

Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Газизуллин Р.К., Шишкин В.М. Аэродинамическая составляющая демпфирования консолюно закрепленных тест-образцов при колебаниях вблизи жесткого экрана // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 62–71. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.06

Paimushin V.N., Firsov V.A., Gazizullin R.K., Shishkin V.M. The aerodynamic component of the damping of cantilevered test specimens oscillating near a rigid shield. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 62-71. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.06



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.06

УДК 531.121.1: 539.3

АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННЫХ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ВБЛИЗИ ЖЕСТКОГО ЭКРАНА

В.Н. Паймушин^{1,2}, В.А. Фирсов¹, Р.К. Газизуллин¹, В.М. Шишкин³

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань, Россия

²Казанский федеральный университет, Казань, Россия

³Вятский государственный университет, Киров, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 18 апреля 2018 г.
Принята: 19 июня 2018 г.
Опубликована: 29 июня 2018 г.

Ключевые слова:

тест-образец, затухающие изгибные колебания, эксперимент, аэродинамическое демпфирование, логарифмический декремент колебаний, целевая функция, прямой поиск.

АННОТАЦИЯ

Разработана численная методика обработки опытной виброграммы затухающих изгибных колебаний тест-образцов для определения экспериментальной нижней частоты и амплитудной зависимости логарифмического декремента колебаний (ЛДК), определяющего демпфирующие свойства тест-образца. Для определения ЛДК используется экспериментальная огибающая затухающих изгибных колебаний свободного конца тест-образца с аппроксимацией ее суммой двух экспонент с четырьмя независимыми параметрами. Они определяются прямым поиском минимума целевой функции, зависящей от указанных параметров. Проведены численные эксперименты, показывающие достоверность и достаточную точность разработанной методики. Показано, что для надежного определения экспериментальной аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца необходимо, чтобы его материал имел стабильные и низкие демпфирующие свойства. Таким требованиям в полной мере удовлетворяет дюралюминий. Определены экспериментальные амплитудные зависимости ЛДК серии изготовленных из него тест-образцов, расположенных на различных расстояниях от абсолютно жесткого экрана. На их основе предложен теоретико-экспериментальный метод определения аэродинамической составляющей демпфирования путем модификации структурной формулы, полученной ранее для определения аэродинамической составляющей демпфирования тонкой прямоугольной в плане удлиненной пластины (тест-образца) при отсутствии экрана. В нее введены три дополнительных параметра, определяемые из условия минимума целевой функции, представляющей квадратичную невязку между расчетными и экспериментальными значениями аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца при нескольких значениях длины его рабочей части и расстояния до жесткого экрана. Для поиска минимума целевой функции используется метод Хука-Дживса, не требующий вычисления ее градиента в текущей точке пространства искомых параметров. Построены полиномиальные зависимости найденных параметров от безразмерной нижней частоты колебаний тест-образца и относительного расстояния до жесткого экрана. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность разработанного метода.

© ПНИПУ

© Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: vpajmushin@mail.ru

Фирсов Вячеслав Анатольевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: vafirsov_49@mail.ru

Газизуллин Руслан Камилевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: gazizullin.rk@yandex.ru

Шишкин Виктор Михайлович – доктор технических наук, профессор, e-mail: tism1@rambler.ru

Vitaly N. Paimushin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vpajmushin@mail.ru

Vyacheslav A. Firsov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: vafirsov_49@mail.ru

Ruslan K. Gazizullin – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: gazizullin.rk@yandex.ru

Viktor M. Shishkin – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: tism1@rambler.ru



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE AERODYNAMIC COMPONENT OF THE DAMPING OF CANTILEVERED TEST SPECIMENS OSCILLATING NEAR A RIGID SHIELD

V.N. Paimushin^{1,2}, V.A. Firsov¹, R.K. Gazizullin¹, V.M. Shishkin³

¹Kazan National Research Technical University A.N. Tupolev, Kazan, Russian Federation

²Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

³Vyatka State University, Kirov, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 18 April 2018
Accepted: 19 June 2018
Published: 29 June 2018

Keywords:

test specimens, damping bending vibrations, experiment, aerodynamic damping, logarithmic decrement of oscillations, objective function, direct search.

ABSTRACT

A numerical technique has been developed to process the experimental vibrogram of damped flexural vibrations of test specimens to determine the experimental lower frequency and the amplitude dependence of the logarithmic decrement of oscillations, which determines the damping properties of the test specimen. To determine the logarithmic decrement, the experimental envelope of damped flexural oscillations of the specimen's free end has been used. The experimental envelope was approximated by the sum of two exponents with four independent parameters, which was determined by the direct search for the minimum of the objective function that depends on these parameters. Numerical experiments were performed to show the reliability and sufficient accuracy of the developed procedure. It is shown that to determine the experimental aerodynamic component of the damping of a test specimen reliably, it is necessary that a test material has stable and low damping properties. Such requirements are fully met by duralumin. The experimental amplitude dependences of the logarithmic decrement for a series of duralumin test samples located at different distances from an absolutely rigid shield have been determined.

On their basis, a theoretical-experimental method for determining the aerodynamic component of damping has been proposed by modifying the structural formula obtained earlier for determining the aerodynamic component of the damping of a thin rectangular planar elongated plate (test specimen) in the absence of a shield. Three additional parameters determined from the condition of a minimum objective function representing a quadratic discrepancy between the calculated and experimental values of the aerodynamic component of the damping of the test sample for several values of the length of its working part, and the distance to the rigid shield has been introduced into the formula. To find the minimum of the objective function, the Hook-Jeeves method has been used. This method does not require calculating its gradient at the current point in the space of the required parameters. Polynomial dependences of the found parameters on the dimensionless lower vibration frequency of the test specimen and the relative distance to the rigid shield are constructed. Numerical experiments have been carried out to confirm the validity of the developed method.

© PNRPU

Введение

В последние десятилетия повысился интерес к исследованиям механических колебаний пластин в неподвижной вязкой жидкости (газе). Это обусловлено множеством практических приложений, охватывающих разнообразные области знаний, включая атомную микроскопию [1, 2], датчики и приводы головок на микромеханических генераторах [3], охлаждающие устройства [4], морскую и шельфовую технику [5, 6]. Второе направление связано с развиваемым в последнее время подходом к определению демпфирующих свойства материалов на основе исследования затухающих изгибных колебаний консольно-закрепленных плоских тест-образцов [7–9]. При этом тест-образцы находятся в воздухе, что приводит к необходимости исключения аэродинамической составляющей демпфирования с целью получения параметра внутреннего демпфирования тест-образца.

