (3.9)$$

реализуется область I, в которой сфера «прилипает» к поверхности в начале контакта. С дальнейшим углублением сферы в полупространство и ростом зоны контакта проскальзывания не происходит. Однако, как только половина фазы столкновения пройдена, площадь контакта начинает уменьшаться и тангенциальное упругое восстановление поверхности приводит к возникновению кольцеобразной области микроскольжения, которая создается вокруг центральной области «прилипания». Эта область проскальзывания распространяется внутрь контакта до тех пор, пока скольжение не установится по всей области контакта.

В промежуточном диапазоне углов падения

$$1 < \psi_1 < 4\chi - 1 \quad (3.10)$$

имеет место область II, в которой столкновение начинается с полного скольжения, но в какой-то момент контакта возникает фаза «прилипания». При этом изменение режима происходит очень быстро: для перехода от полного скольжения к полному «прилипанию» требуется время, составляющее менее 2 % от общей продолжительности контакта. Последующее поведение аналогично описанному при $\psi_1 \leq 1$, с возвратом к полному скольжению в конце контакта. При увеличении значения ψ_1 stick-slip-переходы происходят в более поздние моменты контакта. В итоге при выполнении условия

$$\psi_1 \geq 4\chi - 1, \quad (3.11)$$

которое соответствует области III, устанавливается режим полного скольжения на протяжении всего контакта. Этот режим эквивалентен поведению несжимаемого тела, которое описывается формулой (3.4). Однако выражение (3.5) записано для случая, если шарик и отражающая поверхность изготовлены из одинаковых материалов. В общем случае следует использовать формулу [61]

$$k = \frac{(1 - v_1) / G_1 + (1 - v_2) / G_2}{(1 - v_1 / 2) / G_1 + (1 - v_2 / 2) / G_2}, \quad (3.12)$$

где индексы «1» и «2» соответствуют материалам, из которых изготовлены шарик и отражающая поверхность. В случае, показанном на рис. 7, используются стекло и оксид алюминия, для которых имеем $k = 0,86$ и $\chi = 1,50$. Значение 1,50 очень близко к $\chi = 1,4412$, которое используется в [7], что позволило авторам работы [37] провести сравнение полученных ими экспериментальных данных с результатами, представленными в [7]. Так, на рис. 8 показана кривая, полученная в работе [7] с наложенными на нее экспериментальными точками из работы [37]. Рисунок показывает, что область, в кото-

рой наблюдается микропроскальзывание, соответствует $\psi_1 < \sim 5$, а выше этого значения реализуется режим полного скольжения (например, когда угол падения превышает 30°). В частности, результаты показывают область положительных углов отражения при $\psi_1 < 1$, за чем следует область отрицательных углов II. Более подробное описание упругого удара под углом к отражающей поверхности может быть найдено в работе [62].

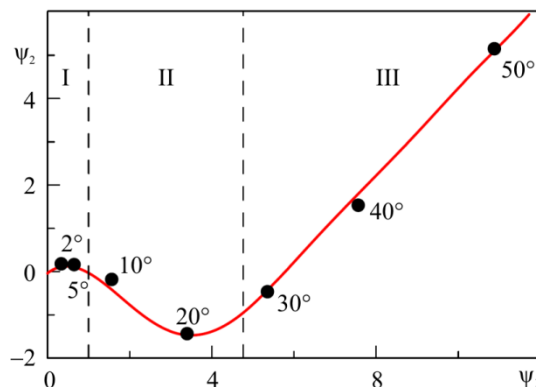


Рис. 8. Зависимость безразмерного угла отражения ψ_2 (3.8) от безразмерного угла падения ψ_1 (3.7) [37]. Сплошная линия получена численно в работе [7], точки соответствуют эксперименту, показанному на рис. 7, реальные значения углов падения подписаны числами. Области I, II и III описаны в тексте

Fig. 8. Dependence of the dimensionless reflection angle ψ_2 on the dimensionless angle of incidence ψ_1 [37]. The solid line was obtained numerically in [7], the points correspond to the experiment shown in Fig. 7, the real values of the angles of incidence are signed by numbers. Areas I, II and III are described in the text

На рис. 9 показаны экспериментальные зависимости для условий, при которых реализуется упруго-пластический удар [37].

