



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.02

УДК 534.16

## О СМЕШАННЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И АВТОКОЛЕБАНИЯХ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ И ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ УПРУГОСТИ

А.А. Алифов

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 23 апреля 2020 г.  
Принята: 02 сентября 2020 г.  
Опубликована: 09 ноября 2020 г.

#### Ключевые слова:

метод, нелинейность, прямая линеаризация, колебания, ограниченное возбуждение, источник энергии, мощность, упругость, стационарное движение, устойчивость, запаздывание.

### АННОТАЦИЯ

Рассматриваются смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при наличии в системе запаздывания в силе упругости. Динамической моделью является фрикционная автоколебательная система, которая хорошо описывает фрикционные автоколебания, возникающие во множестве технических систем различного назначения (металлорежущие станки, текстильное оборудование, тормоза и целый ряд других объектов машиностроения). Функционирование системы поддерживается источником энергии ограниченной мощности. Для проведения анализа использован метод прямой линеаризации, отличающийся от известных методов анализа нелинейных систем простотой применения, отсутствием трудоемких и сложных приближений различных порядков, возможностью получения конечных расчетных соотношений независимо от конкретного вида и степени нелинейности, уменьшающий затраты труда и времени на несколько порядков. С помощью этого метода получены решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающей движения системы. Выведены уравнения нестационарных и стационарных движений. Для анализа устойчивости стационарных движений составлены условия устойчивости на основе критериев Рауса – Гурвица. Проведены расчеты для получения информации о влиянии запаздывания на режимы колебаний. Показано, что запаздывание влияет как на величину амплитуды, так и на расположение в частотном диапазоне амплитудно-частотной кривой – в зависимости от величины запаздывания происходит смещение амплитудной кривой в область меньших частот. Устойчивость стационарных колебаний зависит как от характеристики источника энергии, так и от величины запаздывания. Взаимодействие колебательной системы и источника энергии приводит к появлению ряда эффектов, как при наличии, так и при отсутствии запаздывания. Однако их протекание может быть различным в зависимости от величины запаздывания.

© ПНИПУ

© Алифов Алишир Али оглы – д.т.н., г.н.с., e-mail: [a.alifov@yandex.ru](mailto:a.alifov@yandex.ru), [ID: 0000-0003-2327-068X](https://orcid.org/0000-0003-2327-068X).

Alishir A. Alifov – Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher, e-mail: [a.alifov@yandex.ru](mailto:a.alifov@yandex.ru), [ID: 0000-0003-2327-068X](https://orcid.org/0000-0003-2327-068X).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



# ABOUT MIXED FORCED, PARAMETRIC AND SELF-OSCILLATIONS BY LIMITED EXCITATION AND DELAYED ELASTICITY

A.A. Alifov

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 23 April 2020  
Accepted: 02 September 2020  
Published: 09 November 2020

### Keywords:

method, non-linearity, direct linearization, oscillations, limited excitation, the source of energy, power, elasticity, stationary movement, stability, delay.

## ABSTRACT

Mixed forced, parametric, and self-oscillations are considered if there is a delay in the elastic force in the system. A dynamic model is a friction self-oscillation system describing the frictional self-oscillations that occur in many technical systems for various purposes (metal-cutting machines, textile equipment, brakes and a number of other engineering objects). The operation of the system is supported by the energy source of limited power. For the analysis we used the method of straight linearization which is easier than the known methods of analysis of nonlinear systems, has no time-consuming and complex approximations of different orders, provides an opportunity to obtain the final design ratios regardless of the specific type and degree of nonlinearity, thus reducing labor costs and time by several orders of magnitude. By using this method, we obtained solutions of a nonlinear system of differential equations describing the system's motion. The equations of non-stationary and stationary movements are derived. To analyze the stability of stationary movements, the stability conditions based on the Routh-Hurwitz criteria are compiled. Calculations were performed to obtain information about the effect of delay on the oscillation modes. It is shown that the delay affects both the magnitude of the amplitude and the location of the amplitude-frequency curve in the frequency range depending on the magnitude of the delay, the amplitude curve is shifted to the region of lower frequencies. The stability of stationary oscillations depends both on the energy source characteristics and lag value. The interaction of the oscillating system and the energy source leads to a number of effects, both in the presence and absence of the lag. However, their course may be different depending on the lag value.