Одной из основных задач в этом классе проблем является прогнозирование сил, действующих на колеблющуюся пластину со стороны жидкости (газа). Считается, что аэродинамическое взаимодействие может быть

сведено к инерционному эффекту присоединенной массы и аэродинамическому демпфированию (см., например, [10–13]). Инерционный эффект приводит к снижению частоты, а аэродинамическое демпфирование – к росту декремента колебаний пластины по сравнению с ее колебаниями в вакууме. В работе [14] теоретико-экспериментальным методом построена структурная формула для определения аэродинамической составляющей демпфирования консольно-закрепленных тест-образцов прямоугольного сечения при изгибных колебаниях по низшей моде. В качестве материала тест-образцов использовался дюралюминий. У тест-образцов из такого материала внутреннее демпфирование практически не зависит от амплитуды колебаний вплоть до очень больших деформаций [15–18], что позволяет легко выделить аэродинамическую составляющую демпфирования из полного уровня демпфирования тест-образца. При этом тест-образцы находились на значительном расстоянии от окружающих предметов, чтобы они не могли повлиять на результаты эксперимента.

Однако колебания конструкций возможны вблизи больших размеров объектов, которые могут создавать

экранирующий эффект, увеличивая таким образом влияние аэродинамических сил на демпфирование конструкции. С целью оценки данного эффекта актуально проведение параметрических экспериментальных исследований затухающих изгибных колебаний дюралюминиевых консольно-закрепленных тест-образцов, расположенных на различном расстоянии от абсолютно жесткого экрана. Это позволяет ставить и решать самостоятельную задачу построения методики определения аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца (прямоугольной в плане удлиненной пластины) при наличии жесткого экрана. Однако следует заметить, что решение задачи определения сил аэродинамического сопротивления при колебаниях удлиненной пластины наталкивается на серьезные трудности (даже при отсутствии экрана), обусловленные сложностью моделирования трехмерных течений газа, вызванных колебанием пластины. Известные подходы [1, 10] к ее решению основываются на предположении, что длина пластины существенно превышает ее ширину и толщину. В этом случае на низких структурных модах колебаний длина вибрационной волны значительно больше отклонений пластины, в силу чего она может рассматриваться как локально плоская. При этом трехмерными явлениями, относящимися к течению газа вдоль длины пластины, в том числе сходом вихрей с ее торца, пренебрегают, определяя аэродинамические силы в каждом сечении пластины путем изучения плоского движения газа, вызванного гармоническими осцилляциями тонкой жесткой пластины. Однако даже в плоском приближении задача определения аэродинамических сил, действующих на гармонически колеблющуюся пластину, в полном объеме не решена. Поэтому реальным будет подход, основанный на модифицировании отмеченной в работе [14] структурной формулы с использованием экспериментальных данных о демпфирующих свойствах тест-образцов, расположенных на различных расстояниях от жесткого экрана.

Для реализации данной возможности проведена модернизация разработанной ранее экспериментальной установки [7] с введением в нее абсолютно жесткого экрана, ширина которого значительно превышает ширину тест-образца (рис. 1).

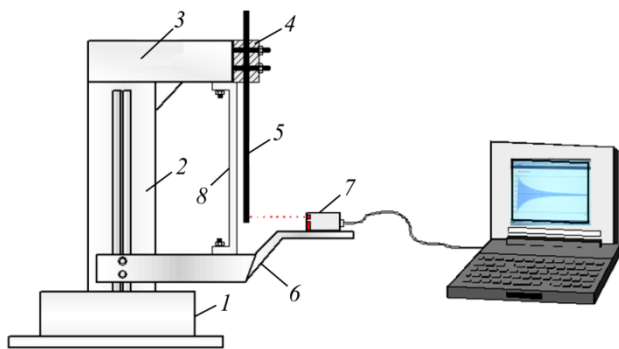


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки
Fig. 1. Schematic diagram of the experimental setup

Установка состоит из основания 1 и силовой стойки 2, жестко соединенных между собой. На стойке неподвижно закреплена консоль 3 с захватом 4 на конце. Защемление тест-образца 5 осуществляется с помощью разнесенных жестких планок, соединенных с консолью болтовыми соединениями и исключающих поворот тест-образца в сечении заделки. На стойке установлена подвижная платформа 6 для установки лазерного датчика перемещений 7, положение которой вдоль стойки может изменяться для измерения прогиба w свободного конца тест-образца при изменении его стрелы вылета. Вблизи тест-образца расположен жесткий экран 8. Расстояние от недеформированного тест-образца до экрана может меняться. Колебания совершаются после начального отклонения свободного конца тест-образца до контакта его с жестким экраном.

В установке используется триангуляционный лазерный датчик фирмы RIFTEK (RF603-X/100), обеспечивающий точность измерения амплитуды колебаний 0,01мм в цифровом формате. Разработанное математическое обеспечение позволяет осуществлять до 2000 замеров прогиба в секунду, что обеспечивает высокую точность описания экспериментальных виброграмм затухающих колебаний исследуемых тест-образцов.

1. Обработка результатов эксперимента

Демпфирующие свойства тест-образца при колебаниях в воздухе определяются логарифмическим декрементом колебаний (ЛДК) $\delta(A)$, зависящим от амплитуды колебаний A его свободного конца. Учитывая малость сил внутреннего трения и аэродинамических сил по сравнению с упругими силами, можно считать [8], что полный ЛДК тест-образца складывается из двух независимых частей, отвечающих механическому (внутреннее+конструкционное) $\delta_m(A)$ и аэродинамическому $\delta_a(A)$ демпфированию:

$$\delta(A) = \delta_m(A) + \delta_a(A). \quad (1.1)$$

Внутреннее демпфирование обусловлено необратимым рассеянием энергии в материале [19–28], а конструкционное – потерями энергии в узле крепления тест-образца. Проведенные авторами экспериментальные исследования при различной степени зажатия тест-образцов показали, что их демпфирующие свойства остаются при этом практически неизменными. Поэтому далее считается, что параметр внутреннего демпфирования $\delta_m(A)$ тест-образца определяется только рассеянием энергии (внутренним трением) в материале.