Все экспериментальные точки получены для начальной скорости шарика $v = 3,85$ м/с при вариации углов падения от 2° (близко к нормальным столкновениям) до 85° (близко к скольжению). Из рисунка следует, что нормальная компонента коэффициента восстановления в зависимости от угла варьируется от 0,62 до 0,90, что говорит о диссипации механической энергии благодаря пластической деформации. Тангенциальный коэффициент восстановления e_t показывает поведение, схожее со случаем упругого удара, который показан на рис. 7, а, но с более высоким минимумом $e_t \approx 0,64$ при угле падения 30° и значении $e_t \approx 1$ при 90° . На рис. 9, б показана зависимость циклической частоты вращения ω отраженного шарика от угла падения, которая имеет максимум, как и в случае упругого удара (см. рис. 7), который однако сдвинут вправо и реализуется при значении угла падения около 40° . Коэффициент трения, рассчитанный для рассматриваемого случая по формуле

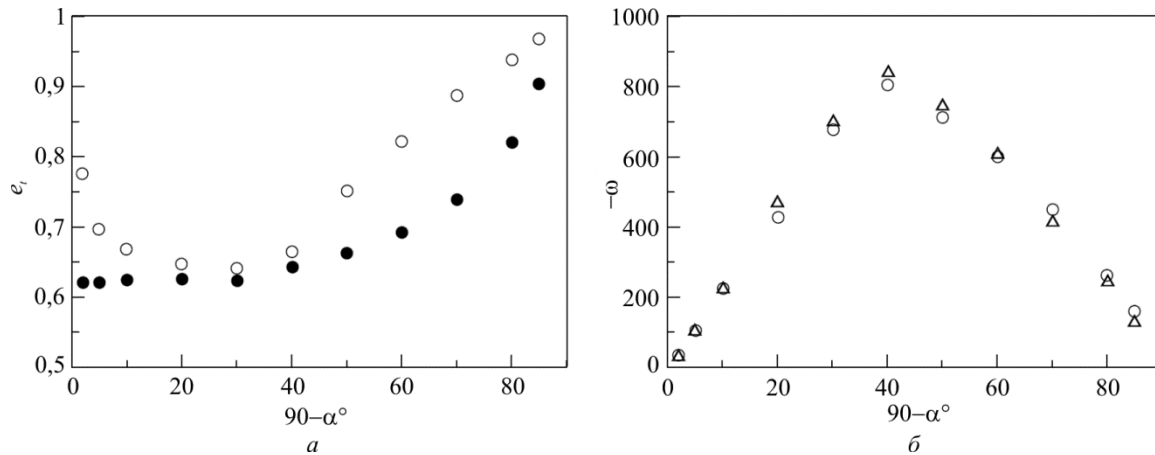


Рис. 9. Тангенциальный (пустые кружки) e_t (3.2) и нормальный (заполненные кружки) e_n (3.1) коэффициенты восстановления как функции угла падения ($90 - \alpha^\circ$) в области упругопластического удара [37] (а); угловая скорость $-\omega$ как функция угла падения, где кружки представляют данные измерений циклической частоты непосредственно, а значения, показанные треугольниками, определены по формуле (3.3), основываясь на результатах измерений, показанных пустыми кружками на рис. 9, а (б)
 Fig. 9. tangential (empty circles) e_t and normal (filled circles) e_n restitution coefficients as a function of the angle of incidence ($90 - \alpha^\circ$) in the region of elastic-plastic impact [37] (a); the angular velocity $-\omega$ as a function of the angle of incidence, where the circles represent the measurement data of the cyclic frequency directly, and the values shown by triangles are determined by formula (3.3), based on the results of measurements shown by empty circles in Fig. 9a (b)

(3.4), имеет значение $\mu \approx 0,18$, которое почти в 2 раза выше, чем для описанного ранее упругого удара. Для рассматриваемого случая справедлива формула [37, 50] (см. обозначения на рис. 1):

$$e_n \operatorname{ctg} \beta^\circ = \operatorname{ctg} \alpha^\circ - 7\mu(1 + e_n) / 2,$$

которая при использовании (3.6), (3.7) позволяет определить области, аналогичные показанным на рис. 8. Однако здесь в отличие от рис. 8 необходимо анализировать зависимость $2e_n \psi_2 / (1 + e_n)$ как функцию параметра $2\psi_1 / (1 + e_n)$. При этом рассчитанная кривая качественно имеет вид, аналогичный показанной на рис. 8, и из нее можно заключить, что до значения безразмерного угла падения $2\psi_1 / (1 + e_n) < \sim 6$ реализуется режим микропроскальзывания. Отметим, что в [14] проводится аналогичное исследование, полностью подтверждающее результаты, полученные в [37].