© PNRPU

## Введение

Вопросы потребления и экономии энергии вышли на передний план во всем мире. Они связаны как с истощением энергоресурсов на Земле, так и экологическими и климатическими (влиянием потребляемой энергии на изменение климата в Земном масштабе) проблемами. Решение этих проблем в настоящее время является одной из главных задач в научных исследованиях, в том числе в сфере машиностроения: проектировании и расчете различного оборудования, машин, устройств и др. Связь проблем экологии с метрологией, точностью моделей расчета систем, точностью обработки показана в работе [1].

Использование обнаруженного А. Зоммерфельдом в начале прошлого века (1902 г.) известного явления – эффекта Зоммерфельда, показывающего тесную связь динамического взаимодействия источника энергии и объекта потребления энергии, – может вносить некоторый вклад в решение этих проблем. Несмотря на то, что в течение более 50 лет проводился ряд попыток объяснения этого явления, систематическое исследование и теоретическое обоснование данного эффекта было проведено В.О. Кононенко. Им была опубликована получившая мировую известность первая основополагающая монография в этом направлении, вышедшая в 1964 г. [2] и изданная также в Англии [3]. Эти исследования привели к возникновению достаточно известного в теории колебаний нового направления под названиями «теория

колебательных систем с ограниченным возбуждением», «теория взаимодействия колебательных систем с источниками энергии», «теория колебательных систем с неидеальными источниками энергии». В дальнейшем данная теория была развита его последователями. Состояние и развитие этой теории нашло отражение в книге [4] и множестве статей широкого круга исследователей во всем мире. Как показано в [4], с увеличением колебательной нагрузки начинается сильное динамическое взаимодействие между колебательной системой и источником энергии. Кроме того, между колебаниями, следовательно, уровнем потребляемой энергии, возникающими при функционировании деталей, и точностью их обработки имеется значительная связь, что показано в [1].

В различных отраслях техники (радиотехника, цветная металлургия, производство бумаги и стекла, транспортировка, системы автоматического управления с логическими устройствами, электроника и др.) широко распространены системы с запаздыванием [5–8]. Явление запаздывания может встречаться не только в технических объектах, но и в экономике, биологии и др. Запаздывание может быть полезным или вредным, привести к возникновению колебаний в системе. Обусловленные наличием запаздывания колебания возникают в прокатных станах, регуляторах, следящих системах и др. В ряде систем, например низкочастотных, можно пренебречь влиянием запаздывания. Однако в высокочастотных системах нельзя сделать это. Запаздывание

оказывает большое влияние на процесс регулирования и устойчивость системы.

Для анализа нелинейных колебательных систем существует ряд приближенных методов нелинейной механики: усреднения, энергетического баланса, гармонической линеаризации и др. [9–19]. Из них в теории колебательных систем с ограниченным возбуждением основным является метод усреднения [9]. Использование этого метода связано со значительными трудовыми и временными затратами, что зависит от вида нелинейной характеристики. Такие затраты присущи также другим известным методам нелинейной механики. Метод прямой линеаризации (МПЛ), описанный в монографии [20] и ряде статей [21–25 и др.], принципиально отличается от этих методов. Следующие свойства МПЛ обуславливают его преимущество в сравнении с известными методами нелинейной механики: простота применения; отсутствие трудоемких и сложных приближений различных порядков; возможность получения конечных расчетных соотношений независимо от конкретного вида и степени нелинейности; на несколько порядков меньше затраты труда и времени. Сравнение ряда результатов, полученных известными методами нелинейной механики и МПЛ, содержится в [20, 24] и некоторых других работах автора. Оно показывает их *качественное* (полное) и *количественное* (в зависимости от параметра точности – от полного совпадения до нескольких процентов несовпадения) совпадение. Целью работы является рассмотрение с помощью МПЛ самого сложного класса смешанных колебаний (взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний) при наличии в системе запаздывания в упругости и ограниченной мощности источника энергии.