Обработка результатов испытаний тест-образца имеет своей целью нахождение по экспериментальной виброграмме $w(t)$ затухающих изгибных колебаний тест-образца зависимости $\delta(A)$ и низшей циклической частоты $f = 1/T$, где t – текущее время; T – период колебаний тест-образца. Обработка состоит из двух этапов. На первом этапе из записанной экспериментальной

виброграммы $w(t)$ колебаний свободного конца тест-образца выбирается рабочий диапазон изменения амплитуд $[A_{max}; A_{min}]$ и находятся моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m , соответствующие нулевым прогибам w в указанном диапазоне амплитуд. По значениям t_1 и t_m находится осредненный полупериод колебаний $T/2 = (t_m - t_1)/(m-1)$, что дает возможность определить циклическую частоту $f = 0,5/(T/2)$. На втором этапе находятся амплитуды колебаний A_1, A_2, \dots, A_n в выбранном диапазоне $[A_{max}; A_{min}]$ в области положительных значений $w(t)$ и соответствующие им моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , в результате чего получается экспериментальная дискретная зависимость $\bar{A}_i(t_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Полученная зависимость аппроксимируется суммой двух экспонент:

$$A(t) = a_1 e^{-a_2 t} + a_3 e^{-a_4 t}. \quad (1.2)$$

Параметры a_1, a_2, a_3, a_4 зависимости (1.2) определяются из условия

$$\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^n (1 - A_i / \bar{A}_i)^2 = \min, \quad (1.3)$$

где A_i – значения $A(t)$, найденные по зависимости (1.2) в моменты времени t_i .

Для нахождения данных параметров можно использовать необходимое условие существования минимума целевой функции $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_4} = 0.$$

Однако это приводит к системе нелинейных уравнений относительно параметров a_1, a_2, a_3, a_4 , для решения которой необходимо использовать итерационные методы: метод простой итерации, метод Ньютона и др. [29, 30]. При этом необходимо иметь начальные значения параметров a_1, a_2, a_3, a_4 . Однако проведенные численные эксперименты показали, что выбрать данные параметры так, чтобы они обеспечивали сходимость отмеченных методов, довольно проблематично. Поэтому более подходящими являются прямые методы поиска, основанные на целенаправленном движении к минимуму целевой функции с использованием какой-либо шаговой процедуры. Из них предпочтительными будут прямые методы поиска нулевого порядка (симлекс-метод, метод Хука-Дживса, метод Розенброка) [31, 32], в которых, в отличие от градиентных методов, достаточно располагать лишь возможностью вычисления целевой функции в любой точке ее определения. Наиболее простым и удобным является метод Хука-Дживса, который легко реализуется при любой размерности пространства поиска.

Для практической реализации процедуры метода Хука-Дживса предлагается использовать матрицу поиска

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{2,0} & a_{3,0} & a_{4,0} \\ a_{1,0} + d & a_{2,0} & a_{3,0} & a_{4,0} \\ a_{1,0} - d & a_{2,0} & a_{3,0} & a_{4,0} \\ a_{1,0} & a_{2,0} + d & a_{3,0} & a_{4,0} \\ a_{1,0} & a_{2,0} - d & a_{3,0} & a_{4,0} \\ a_{1,0} & a_{2,0} & a_{3,0} + d & a_{4,0} \\ a_{1,0} & a_{2,0} & a_{3,0} - d & a_{4,0} \\ a_{1,0} & a_{2,0} & a_{3,0} & a_{4,0} + d \\ a_{1,0} & a_{2,0} & a_{3,0} & a_{4,0} - d \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Первая строка матрицы \mathbf{P} содержит координаты $a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0}, a_{4,0}$ базовой точки. Остальные строки содержат координаты точек, отстоящих на расстоянии шага d от базовой точки по каждому искомому параметру. Поиск осуществляется определением целевой функции $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ по содержимому каждой строки матрицы \mathbf{P} и выбором строки, которая дает минимальное значение Φ . Содержимое этой строки переписывается в первую строку матрицы \mathbf{P} и становится новой базовой точкой. Затем формируются все остальные строки матрицы \mathbf{P} , как показано в выражении (1.4), и описанная процедура повторяется. Если текущее минимальное значение Φ в процессе поиска соответствует первой строке матрицы \mathbf{P} , то элементы данной строки принимаются за искомые параметры a_1, a_2, a_3, a_4 зависимости (1.2).

Обработаны экспериментальные виброграммы затухающих изгибных колебаний вертикально закрепленных дюралюминиевых тест-образцов с длинами $L = 200, 300$ и 500 мм при расстоянии до экрана $S = 70, 21, 14$ и 7 мм (по два замера на каждом тест-образце). Ширина и толщина тест-образцов: $b = 20$ мм, $h = 0,95$ мм. Выбор дюралюминия продиктован тем, что данный материал обладает стабильно низкими и практически не зависящими от уровня деформации демпфирующими свойствами [15–18], что позволяет просто и надежно выделить из полного (экспериментального) ЛДК тест-образца необходимую аэродинамическую составляющую демпфирования $\delta_a(A)$.

Поиск минимума целевой функции $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ осуществлялся методом Хука-Дживса в три этапа с уменьшением шага поиска в 10 раз после достижения очередного минимума целевой функции. Начальный шаг поиска по каждому из параметров составлял величину $d = 0,001$. Координаты базовой точки определялись по зависимости (1.2) при $t = t_1, t = t_n$ и условиях $a_{3,0} = a_{1,0}, a_{4,0} = a_{2,0}$, что дает формулы для вычисления значений $a_{2,0}$ и $a_{1,0}$:

$$a_{2,0} = \frac{\ln(A_1/A_n)}{t_n - t_1}; \quad a_{1,0} = A_1 \frac{e^{a_{2,0} t_1}}{2}.$$

С целью получения ЛДК тест-образцов приблизительно в одинаковом диапазоне амплитуд (при различ-

ных расстояниях S до экрана) отсчет времени в аппроксимации (1.2) осуществлялся от момента, соответствующего экспериментальной амплитуде $A^* = 7$ мм. При поиске параметров a_1, a_2, a_3, a_4 учитывалось ограничение-равенство $A(0) = a_1 + a_3 = A^*$.

В табл. 1 приведены длины L тест-образцов, соответствующие им экспериментальные частоты f , рас-

стояния S до экрана, номера замеров виброграммы колебаний $w(t)$ и полученные из условия (1.3) параметры a_1, a_2, a_3, a_4 зависимости (1.2). На рис. 2 приведена огибающая колебаний свободного конца тест-образца длиной $L = 200$ мм при $S = 14$ мм (по первому замеру), показывающая хорошее качество поиска параметров a_1, a_2, a_3, a_4 .