В работе [53] проведено численное моделирование столкновения двух сферических тел под разными углами и получены временные зависимости нормальных и тангенциальных сил, действующих во время контакта, кинетической энергии контактирующих тел, и т.д. Также в работе обсуждаются зависимости углов отражения от углов падения в случаях с адгезией и без. Однако в работе отсутствуют измерения коэффициентов восстановления, и она представляет скорее обширное моделирование с заданным набором параметров. Нас же интересует установление общих закономерностей, поэтому в настоящем обзоре мы ограничиваемся только упоминанием работы [53], без подробного анализа полученных в ней результатов.

В [54, 55] проведено моделирование столкновения частиц, основывающееся на системе динамических

уравнений, где нормальное движение описывается записанным ранее уравнением (2.5), а тангенциальное – уравнением

$$m\ddot{x} = F_x(t) = \begin{cases} -f m \ddot{z}, \dot{x} - R\omega \neq 0, \\ 0, \dot{x} - R\omega = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

где введен коэффициент динамического трения f . Для описания вращательного движения используется уравнение вида

$$mK^2 \dot{\omega} = -RF_x(t), \quad (3.14)$$

где комбинированная жесткость $K = 4E^* / 3$ пропорциональна эффективному модулю упругости E^* (2.6). Система уравнений (2.5), (3.13), (3.14) позволяет провести моделирование динамики столкновений, чему посвящена работа [54]. Однако моделирование проводится при фиксированных параметрах, что не позволяет проследить общее поведение таких систем.

В работе [56] описаны результаты моделирования на основе метода конечных элементов, которые хорошо согласуются с описанными в этом разделе экспериментами и дополняют их, поскольку моделирование проводилось в том числе и с ненулевой начальной частотой вращения шарика. И в [57] рассматривается специфическая ситуация, когда шарик падает на платформу, которая закреплена с неподвижной стенкой с помощью пружины. За счет этого включается дополнительный механизм диссипации, связанный с движением платформы. В работе проведено динамическое моделирование и получены временные зависимости действующих сил, а также проанализировано влияние угла падения на частоту вращения шарика после столкновения.

Заключение

В обзоре проведен анализ теоретических и экспериментальных работ различных авторов по физике столкновений упругих сферических тел с упругой плоскостью. Показано, что в зависимости от наличия сил трения, адгезии, вязких и пластических эффектов, шероховатостей поверхностей, наличия жидкости в зоне контакта, а также других особенностей возможно принципиально различное поведение. Предложенная статья является первой частью общей работы и полностью посвящена литературному обзору работ других авторов. Учитывая накопленный в научном обществе опыт в теоретической области физики столкновений и обширный набор имеющихся экспериментальных данных, во второй части обзора авторы провели моделирование различных ситуаций с помощью применения метода

редукции размерности, что позволило описать большее количество экспериментально полученных результатов и наблюдаемых эффектов, представленных в настоящей (первой) части работы.

Благодарности

Публикация содержит результаты исследований, проведенных при финансовой поддержке Немецкого научно-исследовательского сообщества (DFG), проект PO 810-55-1.

Acknowledgements

The publication contains the results of the researches, which were funded by the German Research Foundation (DFG), Project PO 810-55-1.