### 1. Модель системы и уравнения движения

Динамическая модель фрикционной автоколебательной системы представлена на рис. 1. Эта модель хорошо описывает фрикционные автоколебания, возникающие во множестве технических систем различного назначения: в направляющих металлорежущих станков, текстильном оборудовании, тормозах и целом ряде других объектов машиностроения [26–32]. Лента, на которой лежит тело  $I$  с массой  $m$ , приводится в движение двигателем с моментной характеристикой  $M(\dot{\phi})$ , где  $\dot{\phi}$  – скорость вращения ротора двигателя. Тело находится под внешними воздействиями: вынуждающей силы  $\lambda \sin v_1 t$  и параметрического возбуждения  $(c + b \cos vt)x$ . Зависящая от относительной скорости  $U = V - \dot{x}$ ,  $V = r_0 \dot{\phi}$  сила трения  $T(U)$  может обуславливать автоколебания тела  $I$ .

Уравнения движения системы имеют вид

$$m\ddot{x} + k_0 \dot{x} + c_0 x = \lambda \sin v_1 t - b x \cos vt + T(U) - f(x) - c_1 \dot{x},$$

$$I\ddot{\phi} = M(\dot{\phi}) - r_0 T(U), \quad (1)$$

где  $c_0$  – коэффициент жесткости пружины 2;  $k_0$  – коэффициент сопротивления демпфера 3;  $\tau$  – постоянный временной фактор запаздывания в силе упругости пружины;  $f(x)$  – нелинейная часть силы упругости. Величины  $m, k_0, c_0, \lambda, v_1, v, b, p, I, r_0$  являются постоянными.

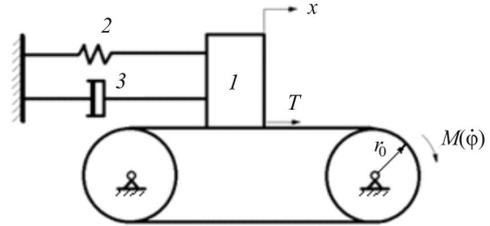


Рис. 1. Модель фрикционной автоколебательной системы

Fig. 1. The model of the friction self-oscillating system

Характеристики сил часто бывают неизвестными на практике и являются, как правило, нелинейными. При описании этих сил в большинстве случаев пользуются полиномиальными функциями, которыми и представим нелинейные силы  $F(x)$  и  $T(U)$ :

$$F(x) = \sum_s \gamma_s x^s, \quad T(U) = T_0 \left( \operatorname{sgn} U + \sum_i \delta_i U^i \right), \quad (2)$$

где  $\gamma_s = \operatorname{const}$ ,  $\delta_i = \operatorname{const}$ ,  $s = 2, 3, 4, \dots$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,  $T_0$  – нормальная сила реакции,  $\operatorname{sgn} U = 1$  при  $U > 0$  и  $\operatorname{sgn} U = -1$  при  $U < 0$ ; в случае относительного покоя, т.е.  $U = 0$ , имеет место  $-T_0 \leq T(0) \leq T_0$ .

Сумму  $\sum_i \delta_i U^i$  в выражении  $T(U)$  учтем в дальнейшем как нелинейную функцию от  $\dot{x}$ , записывая ее в форме  $f(\dot{x}) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \dot{x}^n$ , где коэффициенты  $\alpha_n$  зависят от  $V = r_0 \dot{\phi}$  и  $\delta_i$ , т.е.  $\alpha_n = \alpha_n(\dot{\phi}, \delta_i)$ .

Заметим, что сила трения  $T(U)$  на практике широко распространена в форме

$$T(U) = T_0 (\operatorname{sgn} U - \delta_1 U + \delta_3 U^3), \quad (3)$$

где  $\delta_1, \delta_3$  – положительные постоянные.