Таблица 1

Длины L тест-образцов, экспериментальные частоты f , расстояния S до экрана, номера замеров виброграммы $w(t)$ и найденные параметры a_1, a_2, a_3, a_4 аппроксимации (1.2)

Table 1

The length L of the test specimens, the experimental frequencies f , the distances S to the shield, the measurement numbers of the vibrogram $w(t)$ and the found approximations (1.2) parameters a_1, a_2, a_3, a_4

L , мм	f , Гц	S , мм	Замер	a_1	a_2	a_3	a_4		
200	17,670	7	1	3,51335	1,06177	3,40665	0,24345		
			2	3,73477	1,13263	3,25523	0,21404		
		14	1	3,34917	0,99389	3,66083	0,23672		
			2	3,60104	0,90660	3,27896	0,18927		
		21	1	3,08032	0,95682	3,80968	0,25265		
			2	4,03986	0,83692	2,88014	0,17525		
		70	1	3,63186	0,79979	3,28814	0,19317		
			2	3,12104	0,90040	3,73896	0,20828		
		300	8,237	7	1	3,29020	0,52347	3,06980	0,08382
					2	3,58239	0,54937	3,36761	0,09576
				14	1	3,76819	0,38612	3,14181	0,06693
					2	3,59732	0,40716	3,36268	0,07628
21	1			3,59148	0,36400	3,26852	0,06407		
	2			3,71410	0,35826	3,26590	0,06789		
70	1			3,49727	0,33585	3,36273	0,05893		
	2			3,56620	0,33794	3,35380	0,06463		
500	3,148			7	1	3,17450	0,18051	3,70540	0,03102
					2	2,94610	0,23521	3,88390	0,03806
				14	1	3,16135	0,13636	3,71865	0,02591
					2	2,90944	0,17703	3,90056	0,02932
		21	1	2,90499	0,15037	3,95501	0,02550		
			2	2,75360	0,15857	4,11641	0,02701		
		70	1	2,66436	0,14355	4,27565	0,02623		
			2	2,67970	0,13021	4,31031	0,02937		

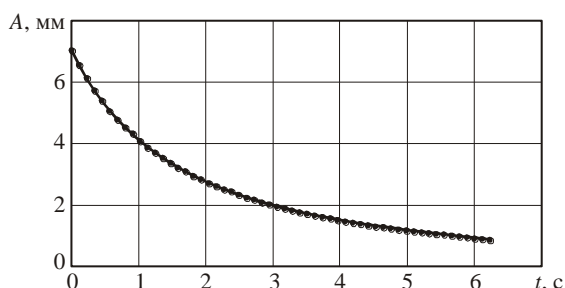


Рис. 2. Огибающая колебаний свободного конца тест-образца длиной $L = 200$ мм при $S = 14$ мм (по первому замеру): точки – эксперимент; линия – аппроксимация (1.2)
 Fig. 2. The envelope of free end oscillations of a test specimen with a length $L = 200$ mm at $S = 14$ mm (according to the first measurement): points show the experiment; the line shows the approximation (1.2)

Для определения ЛДК тест-образца использовалась формула [7]

$$\delta(t) = -\frac{1}{f} \frac{d \ln A(t)}{dt} = -\frac{1}{f A(t)} \frac{dA(t)}{dt}$$

После подстановки сюда аппроксимации (1.2) получается зависимость

$$\delta(t) = \frac{a_1 a_2 e^{-a_2 t} + a_3 a_4 e^{-a_4 t}}{f (a_1 e^{-a_2 t} + a_3 e^{-a_4 t})} \quad (1.5)$$

Выражения (1.2) и (1.5) в параметрическом виде (через время t) дают необходимую амплитудную зависимость $\delta(A)$ ЛДК тест-образца. Однако это вызывает затруднения при построении усредненных по замерам зависимостей $\delta(A)$ тест-образцов, обусловленные невозможностью исключения времени t из зависимостей (1.2) и (1.5) с целью получения явной зависимости $\delta(A)$ на каждом замере виброграммы затухающих колебаний тест-образца. Для получения такой зависимости предлагается использовать аппроксимацию

$$\delta(A) = c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_k A^k. \quad (1.6)$$

Коэффициенты полинома (1.6) определяются из условия

$$\sum_{i=1}^n [\delta_i - (c_0 + c_1 A_i + c_2 A_i^2 + \dots + c_k A_i^k)]^2 = \min. \quad (1.7)$$

Значения δ_i и A_i находятся соответственно по зависимостям (1.5) и (1.2) при $t = t_i$.

Реализация условия (1.7) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{c} = \mathbf{H}^T \boldsymbol{\delta},$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & A_1 & A_1^2 & \dots & A_1^k \\ 1 & A_2 & A_2^2 & \dots & A_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & A_n & A_n^2 & \dots & A_n^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{bmatrix}.$$

Численные эксперименты показали, что наилучшее приближение к исходной зависимости (1.5) получается при использовании полинома восьмой степени ($k = 8$). Таким образом, можно построить аппроксимирующий степенной полином (1.6) при каждом замере виброграммы колебаний тест-образца. Усреднение полученных зависимостей достигается усреднением соответствующих коэффициентов полиномов.

С целью получения зависимостей $\delta(A)$ при различных замерах в одинаковых диапазонах амплитуд $[A_1; A_n]$ диапазон времени $[t_1; t_n]$ при каждом замере необходимо назначать так, чтобы выполнялись условия

$$a_1 e^{-a_2 t_1} + a_3 e^{-a_4 t_1} - A_1 = 0, \quad a_1 e^{-a_2 t_n} + a_3 e^{-a_4 t_n} - A_n = 0. \quad (1.8)$$

Решение уравнений (1.8) необходимо итерировать. Для этого проще всего использовать метод половинного деления с последовательным уменьшением вдвое интервала поиска до выполнения условий

$$|t_{1,\max} - t_{1,\min}| \leq \varepsilon, \quad |t_{n,\max} - t_{n,\min}| \leq \varepsilon, \quad (1.9)$$

где ε – заданная точность.