Библиографический список

1. Dynamics of drag and force distributions for projectile impact in a granular medium / M.P. Ciamarra, A.H. Lara, A.T. Lee, D.I. Goldman, I. Vishik, H.L. Swinney // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 92. – No. 19. – P. 194301.
2. Jop P., Forterre Y., Pouliquen O. A constitutive law for dense granular flows // *Nature*. – 2006. – Vol. 441. – No. 7094. – P. 727–730.
3. Model for collisions in granular gases / N.V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, T. Pöschel // *Phys. Rev. E*. – 1996. – Vol. 53. – No. 5. – P. 5382–5392.
4. Bernard B. Impacts in mechanical systems: analysis and modelling. – Berlin; New York: Springer, 2000. – 278 p.
5. Attractive particle interaction forces and packing density of fine glass powders / E.J.R. Parteli, J. Schmidt, C. Blümel, K.-E. Wirth, W. Peukert, T. Pöschel // *Sci. Rep.* – 2014. – Vol. 4. – P. 6227 (7 pp.).
6. Родионов А.И., Матвеев К.А. К динамике удара абсолютно твердого шара по упругому полупространству // *Научный вестник НГТУ*. – 2012. – № 1 (46). – С. 93–108.
7. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The oblique impact of elastic spheres // *Wear*. – 1976. – Vol. 38. – No. 1. – P. 101–114.
8. Hauger W., Schnell W., Gross D. Technische Mechanik. Bd 3: Kinetik 7. – Berlin: Springer, 2002. – 267 p.
9. Hertz H.J. Ueber die berührung fester elastischer körper // *J. für die reine Angew. Math.* – 1882. – Vol. 92. – P. 156–171.
10. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *ASME J. Applied Mech.* – 1949. – Vol. 16. – P. 259–268.
11. Barber J.R. Adhesive contact during the oblique impact of elastic spheres // *Appl. Math. Phys. (ZAMP)*. – 1979. – Vol. 30. – No. 3. – P. 468–476.
12. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The role of elastic tangential compliance in oblique impact // *Trans. ASME: J. Lubr. Technol.* – 1981. – Vol. 103. – No. 1. – P. 74–80.
13. Labous L., Rosato A.D., Dave R.N. Measurements of collisional properties of spheres using high-speed video analysis // *Phys. Rev. E*. – 1997. – Vol. 56. – No. 5. – P. 5717–5725.
14. Measurements of the collision properties of small spheres / S.F. Foerster, M.Y. Louge, H. Chang, K. Allia // *Phys. Fluids*. – 1994. – Vol. 6. – No. 3. – P. 1108–1115.
15. Cross R. Grip-slip behavior of a bouncing ball // *Am. J. Phys.* – 2002. – Vol. 70. – No. 11. – P. 1093–1102.
16. Sondergaard R., Chaney K., Brennen C.E. Measurements of solid spheres bouncing off flat plates // *ASME J. Appl. Mech.* – 1990. – Vol. 57. – No. 3. – P. 694–699.
17. Stronge W.J. Impact Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 280 p.
18. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
19. Лапшин В.В., Юрин Е.А. Нелинейная модель удара с сухим трением // *Инженерный журнал: наука и инновации*. – 2014. – № 12 (36). – С. 1–11.
20. Ефименко В.В. Контактное взаимодействие тел при ударе // *Вестник ФГОУ ВПО МГАУ*. – 2009. – № 2. – С. 41–42.
21. Дудко О.В., Потянихин Д.А. О косом ударе жестким телом, имеющим плоскую границу, по нелинейному упругому полупространству // *Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика*. – 2009. – Т. 9, вып. 4, ч. 2. – С. 32–40.
22. Кочетков А.В., Федотов П.В. Некоторые вопросы теории удара // *Интернет-журнал “Науковедение”*. – 2013. – № 5. – С. 110ТВН513 (15 с.).
23. Экомасов С.П., Подмарков О.В. О коэффициенте восстановления при упругом соударении тел // *Изв. вузов. Геология и разведка*. – 2009. – № 2. – С. 74–76.
24. Cheng W., Dunn P.F., Brach R.M. Surface roughness effects on microparticle adhesion // *J. Adhesion*. – 2002. – Vol. 78. – No. 11. – P. 929–965.
25. Хабахпашева Т.И., Коробкин А.А. Соударение упругих тел с тонким слоем жидкости // *Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского*. – 2011. – № 4 (3). – С. 1222–1224.
26. Dahneke B.E. Particle bounce or capture-search for an adequate theory: I. Conservation-of-energy model for a simple collision process // *Aerosol Sci. Technol.* – 1995. – Vol. 23. – No. 1. – P. 25–39.
27. Dahneke B.E. Further measurements of the bouncing of small latex spheres // *J. Colloid Interface Sci.* – 1975. – Vol. 51. – No. 1. – P. 58–65.
28. Measurements of kinetic energy loss for particles impacting surfaces, aerosol science and technology / S. Wall,

W. John, H.-C. Wang, S.L. Goren // *Aerosol Sci. Technol.* – 1990. – Vol. 12. – No. 4. – P. 926–946.

29. Li X., Dunn P.F., Brach R.M. Experimental and numerical studies on the normal impact of microspheres with surfaces // *J. Aerosol Sci.* – 1999. – Vol. 30. – No. 4. – P. 439–449.