Форма (3) силы трения наблюдалась также при рассмотрении проблемы измерения сил трения в космических условиях [33].

### 2. Решение по методу прямой линеаризации

Функции  $F(x)$  и  $f(\dot{x})$  по методу прямой линеаризации [20] можно заменить линейными функциями

$$F_*(x) = B_F + k_F x; \quad f_*(\dot{x}) = B_f + k_f \dot{x}, \quad (4)$$

где  $B_F, k_F, B_f$  и  $k_f$  – коэффициенты линеаризации, определяемые выражениями

$$\begin{aligned}
 B_F &= \sum_s \gamma_s N_s a^s \text{ при } s = 2, 4, 6, \dots (s - \text{четное}); \\
 k_F &= \sum_s \gamma_s \bar{N}_s a^{s-1} \text{ при } s = 3, 5, 7, \dots (s - \text{нечетное}); \\
 B_f &= \sum_n \alpha_n N_n v^n \text{ при } n = 0, 2, 4, \dots (n - \text{четное}); \\
 k_f &= \sum_n \alpha_n \bar{N}_n v^{n-1} \text{ при } n = 1, 3, 5, \dots (n - \text{нечетное}).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь  $a = \max|x|$ ,  $v = \max|\dot{x}|$ ,  $N_s = (2r+1)/(2r+1+s)$ ,  $\bar{N}_s = (2r+3)/(2r+2+s)$ ,  $N_n = (2r+1)/(2r+1+n)$ ,  $\bar{N}_n = (2r+3)/(2r+2+n)$ ,  $r$  – параметр точности линеаризации. Независимо от величины  $r$ , имеют место  $N_s = 1$ ,  $N_n = 1$  для  $s = n = 0$  и  $\bar{N}_s = 1$ ,  $\bar{N}_n = 1$  для  $s = n = 1$ . Как показано в [20], хотя интервал выбора величины  $r$  не ограничен, ее можно выбрать в промежутке (0, 2). В таблице приведено сравнение результатов по методу прямой линеаризации и методу усреднения для различных значений степени  $n$  переменной в полиномиальной функции. Из таблицы видна достаточная близость чисел по этим методам.

Уравнения (1) с учетом (4) принимают вид

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + k\dot{x} + cx &= B + T_0 \operatorname{sgn} U + \lambda \sin vt - bx \cos vt - c_1 x_\tau, \\
 I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 T_0 (\operatorname{sgn} U + B_f + k_f \dot{x}),
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где  $B = T_0 B_f - B_F$ ,  $k = k_0 - T_0 k_f$ ,  $c = c_0 + k_F$ .

Сравнение результатов по методам прямой линеаризации и усреднения

Comparison of results using direct linearization and averaging methods

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$N_n, r = 0,65$	1		0,53		0,365		0,277	
Метод усреднения	1		0,50		0,375		0,312	
$\bar{N}_n, r = 1,85$		1		0,77		0,626		0,5275
Метод усреднения		1		0,75		0,625		0,5468

В системе (1) могут возникать различного вида колебательные процессы, в том числе резонансные. Поскольку на практике главный интерес представляют основные резонансы, возникающие при малых расстройках частот, когда  $\omega \approx v_1$  и  $\omega \approx v/2$ , то рассмотрим решения (6) для них. Решения уравнений (6) будем строить методом замены переменных с усреднением [20] и применением описанной в [23–25] процедуры для расчета взаимодействия колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности. Отметим, что, как показано в [4], характеры решений для  $x$  и  $\dot{x}$  при  $U > 0$  и  $U < 0$  принципиально различны. В соответствии с этим рассмотрим отдельно случаи  $u \geq a\omega_0$  и  $u < a\omega_0$ ,