На рис. 3 приведены зависимости $\delta(A)$ для тест-образца длиной $L = 300$ мм при расстоянии до экрана $S = 21$ мм (замер 1) в диапазоне амплитуд $[7; 0,86]$ мм, полученные при $n = 20$ и $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}$: точки – зависимость (1.5); линия – полином (1.6) при $k = 8$. На рис. 4 приведены исходные при замерах и усредненная по ним зависимости $\delta(A)$ для тест-образца длиной $L = 200$ мм при $S = 14$ мм, полученные с использованием аппроксимации (1.6): 1 – замер 1; 2 – замер 2; 3 – усредненная зависимость. На рис. 5 приведены усредненные по замерам зависимости $\delta(A)$ для тест-образца длиной $L = 300$ мм при расстоянии до экрана $S = 7, 14, 21$ и 70 мм. Видно, что по мере возрастания расстояния S ЛДК тест-образца существенно падает.

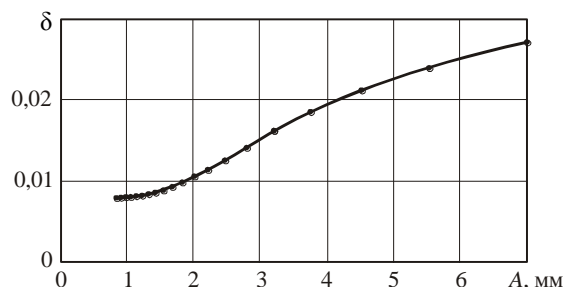


Рис. 3. Зависимости $\delta(A)$ для тест-образца длиной $L = 300$ мм при расстоянии до экрана $S = 21$ мм, замер 1: точки – зависимость (1.5); линия – полином (1.6)
Fig. 3. Dependences of $\delta(A)$ for the test specimen of length $L = 300$ mm at a distance to the shield $S = 21$ mm, measurement 1: points show the dependence (1.5); the line shows the polynomial (1.6)

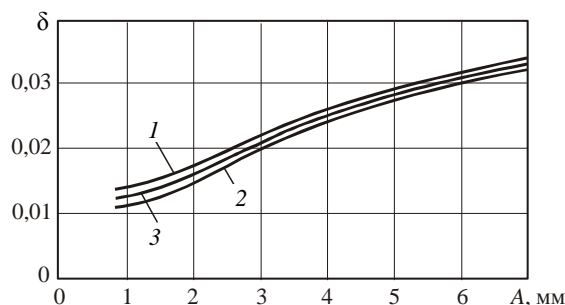


Рис. 4. Исходные при замерах и усредненная по ним зависимости $\delta(A)$ для тест-образца длиной $L = 200$ мм при $S = 14$ мм: 1 – замер 1; 2 – замер 2; 3 – усредненная зависимость
Fig. 4. Initial measurement values and averaged $\delta(A)$ dependencies for the test specimen of length $L = 200$ mm at $S = 14$ mm: 1 is the measurement 1; 2 is the measurement 2; 3 is the averaged dependence

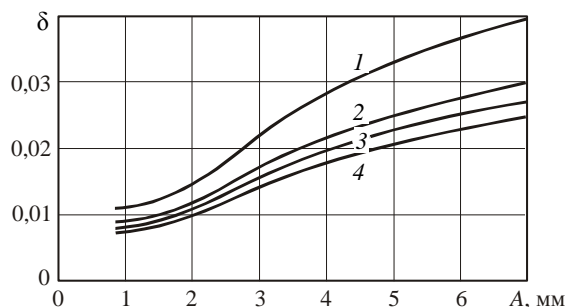


Рис. 5. Усредненные по замерам зависимости $\delta(A)$ для тест-образца длиной $L = 300$ мм при различных расстояниях S до экрана: 1 – $S = 7$ мм; 2 – $S = 14$ мм; 3 – $S = 21$ мм; 4 – $S = 70$ мм
Fig. 5. Dependences of $\delta(A)$ averaged over the measurements of the for the test specimen with the length $L = 300$ mm at different distances S to the shield: 1 – $S = 7$ mm; 2 – $S = 14$ mm; 3 – $S = 21$ mm; 4 – $S = 70$ mm

2. Построение структурной формулы для определения аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца при наличии жесткого экрана

В работе [14] при исследовании затухающих изгибных колебаний дюралюминиевых пластин теоретико-экспериментальным методом построена структурная

формула для определения аэродинамической составляющей демпфирования тонкой консольно-закрепленной пластины постоянной толщины при колебаниях ее по нижней моде вдали от экранирующих объектов:

$$\delta_a = \frac{\rho_a b}{\rho_m h} \left(\frac{6,14}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1 \kappa^{a+0,42}}{0,12 + \kappa^a} \right); \quad \beta = b^2 f / \nu; \quad \kappa = A/b; \quad a = 1,03 + 16,61\beta^{-0,627}. \quad (2.1)$$

Здесь ρ_a, ν – соответственно плотность и кинематическая вязкость воздуха; ρ_m – плотность материала; b – ширина пластины. Первое слагаемое в скобках отражает вклад в δ_a вязкой составляющей аэродинамического сопротивления пластины, которая зависит только безразмерной частоты (параметра Стокса) β . Его влияние на величину δ_a сказывается главным образом при малых амплитудах колебаний пластины. Второе слагаемое определяет вклад в δ_a вихревой компоненты аэродинамического сопротивления, которая зависит в основном от безразмерной амплитуды κ .

Для определения аэродинамической составляющей ЛДК тест-образца при наличии абсолютно жесткого экрана предлагается использовать теоретико-экспериментальный подход, состоящий в подходе к модифицированию формулы (2.1) при минимальном расхождении между расчетными и экспериментальными значениями δ_a при нескольких амплитудах колебаний A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в заданном диапазоне амплитуд $[A_{max}; A_{min}]$. Для учета влияния на δ_a жесткого экрана в формулу (2.1) предлагается ввести дополнительно параметры x_1, x_2, x_3 :

$$\delta_a = \frac{\rho_a b}{\rho h} \left(\frac{6,14x_1}{\sqrt{\beta}} + \frac{5,1x_2\kappa^{a+0,42}}{0,12x_3 + \kappa^a} \right), \quad (2.2)$$

определяемые из условия

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^n (1 - \delta_{a,i} / \delta_{a,i}^*)^2 = \min, \quad (2.3)$$

где $\delta_{a,i}^*$ – экспериментальная аэродинамическая составляющая демпфирования тест-образца при амплитуде колебаний A_i , получаемая вычетом из полного ЛДК параметра внутреннего демпфирования, обусловленного внутренним трением в материале тест-образца. В работе [33] показано, что в случае независимости демпфирующих свойств материала от уровня деформации параметр внутреннего демпфирования тест-образца является тождественным ЛДК δ_m материала. Для дюралюминия эта величина составляет значение $\delta_m = 0,0051$ [17].