30. Kim O.V., Dunn P.F. Direct visualization and model validation of microsphere impact and surface capture // *J. Aerosol Sci.* – 2008. – Vol. 39. – No. 4. – P. 373–375.

31. Dahneke B.E. The capture of aerosol particles by surfaces // *J. Colloid Interface Sci.* – 1971. – Vol. 37. – No. 2. – P. 342–353.

32. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. R. Soc. London A.* – 1971. – Vol. 324. – No. 1558. – P. 301–313.

33. Gilman J.J. Direct measurements of the surface energies of crystals // *J. Appl. Phys.* – 1960. – Vol. 31. – No. 12. – P. 2208–2218.

34. Kim O.V., Dunn P.F. A microsphere-surface impact model for implementation in computational fluid dynamics // *J. Aerosol Sci.* – 2007. – Vol. 38. – No. 5. – P. 532–549.

35. Poppe T., Blum J.R., Henning T. Experiments on collisional grain charging of micron-sized preplanetary dust // *The Astrophysical Journal.* – 2000. – Vol. 533. – No. 1. – P. 472–480.

36. Sorace C.M., Louge M.Y., Crozier M.D. High apparent adhesion energy in the breakdown of normal restitution for binary impacts of small spheres at low speed // *Mech. Res. Commun.* – 2009. – Vol. 36. – No. 3. – P. 364–368.

37. Gorham D.A., Kharaz A.H. The measurement of particle rebound characteristics // *Powder Technol.* – 2000. – Vol. 112. – No. 3. – P. 193–202.

38. Lifshitz J.M., Kolsky H. Some experiments on anelastic rebound // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1964. – Vol. 12, No. 1. – pp. 35–43.

39. Maugis D. Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a dugdale model // *J. Colloid Interf. Sci.* – 1992. – Vol. 150. – No. 1. – P. 243–269.

40. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interf. Sci.* – 1975. – Vol. 53. – No. 2. – P. 314–326.

41. Tabor D. A simple theory of static and dynamic hardness // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* – 1948. – Vol. 192. – No. 1029. – P. 247–274.

42. Meyer E. Untersuchungen über Härteprüfung und Härte Brinell Methoden // *Z. Ver. Dtsch. Ing.* – 1908. – Vol. 52. – P. 645–654.

43. Zener C. The intrinsic inelasticity of large plates // *Phys. Rev.* – 1941. – Vol. 59. – No. 8. – P. 669–673.

44. Normal collisions of spheres: A literature survey on available experiments / C. Güttler, D. Heißelmann, J. Blum, S. Krijt // arXiv:1204.0001v2. 2012. (14 pp.).

45. Bridges F.G., Hatzes A., Lin D.N.C. Structure, stability and evolution of Saturn's rings // *Nature.* – 1984. – Vol. 309. – No. 5966. – P. 333–335.

46. Energy loss and sticking mechanisms in particle aggregation in planetesimal formation / F.G. Bridges, K.D. Supulver, D.N.C. Lin, R. Knight, M. Zafra // *Icarus.* – 1996. – Vol. 123. – No. 2. – P. 422–435.

47. Hatzes A.P., Bridges F.G., Lin D.N.C. Collisional properties of ice spheres at low impact velocities // *Mon. Not. R. astr. Soc.* – 1988. – Vol. 231. – No. 4. – P. 1091–1115.

48. Thornton C., Ning Z. A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic-plastic spheres // *Powder Technol.* – 1998. – Vol. 99. – No. 2. – P. 154–162.

49. Davies R.M. The determination of static and dynamic yield stresses using a steel ball // *Proc. R. Soc. London A.* – 1949. – Vol. 197. – No. 1050. – P. 416–432.

50. Ning Z. Elasto-plastic impact of fine particles and fragmentation of small agglomerates: PhD Thesis. – Birmingham, Aston University, 1995. – 269 p.

51. Energy dissipation in head-on collisions of spheres / S. Krijt, C. Güttler, D. Heißelmann, C. Dominik, A.G.G.M. Tielens // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2013. – Vol. 46. – No. 43. – pp. 435303 (14 pp.).

52. Collision dynamics of granular particles with adhesion / N.V. Brilliantov, N. Albers, Spahn F., T. Pöschel // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol. 76. – No. 5. – P. 051302 (12 pp.).