вводя  $u = r_0 \Omega$ ,  $\omega_0^2 = c_0/m$ . Эти решения для определения нестационарных значений амплитуды  $a$ , фазы  $\xi$  колебаний и скорости источника энергии  $\Omega$  на основе  $x = a \cos \psi$ ,  $\dot{\phi} = \Omega$ ,  $\psi = pt + \xi$ ,  $v = 2p$  следующие:

а)  $u \geq a\omega_0$

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -\frac{a(k_0 - T_0 k_f)}{2m} - \frac{\lambda}{2mp} \cos \xi + \frac{ba}{4mp} \sin 2\xi + \frac{c_1 a}{2mp} \sin p\tau, \\
 \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - p^2}{2p} + \frac{k_F}{2mp} + \frac{\lambda}{2ma p} \sin \xi + \\
 &+ \frac{b}{4mp} \cos 2\xi + \frac{c_1}{2mp} \cos p\tau,
 \end{aligned}
 \tag{7, a}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{J} \left[ M \left( \frac{u}{r_0} \right) - r_0 T_0 (1 + B_f) \right];$$

б)  $u < a\omega_0$

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -\frac{a}{2m} \left[ (k_0 - T_0 k_f) + \frac{4T_0}{\pi a^2 p^2} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} \right] - \\
 &- \frac{\lambda}{2mp} \cos \xi + \frac{ba}{4mp} \sin 2\xi + \frac{c_1 a}{2mp} \sin p\tau, \\
 \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - p^2}{2p} + \frac{k_F}{2mp} + \frac{\lambda}{2ma p} \sin \xi + \\
 &+ \frac{b}{4mp} \cos 2\xi + \frac{c_1}{2mp} \cos p\tau,
 \end{aligned}
 \tag{7, б}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{J} \left[ M \left( \frac{u}{r_0} \right) - r_0 T_0 (1 + B_f) - \frac{r_0 T_0}{\pi} (3\pi - 2\psi_*) \right],$$

где  $u = r_0 \Omega$ ,  $\psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap)$ .

Поскольку в области резонанса  $\omega_0 \approx p$ , можно принять  $(\omega_0^2 - p^2)/2p \approx \omega_0 - p$ .

Из уравнений (7) при  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$ ,  $\dot{u} = 0$  следуют уравнения стационарных движений, из которых имеем следующие соотношения для определения амплитуды и фазы колебаний:

$$\begin{aligned}
 (a^2 E - 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2 (\lambda^2 + 2bDa^2) &= 0, \\
 \operatorname{tg} \xi &= R(baR - \lambda)/aA,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= p(k_0 - T_0 k_f) - c_1 \sin p\tau, \\
 B &= m(\omega_0^2 - p^2) + k_F + c_1 \cos p\tau, \\
 D &= b + 2B, \quad E = 4A^2 + D^2 - 2bD, \\
 R &= (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2ba^2(b + 2B)})/2ab.
 \end{aligned}$$

Амплитуда стационарных колебаний при  $u < a\omega_0$  определяется выражением  $a\omega \approx u$ . Третье уравнение (7)

доставляет выражение для определения нагрузки  $S(u)$  на источник энергии. В случае  $u \geq a\omega_0$  оно имеет вид

$$S(u) = r_0 T_0 (1 + B_f).$$

Стационарные значения скорости  $u$  определяются уравнением

$$M(u/r_0) - S(u) = 0 \tag{8}$$

или точкой пересечения кривых  $M(u/r_0)$  и  $S(u)$ .

В случае  $u < a\omega_0$  имеет место уравнение вида (8) с учетом  $a\omega \approx u$  в выражении  $S(u)$ .

### 3. Условия устойчивости стационарных движений

Для анализа устойчивости стационарных движений составляем уравнения в вариациях для (7) и пользуемся критериями Рауса – Гурвица. В результате имеем следующие условия устойчивости стационарных колебаний:

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1 D_2 - D_3 > 0, \tag{9}$$

где  $D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$ ,  $D_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}$ ,  $D_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{22}b_{33}$ .