В табл. 2 приведены длины L тест-образцов, расстояния S до жесткого экрана и найденные из условия (2.3) параметры x_1, x_2, x_3 . Поиск минимума функции $F(x_1, x_2, x_3)$ осуществлялся методом Хука-Дживса с шагом $d = 0,0001$ по каждому искомому параметру.

Имея параметры x_1, x_2, x_3 при четырех значениях S , можно построить кубические полиномы (при имеющихся в эксперименте длинах L тест-образцов):

$$x_1 = \sum_{i=0}^3 a_i q^i; \quad x_2 = \sum_{i=0}^3 b_i q^i; \quad x_3 = \sum_{i=0}^3 c_i q^i; \quad (q = S/b). \quad (2.4)$$

В табл. 3 приведены длины L тест-образцов, соответствующие им низшие частоты f и полученные коэффициенты a_i, b_i, c_i ($i = 0, 1, 2, 3$) полиномов (2.4).

Таблица 2

Длины L тест-образцов, расстояния S до экрана и найденные из условия (2.3) параметры x_1, x_2, x_3

Table 2

The length L of the test specimens, the distance S to the shield and the parameters x_1, x_2, x_3 found from condition (2.3)

$S, \text{ мм}$	$L = 200 \text{ мм}$			$L = 300 \text{ мм}$			$L = 500 \text{ мм}$		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
7	1,8061	1,2311	0,7104	0,8222	1,4708	0,6980	0,7062	1,2660	0,4924
14	1,7127	0,9879	0,7037	0,4616	1,0173	0,6033	0,4339	0,9036	0,4526
21	1,6791	0,8587	0,4594	0,3507	0,9257	0,6205	0,3795	0,9922	0,6931
70	1,6170	0,8277	0,6586	0,2823	0,8866	0,7321	0,4852	0,6938	0,5559

Таблица 3

Длины L тест-образцов, соответствующие им низшие частоты f и полученные коэффициенты a_i, b_i, c_i ($i = 0, 1, 2, 3$) полиномов (2.4)

Table 3

The length L of the test specimens, the corresponding lower frequencies f and the resulting coefficients a_i, b_i, c_i ($i=0, 1, 2, 3$) of the polynomials (2.4)

i	$L = 200 \text{ мм}, f = 17,670 \text{ Гц}$			$L = 300 \text{ мм}, f = 8,237 \text{ Гц}$			$L = 500 \text{ мм}, f = 3,148 \text{ Гц}$		
	a_i	b_i	c_i	a_i	b_i	c_i	a_i	b_i	c_i
0	1,9772	1,6159	0,3776	1,5073	2,3997	0,9420	1,2632	2,2407	0,9276
1	-0,6168	-1,3280	1,5331	-2,4923	-3,4411	-0,9461	-2,0620	-3,8130	-1,9179
2	0,3900	0,6906	-1,8019	1,6298	2,4034	0,7621	1,4350	3,1573	2,0837
3	-0,0695	-0,1073	0,3962	-0,2908	-0,4411	-0,1454	-0,2598	-0,6269	-0,4475

По значениям a_i, b_i, c_i ($i = 0, 1, 2, 3$) при трех частотах f построены квадратичные полиномы, определяющие зависимость a_i, b_i, c_i от безразмерной частоты $\beta = b^2 f / v$:

$$a_i = \mathbf{U}_i^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{Bmatrix}; \quad b_i = \mathbf{V}_i^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{Bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$c_i = \mathbf{W}_i^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{Bmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

где $\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i$ – векторы, содержащие коэффициенты данных полиномов (табл. 4).

Таблица 4

Элементы векторов $\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$)

Table 4

Elements of vectors $\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$)

\mathbf{U}_0	$1,1155 \times 10^0$	$1,7444 \times 10^{-3}$	$1,7898 \times 10^{-7}$
\mathbf{U}_1	$-1,2898 \times 10^0$	$-1,1502 \times 10^{-2}$	$2,7441 \times 10^{-5}$
\mathbf{U}_2	$1,0115 \times 10^0$	$6,4248 \times 10^{-3}$	$-1,6434 \times 10^{-5}$
\mathbf{U}_3	$-1,8786 \times 10^{-1}$	$-1,0972 \times 10^{-3}$	$2,8617 \times 10^{-6}$
\mathbf{V}_0	$1,9382 \times 10^0$	$4,5330 \times 10^{-3}$	$-1,1072 \times 10^{-5}$
\mathbf{V}_1	$-3,7736 \times 10^0$	$-1,6968 \times 10^{-3}$	$1,4616 \times 10^{-5}$
\mathbf{V}_2	$3,5640 \times 10^0$	$-4,5725 \times 10^{-3}$	$-3,2374 \times 10^{-6}$
\mathbf{V}_3	$-7,4384 \times 10^{-1}$	$1,4022 \times 10^{-3}$	$-1,0882 \times 10^{-6}$
\mathbf{W}_0	$8,0860 \times 10^{-1}$	$1,9483 \times 10^{-3}$	$-6,0679 \times 10^{-6}$
\mathbf{W}_1	$-2,3907 \times 10^0$	$5,0484 \times 10^{-3}$	$6,9587 \times 10^{-6}$
\mathbf{W}_2	$2,8796 \times 10^0$	$-9,3825 \times 10^{-3}$	$-1,1731 \times 10^{-6}$
\mathbf{W}_3	$-6,3785 \times 10^{-1}$	$2,2834 \times 10^{-3}$	$-1,8862 \times 10^{-7}$

Подставляя полиномы (2.5) в равенства (2.4), получаем аппроксимации, определяющие зависимость параметров x_1, x_2, x_3 структурной формулы (2.2) от относительного расстояния $q = S/b$ до экрана и безразмерной частоты β :

$$x_1 = \sum_{i=0}^3 \mathbf{U}_i^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{Bmatrix} q^i; \quad x_2 = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{Bmatrix} q^i; \quad (2.6)$$

$$x_3 = \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{Bmatrix} q^i.$$

На рис. 6 представлены зависимости $\delta_a(A)$ для тест-образца длиной $L = 200$ мм, расположенного на расстоянии $S = 14$ мм от жесткого экрана: пунктирная линия – эксперимент; сплошная линия – структурная формула (2.2). Наблюдается достаточная близость расчетной зависимости к экспериментальной кривой. Аналогичная ситуация наблюдается и при всех других участвующих в экспериментах значениях L и S , что свидетельствует о возможности использования формулы (2.2) для вычисления аэродинамической составляющей демпфирования консольных тест-образцов, расположенных вблизи абсолютно жесткого экрана.