53. Thornton C., Yin K.K. Impact of elastic spheres with and without adhesion // *Powder Technol.* – 1991. – Vol. 65. – No. 1-3. – P. 153–166.

54. Li X., Dunn P.F., Brach R.M. Experimental and numerical studies of microsphere oblique impact with planar surfaces // *J. Aerosol Sci.* – 2000. – Vol. 31. – No. 5. – P. 583–594.

55. Brach R.M., Dunn P.F. Macrodynamics of microparticles // *Aerosol Sci. Technol.* – 1995. – Vol. 23. – No. 1. – P. 51–71.

56. Wu C.-Y., Thornton C., Li L.-Y. A semi-analytical model for oblique impacts of elastoplastic spheres // *Proc. R. Soc. A.* – 2009. – Vol. 465. – No. 2103. – P. 937–960.

57. Cross R. Impact of a ball on a surface with tangential compliance // *Am. J. Phys.* – 2010. – Vol. 78. – No. 7. – P. 716–720.

58. Stronge W.J., James R., Ravani B. Oblique impact with friction and tangential compliance // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* – 2001. – Vol. 359. – No. 1789. – P. 2447–2465.

59. Norbe J.P., Dias A.M., Gras R. A study on elasto-plastic impact friction // *Wear.* – 1999. – Vol. 230. – No. 2. – P. 133–145.

60. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Корягин С.И. Упругий удар тела о наклонную поверхность // *Вестн. Балт. федер. ун-та им. И. Канта.* – 2013. – Вып. 10. – С. 36–42.

61. Johnson K.L. Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 452 p.

62. Kharaz A.H., Gorham D.A., Salman A.D. An experimental study of the elastic rebound of spheres // *Powder Technol.* – 2001. – Vol. 120. – No. 3. – P. 281–291.

References

1. Ciamarra M.P., Lara A.H., Lee A.T., Goldman D.I., Vishik I., Swinney H.L. Dynamics of drag and force distributions for projectile impact in a granular medium. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 92, no. 19, pp. 194301.

2. Jop P., Forterre Y., Pouliquen O. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 2006, vol. 441, no. 7094, pp. 727–730.

3. Brilliantov N.V., Spahn F., Hertzsch J.-M., Pöschel T. Model for collisions in granular gases. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 53, no. 5, pp. 5382–5392.

4. Bernard B. Impacts in mechanical systems: analysis and modelling. Berlin, New York: Springer, 2005, 278 p.

5. Parteli E.J.R., Schmidt J., Blümel C., Wirth K.-E., Peukert W., Pöschel T. Attractive particle interaction forces and packing density of fine glass powders. *Sci. Rep.*, 2014, vol. 4, p. 6227 (7 pp.).

6. Rodionov A.I., Matveev K.A. К динамике удара абсолютно твердого шара по упругому полупространству [To the dynamics of the impact of an absolutely rigid ball on an elastic half-space]. *Scientific Bulletin of NSTU*, 2012, no. 1 (46), pp. 93–108.

7. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The oblique impact of elastic spheres. *Wear*, 1976, vol. 38, no. 1, pp. 101-114.
8. Hauger W., Schnell W., Gross D. Technische Mechanic. Bd 3: Kinetik 7, Berlin: Springer, 2002, 267 p.
9. Hertz H. J. Ueber die berührung fester elastischer körper. *J. für die reine Angew. Math.*, 1882, vol. 92, pp. 156-171.
10. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *ASME J. Applied Mech.*, 1949, vol. 16, pp. 259-268.
11. Barber J.R. Adhesive contact during the oblique impact of elastic spheres. *Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1979, vol. 30, no. 3, pp. 468-476.
12. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The role of elastic tangential compliance in oblique impact. *Trans. ASME: J. Lubr. Technol.*, 1981, vol. 103, no. 1, pp. 74-80.
13. Labous L., Rosato A.D., Dave R.N. Measurements of collisional properties of spheres using high-speed video analysis. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, no. 5, pp. 5717-5725.
14. Foerster S.F., Louge M.Y., Chang H., Allia K. Measurements of the collision properties of small spheres. *Phys. Fluids.*, 1994, vol. 6, no. 3, pp. 1108-1115.
15. Cross R. Grip-slip behavior of a bouncing ball. *Am. J. Phys.*, 2002, vol. 70, no. 11, pp. 1093-1102.
16. Sondergaard R., Chaney K., Brennen C.E. Measurements of solid spheres bouncing off flat plates. *ASME J. Appl. Mech.*, 1990, vol. 57, no. 3, pp. 694-699.
17. Stronge W. J. Impact Mechanics. Cambridge, Cambridge University Press, 2004, 280 p.
18. Routh E.J. Dynamics of a system of rigid bodies. Part 1. *Macmillan and Co: London*, 1955, 448 p.
19. Lapshin V.V., Jurin E.A. Nelinejnaya model' udara s suhim treniem [Non-linear impact model with dry friction]. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii*, 2014, no. 12 (36), pp. 1-11.
20. Efimenko V.V. Kontaktnoe vzaimodejstvie tel pri udare [Contact interaction of bodies at impact]. *Bulletin FGOU VPO MGAU*, 2009, no. 2, pp. 41-42.
21. Dudko O.V., Potyanihin D.A. O kosom udare zhestkim telom, imeyushchim ploskuyu granicu, po nelinejnomu uprugomu poluprostranstvu [On an oblique impact by a rigid body having a flat boundary along a nonlinear elastic half-space]. *Izv. Saratov Univ. Ser. Matematik. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, no. 4, part. 2, pp. 32-40.
22. Kochetkov A.V., Fedotov P.V. Nekotorye voprosy teorii udara [Some problems of impact theory]. *Internet-Journal "Naukovedenie"*, 2013, no. 5, p. 110TBH513 (15 pp.).
23. Ekomasov S.P., Podmarkov O.V. O koeffitsiente vosstanovleniya pri uprugom soudarenii tel [On the recovery coefficient for elastic collision of bodies]. *Izv. vuzov. Geology and exploration*, 2009, no. 2, pp. 74-76.
24. Cheng W., Dunn P.F., Brach R.M. Surface roughness effects on microparticle adhesion. *J. Adhesion*, 2002, vol. 78, no. 11, pp. 929-965.
25. Habahpasheva T.I., Korobkin A.A. Soudarenie uprugih tel s tonkim sloem zhidkosti [Impact of elastic bodies with a thin layer of liquid]. *Bulletin of the Nizhny Novgorod University named N.I. Lobachevsky*, 2011, no. 4 (3), pp. 1222-1224.
26. Dahneke B.E. Particle bounce or capture-search for an adequate theory: I. Conservation-of-energy model for a simple collision process. *Aerosol Sci. Technol.*, 1995, vol. 23, no. 1, pp. 25-39.
27. Dahneke B.E. Further measurements of the bouncing of small latex spheres. *J. Colloid Interface Sci.*, 1975, vol. 51, no. 1, pp. 58-65.
28. Wall S., John W., Wang H.-C., Goren S.L. Measurements of kinetic energy loss for particles impacting surfaces, aerosol science and technology. *Aerosol Sci. Technol.*, 1990, vol. 12, no. 4, pp. 926-946.
29. Li X., Dunn P.F., Brach R.M. Experimental and numerical studies on the normal impact of microspheres with surfaces. *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 4, pp. 439-449.
30. Kim O.V., Dunn P.F. Direct visualization and model validation of microsphere impact and surface capture. *J. Aerosol Sci.*, 2008, vol. 39, no. 4, pp. 373-375.
31. Dahneke B.E. The capture of aerosol particles by surfaces. *J. Colloid Interface Sci.*, 1971, vol. 37, no. 2, pp. 342-353.
32. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proc. R. Soc. London A.*, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301-313.
33. Gilman J.J. Direct measurements of the surface energies of crystals. *J. Appl. Phys.*, 1960, vol. 31, no. 12, pp. 2208-2218.
34. Kim O.V., Dunn P.F. A microsphere-surface impact model for implementation in computational fluid dynamics. *J. Aerosol Sci.*, 2007, vol. 38, no. 5, pp. 532-549.
35. Poppe T., Blum J.R., Henning T. Experiments on collisional grain charging of micron-sized preplanetary dust. *The Astrophysical Journal*, 2000, vol. 533, no. 1, pp. 472-480.
36. Sorace C.M., Louge M.Y., Crozier M.D. High apparent adhesion energy in the breakdown of normal restitution for binary impacts of small spheres at low speed. *Mech. Res. Commun.*, 2009, vol. 36, no. 3, pp. 364-368.
37. Gorham D.A., Kharaz A.H. The measurement of particle rebound characteristics. *Powder Technol.*, 2000, vol. 112, no. 3, pp. 193-202.
38. Lifshitz J.M., Kolsky H. Some experiments on anelastic rebound. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1964, vol. 12, no. 1, pp. 35-43.
39. Maugis D. Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a dugdale model. *J. Colloid Interf. Sci.*, 1992, vol. 150, no. 1, pp. 243-269.
40. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Colloid Interf. Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314-326.
41. Tabor D. A simple theory of static and dynamic hardness. *Proc. R. Soc. London, Ser. A.*, 1948, vol. 192, no. 1029, pp. 247-274.
42. Meyer E. Untersuchungen über härteprüfung und härte brinell methoden. *Z. Ver. Dtsch. Ing.*, 1908, vol. 52, pp. 645-654.
43. Zener C. The intrinsic inelasticity of large plates. *Phys. Rev.*, 1941, vol. 59, no. 8, pp. 669-673.
44. Güttler C., Heißelmann D., Blum J., Krijt S. Normal collisions of spheres: A literature survey on available experiments, *arXiv:1204.0001v2*, 2012. (14 pp.).
45. Bridges F.G., Hatzes A., Lin D.N.C. Structure, stability and evolution of Saturn's rings. *Nature*, 1984, vol. 309, no. 5966, pp. 333-335.
46. Bridges F.G., Supulver K.D., Lin D.N.C., Knight R., Zafra M. Energy loss and sticking mechanisms in particle aggregation in planetesimal formation. *Icarus*, 1996, vol. 123, no. 2, pp. 422-435.
47. Hatzes A.P., Bridges F.G., Lin D.N.C. Collisional properties of ice spheres at low impact velocities. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 1988, vol. 231, no. 4, pp. 1091-1115.
48. Thornton C., Ning Z. A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic-plastic spheres. *Powder Technol.*, 1998, vol. 99, no. 2, pp. 154-162.