В случае  $u \geq ar$  имеем

$$b_{11} = \frac{r_0}{J} \left( Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_f}{\partial u} \right), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{J} \frac{\partial B_f}{\partial a}, \quad b_{21} = \frac{a T_0}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u},$$

$$b_{22} = -\frac{1}{2m} \left( k_0 - T_0 k_f - a T_0 \frac{\partial k_f}{\partial a} \right) + \frac{b}{4mp} \sin 2\xi + \frac{c_1}{2mp} \sin p\tau,$$

$$b_{23} = \frac{1}{2mp} (\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi),$$

$$b_{32} = \frac{1}{2mp} \left( \frac{\partial k_f}{\partial a} - \frac{\lambda}{a^2} \sin \xi \right),$$

$$b_{33} = \frac{1}{2map} (\lambda \cos \xi - ab \sin 2\xi).$$

$$\tag{10, a}$$

В случае  $u < ar$  изменяются лишь коэффициенты

$$b_{11} = \frac{r_0}{J} \left[ Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_f}{\partial u} - \frac{2r_0 T_0}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{J} \left[ \frac{\partial B_f}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{21} = \frac{a T_0}{2m} \left[ \frac{\partial k_f}{\partial u} + \frac{4u}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \tag{10, б}$$

$$b_{22} = -\frac{1}{2m} \left( k_0 - T_0 k_f - a T_0 \frac{\partial k_f}{\partial a} + \frac{4T_0 u^2}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right) + \frac{b}{4mp} \sin 2\xi + \frac{c_1}{2mp} \sin p\tau,$$

где  $Q = \frac{d}{du} M\left(\frac{u}{r}\right)$ .

### 4. Пример расчета

Для получения информации о влиянии запаздывания на систему были проведены расчеты с использованием параметров:  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $m = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $b = 0,07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\lambda = 0,02 \text{ кгс}$ ,  $c_1 = 0,05 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $k = 0,02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$ . При расчетах использована характеристика трения в форме (3), где  $T_0 = 0,5 \text{ кгс}$ ,  $\delta_1 = 0,84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\delta_3 = 0,18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$ .

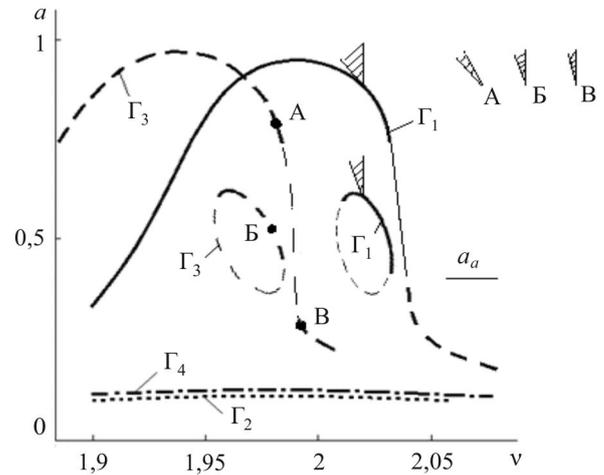


Рис. 2. Зависимости амплитуды от частоты

Fig. 2. Dependences of the amplitude on the frequency

Зависимости амплитуды от частоты  $a(v)$ , показанные на рис. 2, получены для скорости  $u = 1,2$  в случае линейной характеристики силы упругости. Расчеты проводились при параметре точности линеаризации  $r = 1,5$  и соответственно  $\bar{N}_3 = 3/4$ . Сплошная кривая  $\Gamma_1$  соответствует значению запаздывания  $\tau = 0$ , двухпунктирная кривая  $\Gamma_2 - 0,5v\tau = \pi/2$ , штриховая кривая  $\Gamma_3 - 0,5v\tau = \pi$ , штрихпунктирная кривая  $\Gamma_4 - 0,5v\tau = 3\pi/2$ . Амплитуда автоколебаний при  $\tau = 0$  обозначена как  $a_a$ . Как видно, амплитудная кривая при  $0,5v\tau = \pi$  незначительно отличается по характеру и численно от кривой при  $\tau = 0$ , но смещена влево – в область меньших частот. А в случаях  $0,5v\tau = \pi/2$  и  $0,5v\tau = 3\pi/2$  запаздывание сильно влияет на амплитуду – уменьшает ее, особенно при частоте  $v = 2$  и достаточно близких к ней частотах. Тонкими штриховыми