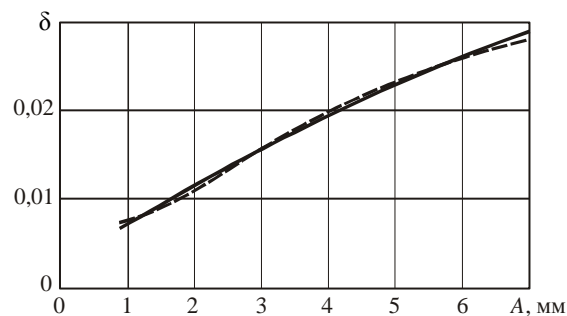


Рис. 6. Зависимости $\delta_a(A)$ для тест-образца длиной $L = 200$ мм, расположенного на расстоянии $S = 14$ мм от жесткого экрана: пунктирная линия – эксперимент; сплошная линия – структурная формула (2.2)

Fig. 6. $\delta_a(A)$ dependences for the test specimen of length $L = 200$ mm located at a distance $S = 14$ mm from the rigid shield: the dashed line shows the experiment; the solid line shows the structural formula (2.2)

Выводы

1. Разработана простая и удобная в практическом применении методика обработки виброграммы затухающих изгибных колебаний консольно-закрепленных тест-образцов для определения экспериментальной нижней частоты f и амплитудной зависимости ЛДК δ тест-образца. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность разработанной методики.

2. Проведены экспериментальные параметрические исследования, показывающие значительное увеличение демпфирующих свойств тест-образца при уменьшении расстояния S до жесткого экрана.

3. Разработан теоретико-экспериментальный метод построения структурной формулы для вычисления аэродинамической составляющей демпфирования δ_a тест-образца в зависимости от его нижней частоты колебаний и расстояния до жесткого экрана, основанный на модификации формулы, полученной ранее для тонкой пластины постоянной толщины при отсутствии экрана, путем введения в нее трех дополнительных параметров, определяемых из условия минимума квадратичной невязки между экспериментальными и расчетными значениями аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца. Получены соотношения, определяющие зависимости отмеченных параметров от относительного расстояния $q = S/b$ до экрана и безразмерной частоты колебаний тест-образца. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность разработанного метода.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00667).

Acknowledgments

This study was financially supported by a grant of the Russian Science Foundation (project No. 14-19-00667).

Библиографический список

1. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // *Journal of Applied Physics*. – 1998. – Vol. 84(1). – P. 64–76.
2. Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M. The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers // *Journal of Applied Physics*. – 1998. – Vol. 84 (4). – P. 1782–1790.
3. Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers // *Journal of Fluids and Structures*. – 2009. – Vol. 25. – P. 1334–1347.
4. Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan–Carpenter numbers / R.A. Bidkar, M. Kimber, A. Raman, A.K. Bajaj, S. Garimella // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2009. – Vol. 634. – P. 269–289.
5. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. 1. Vortex shedding observation // *Applied Ocean Research*. – 2003. – Vol. 25 (2). – P. 21–35.
6. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. 2. Hydrodynamic forces // *Applied Ocean Research*. – 2003. – Vol. 25 (2) – P. 53–62.
7. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 1. Experimental Basis / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gunal, A.G. Egorov // *Mechanics of Composite Materials*. – 2014. – Vol. 50. – No. 2. – P. 127–136.
8. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 2. Aerodynamic Component of Damping / A.G. Egorov, A.M. Kamalutdinov, A.N. Nuriev, V.N. Paimushin // *Mechanics of Composite Materials*. – 2014. – Vol. 50. – No. 3. – P. 267–278.
9. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 3. Identification of the Characteristics of internal Damping / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gunal, A.G. Egorov, R.A. Kayumov // *Mechanics of Composite Materials*. – 2014. – Vol. 50. – No. 5. – P. 633–646.
10. Aureli M., Basaran M.E., Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids // *Journal of Sound and Vibration*. – 2012. – Vol. 331. – P. 1624–1654.
11. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // *Applied Physics Letters*. – 2010. – Vol. 96. – Art. 164102.
12. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1986. – Vol. 165. – P. 61–71.
13. Keulegan G.H. Carpenter L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. // *Journal of Research of National Bureau of Standards*. – 1958. – Vol. 60. – No. 5. – P. 423–440.
14. Theoretical-Experimental Method of Determining the Drag Coefficient of a Harmonically Oscillating Thin Plate / A.G. Egorov, A.M. Kamalutdinov, V.N. Paimushin, V.A. Firsov // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2016. – Vol. 57. – No. 2. – P. 275–282. DOI: 10.1134/S0021894416020103
15. Adams R.D. The damping characteristics of certain steels, cast irons and other metals // *Journal of Sound and Vibration*. – 1972. – Vol. 23. – No. 2. – P. 199–216.
16. Felicity J.G. Property-microstructural relationships in GFRP // PhD Thesis. Plymouth Polytechnic, 1978.
17. Identification of the Elastic and Damping Characteristics of Soft Materials Based on the Analysis of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens / V.N. Paimushin, V.A. Firsov, I. Gunal, V.M. Shishkin // *Mechanics of Composite Materials*. – 2016. – Vol. 52. – No. 4. – P. 435–454.
18. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples // *Journal of Sound and Vibration*. – 2018. – Vol. 421. – P. 334–347.
19. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
20. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наукова думка, 1970. – 377 с.
21. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 129 с.
22. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // *Журнал технической физики*. – 1938. – Т. 8. – Вып. 6. – С. 483–499.
23. Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. – Киев: Вища школа, 1977. – 252 с.
24. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: справ. – Киев: Наукова думка, 1971. – 375 с.
25. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. – М.: Металлургия, 1969. – 330 с.
26. Василенко Н.В. Учет несовершенной упругости материала при использовании метода конечных элементов для исследования резонансных колебаний деформируемого твердого тела произвольной формы // *Проблемы прочности*. – 1980. – № 10. – С. 25–27.
27. Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. Рассеяние энергии при деформировании в условиях сложного напряженного состояния материала. – Киев: Вища школа, 1981. – 168 с.
28. Яковлев А.П. Диссипативные свойства неоднородных материалов и систем. – Киев: Наукова думка, 1985. – 248 с.
29. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
30. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 466 с.
31. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: практ. руководство / пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
32. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
33. Теоретико-экспериментальный метод определения аэродинамической составляющей демпфирования тест-образца ромбовидного поперечного сечения / В.Н. Паймушин, В.А. Фирсов, И. Гюнал, В.М. Шишкин // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2016. – № 4. – С. 200–219.