49. Davies R.M. The determination of static and dynamic yield stresses using a steel ball. *Proc. R. Soc. London A*, 1949, vol. 197, no. 1050, pp. 416-432.
50. Ning Z. Elasto-plastic impact of fine particles and fragmentation of small agglomerates: PhD Thesis. Birmingham, Aston University, 1995, 269 p.
51. Krijt S., Güttler C., Heißelmann D., Dominik C., Tielens A.G.G.M. Energy dissipation in head-on collisions of spheres. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2013, vol. 46, no. 43, pp. 435303 (14 pp.).
52. Brilliantov N.V., Albers N., Spahn F., Pöschel T. Collision dynamics of granular particles with adhesion. *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, no. 5, pp. 051302 (12 pp.).
53. Thornton C., Yin K.K. Impact of elastic spheres with and without adhesion. *Powder Technol.*, 1991, vol. 65, no. 1-3, pp. 153-166.
54. Li X., Dunn P.F., Brach R.M. Experimental and numerical studies of microsphere oblique impact with planar surfaces. *J. Aerosol Sci.*, 2000, vol. 31, no. 5, pp. 583-594.
55. Brach R.M., Dunn P.F. Macrodynamics of microparticles. *Aerosol Sci. Technol.*, 1995, vol. 23, no. 1, pp. 51-71.
56. Wu C.-Y., Thornton C., Li L.-Y. A semi-analytical model for oblique impacts of elastoplastic spheres. *Proc. R. Soc. A*, 2009, vol. 465, no. 2103, pp. 937-960.
57. Cross R. Impact of a ball on a surface with tangential compliance. *Am. J. Phys.*, 2010, vol. 78, no. 7, pp. 716-720.
58. Stronge W.J., James R., Ravani B. Oblique impact with friction and tangential compliance. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 2001, vol. 359, no. 1789, pp. 2447-2465.
59. Norbe J.P., Dias A.M., Gras R. A study on elasto-plastic impact friction. *Wear*, 1999, vol. 230, no. 2, pp. 133-145.
60. Velikanov N.L., Naumov V.A., Koryagin S.I. Uprugiy udar tela o naklonnuyu poverhnost [Elastic impact of the body on an inclined surface]. *Bulletin of the Baltic Federal University named I. Kant*, 2013, no. 10, pp. 36-42.
61. Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985, 452 p.
62. Kharaz A.H., Gorham D.A., Salman A.D. An experimental study of the elastic rebound of spheres. *Powder Technol.*, 2001, vol. 120, no. 3, pp. 281-291.