линиями на кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  показаны неустойчивые участки. Колебания устойчивы, если крутизна  $Q$  характеристики источника энергии находится в пределах заштрихованного сектора. Неустойчивый при идеальном источнике энергии и устойчивый (слабо) при неидеальном источнике участок кривой  $\Gamma_1$  показан тонкой линией. Для кривой  $\Gamma_3$  на участке между точками  $A$  и  $B$  тонкая штриховая линия соответствует неустойчивым колебаниям как при идеальном, так и при неидеальном источнике энергии.

При наличии запаздывания в системе происходят такие же эффекты, как и при его отсутствии. Поскольку результаты анализа системы (1) и целый ряд эффектов при отсутствии запаздывания подробно описаны в [4], останавливаться на этом не будем. Заметим лишь то, что появление этих эффектов сильно зависит от свойств источника энергии.

## Библиографический список

1. Alifov A.A. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // “Ölçmə və keyfiyyət: problemlər, perspektivlər” mövzusunda Beynəlxalq Elmi-texniki konfransın materialları. – AzTU, Bakı, Azərbaycan, 21–23 noyabr 2018. – P. 289–293.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 236 с.
3. Kononenko V.O. Vibrating Systems with Limited Power-Supply. – London: Iliffe Books, 1969.
4. Alifov A.A., Frolov K.V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. – New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990, 327 p.
5. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 288.
6. Zhou B. Input delay compensation of linear systems with both state and input delays by adding integrators // Systems and Control Letters. – 2015. – Vol. 82. – P. 51–63.
7. Vunder N.A., Ushakov A.V. Sensitivity analysis of systems with a cascade compensator embedded in a Smith predictor to dead-time variation // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2016. – Vol. 52, no. 3. – P. 274–279.
8. Padhan D.G., Reddy B.R. A new tuning rule of cascade control scheme for processes with time delay // In Conference on Power, Control, Communication and Computational Technologies for Sustainable Growth. – 2015. – P. 102–105.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
10. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. / ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. – М.: Машиностроение, 1979 – 351 с.
11. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
12. Tondl A. On the interaction between self-excited and parametric vibrations. Monographs and Memoranda, No. 25. – Prague: National Research Institute for Machine Design, 1978. 127 p.
13. Основы теории колебаний: учеб. руководство / В.В. Мигулин, В.И. Медведев, Е.Р. Мустель, В.Н. Парыгин; под ред. В.В. Мигулина. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 392 с.
14. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. – 432 с.
15. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
16. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 384 с.
17. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 568 с.
18. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
19. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 320 с.
20. Алифов А.А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015. – 74 с.
21. Alifov A.A. Method of the Direct Linearization of Mixed Nonlinearities // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2017. – Vol. 46, no. 2. – P. 128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
22. Alifov A.A., Farzaliev M.G., Dzhafarov Je.N. Dynamics of a Self-Oscillatory System with an Energy Source // Russian Engineering Research. – 2018. – Vol. 38, no. 4. – P. 260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
23. Alifov A.A. On the Calculation by the Method of Direct Linearization of Mixed Oscillations in a System with Limited Power-Supply // Advances in Computer Science for Engineering and Education II. ICCSEE 2019 / Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2020. – Vol. 938. – P. 23–31. Eds. Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. – Springer, Cham. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-16621-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-16621-2_3)
24. Alifov A.A. About Direct Linearization Methods for Nonlinearity // Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III. AIMEE 2019 / Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2020. – Vol. 1126. – P.105–114. Eds. Hu Z., Petoukhov S., He M. – Springer, Cham. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1_10)
25. Alifov A.A. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources // Proceedings of the second international symposium of mechanism and machine science (ISMMS – 2017). – Baku, Azerbaijan, Sep. 11–14, 2017. – P. 218–221.