References

1. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // *Journal of Applied Physics*. 1998. Vol. 84(1). pp. 64-76.
2. Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M. The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers // *Journal of Applied Physics*. 1998. Vol. 84 (4). pp. 1782–1790.

3. Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers // *Journal of Fluids and Structures*. 25 (2009). pp. 1334–1347.
4. Bidkar R.A., Kimber M., Raman A., Bajaj A.K., Garimella S. Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan–Carpenter numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. 634 (2009). pp. 269–289.
5. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. 1. Vortex shedding observation // *Applied Ocean Research*. 25 (2) (2003). pp. 21–35.
6. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. 2. Hydrodynamic forces // *Applied Ocean Research*. 25 (2) (2003). pp. 53–62.
7. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gunal I., Egorov A.G. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 1. Experimental Basis // *Mechanics of Composite Materials*. 2014. Vol. 50. No. 2. pp. 127–136.
8. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 2. Aerodynamic Component of Damping // *Mechanics of Composite Materials*. 2014. Vol. 50. No. 3. pp. 267–278.
9. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gunal I., Egorov A.G., Kayumov R.A. Theoretical-Experimental Method for Determining the Parameters of Damping Based on the Study of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens. 3. Identification of the Characteristics of internal Damping // *Mechanics of Composite Materials*. 2014. Vol. 50. No. 5. pp. 633–646.
10. Aureli M., Basaran M.E., Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. pp. 1624–1654.
11. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // *Applied Physics Letters*. 2010. Vol. 96. Art. 164102.
12. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. 1986. Vol. 165. pp. 61–71.
13. Keulegan G.H. Carpenter L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. // *Journal of Research of National Bureau of Standards*. 1958. Vol. 60, No. 5. pp. 423–440.
14. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Paimushin V.N., Firsov V.A. Theoretical-Experimental Method of Determining the Drag Coefficient of a Harmonically Oscillating Thin Plate // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. No. 2. pp. 275–282. DOI: 10.1134/S0021894416020103
15. Adams R.D. The damping characteristics of certain steels, cast irons and other metals // *Journal of Sound and Vibration*. 1972. Vol. 23. No. 2. pp. 199–216.
16. Felicity J.G. Property-microstructural relationships in GFRP // PhD Thesis. Plymouth Polytechnic, 1978.
17. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. Identification of the Elastic and Damping Characteristics of Soft Materials Based on the Analysis of Damped Flexural Vibrations of Test Specimens // *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. No. 4. pp. 435–454.
18. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples // *Journal of Sound and Vibration*. 421 (2018). pp. 334–347.
19. Panovko I.A.G. Vnutrennee trenie pri kolebaniyakh uprugikh system [Internal friction under oscillations of elastic systems]. M.: Fizmatgiz, 1960. 193 p.
20. Pisarenko G.S. Kolebaniya mekhanicheskikh sistem s uchetom nesovershennoi uprugosti materiala [The vibrations of mechanical systems taking account of imperfect elasticity of the material]. Kiev: Naukova dumka, 1970. 377 p.
21. Sorokin E.S. K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh system [On the internal friction theory in the oscillations of elastic systems]. M.: Gosstroizdat, 1960. 129 p.
22. Davidenkov N.N. O rasseianii energii pri vibratsiyakh [On the dissipation of energy in vibrations]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 1938, Vol. 8, iss. 6, pp. 483–499.
23. Khil'chevskii V.V., Dubenets V.G. Rasseianie energii pri kolebaniyakh tonkostennykh elementov konstruksii [Energy dissipation during oscillations of thin-walled structural elements]. Kiev: Vishcha shkola, 1977. 252 p.
24. Pisarenko G.S., Iakovlev A.P., Matveev V.V. Vibropogloshchayushchie svoystva konstruksionnykh materialov: Spravochnik [Vibration-absorbing properties of structural materials: Handbook]. Kiev: Naukova dumka, 1971. 375 p.
25. Postnikov V.S. Vnutrennee trenie v metallakh [Internal friction in metals]. M.: Metallurgiya, 1969. 330 p.
26. Vasilenko N.V. Uchet nesovershennoi uprugosti materiala pri ispol'zovanii metoda konechnykh elementov dlia issledovaniya rezonansnykh kolebaniy deformiruemogo tverdogo tela proizvol'noi formy [The account of imperfect elasticity of a material at use of a finite element method for research of resonant oscillations of a deformable rigid body of any form]. *Problemy prochnosti*. 1980. № 10. pp. 25–27.
27. Khil'chevskii V.V., Dubenets V.G. Rasseianie energii pri deformirovani v usloviyakh slozhnogo napriazhennogo sostoyaniya materiala [Scattering of energy during deformation under conditions of complex stress state of the material]. Kiev: Vishcha shkola, 1981. 168 p.
28. Iakovlev A.P. Dissipativnye svoystva neodnorodnykh materialov i system [Dissipative properties of inhomogeneous materials and systems]. Kiev: Naukova dumka, 1985. 248 p.
29. Demidovich B.P., Maron I.A. Osnovy vychislitel'noi matematiki [Fundamentals of Computational Mathematics]. M.: Nauka, 1966. 664 p.
30. Porshnev S.V., Belenkova I.V. Chislennyye metody na baze Mathcad [Numerical methods based on Mathcad]. Spb.: BKhV-Peterburg, 2005. 466 p.
31. Shup T. Reshenie inzhenernykh zadach na EVM: prakticheskoe rukovodstvo [Solving engineering problems using computers: a practical guide]. Moscow: Mir, 1982. 238 p.
32. Atetkov A.V., Galkin S.V., Zarubin V.S. Metody optimizatsii: Ucheb. dlia vuzov [Optimization methods: Proc. for universities] / Pod red. V.S. Zarubina, A.P. Krishchenko. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2003. 440 p.
33. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. Theoretical-experimental method for determination of aerodynamic damping component of test samples with diamond-shaped cross-section. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 200–219. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.12