26. Климов Д.М. Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Изв. РАН, МТТ. – 2003. – № 3. – С. 6–12.
27. Фролов К.В. Избранные труды: в 2 т. – М.: Наука, 2007.
28. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение. 1976. – 320 с.
29. Абдиев Ф.К. Автоколебания системы с запаздыванием и с неидеальным источником энергии // Изв. АН АзССР. Серия физико-технических и математических наук. – 1983. – № 4. – С. 134–139.
30. Рубаник В.П., Старик Л.К. Об устойчивости автоколебаний резца в случае неидеального источника энергии //

- Научные труды вузов Лит. ССР. Вибротехника. – 1971. – № 2 (11). – С. 205–212.
31. Мурашкин Л.С., Мурашкин С.Л. Прикладная нелинейная механика станков. – Л.: Машиностроение, 1977. – 192 с.
32. Поперечные автоколебания силовых столов, вызванные силами трения / А.С. Пономарев [и др.] // Вестник Харьковского политех. ин-та. Машиностроение. – 1977. – № 130, вып. 8. – С. 67–69.
33. Броневец М.А., Журавлев В.Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Изв. РАН, МТТ. – 2012. – № 3. – С. 3–11.

## References

1. A.A. Alifov. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation. AzTU, Bakı, Azərbaycan, “*Ölçmə və keyfiyyət: problemlər, perspektivlər*” mövzusunda Beynəlxalq Elmi-texniki konfransın materialları, 21-23 noyabr 2018, pp. 289-293.
2. Kononenko V.O. Kolebatel'nye sistemy s ogranichennym vzbuzhdeniem [Vibrational systems with limited excitation]. *Moscow, Nauka*, 1964, 236 p.
3. V.O. Kononenko. Vibrating Systems with Limited Power-Supply. *London, Iliffe Books*, 1969.
4. Alifov A.A., Frolov K.V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. *New York, Washington, Philadelphia, London, Hemisphere Publishing Corporation*, 1990, 327 p.
5. Rubanik V.P. Kolebaniya kvazilineynykh sistem s zapazdyvaniyem [Oscillations of Quasilinear Systems with Time Lag]. *Moscow, Nauka*, 1969, 288 p.
6. Zhou B. Input delay compensation of linear systems with both state and input delays by adding integrators. *Systems and Control Letters*. 2015. vol. 82. pp. 51–63.
7. Vunder N.A., Ushakov A.V. Sensitivity analysis of systems with a cascade compensator embedded in a Smith predictor to dead-time variation. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2016. vol. 52. no. 3. pp. 274-279.
8. Padhan D.G., Reddy B.R. A new tuning rule of cascade control scheme for processes with time delay. *In Conference on Power, Control, Communication and Computational Technologies for Sustainable Growth*. 2015, pp. 102-105.
9. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebany [Asymptotic Methods in Theory of Nonlinear Oscillations]. *Moscow, Nauka*, 1974, 504 p.
10. Vibratsii v tekhnike [Vibrations in the technique]. *Moscow, Mashinostroyeniye*, 1979, Vol. 5, 351 p.
11. Zhuravlyov V.F., Klimov D.M. Prikladnye metody v teorii kolebany [Applied Methods in the Theory of Oscillations]. *Moscow, Nauka*, 1988, 328 p.
12. Tondl A. On the interaction between self-excited and parametric vibrations. *Monographs and Memoranda, No. 25, Prague, National Research Institute for Machine Design*, 1978, 127 p.
13. Osnovy teorii kolebany: Ucheb. Rukovodstvo [Fundamentals of the theory of oscillations: a tutorial] / V.V. Migulin, V.I. Medvedev, Ye.R. Mustel, V.N. Parygin; Pod red. V.V. Migulina. – 2-e izd., pererab. *Moscow, Nauka*, 1988, 392 p.
14. Khayasi T. Nelineynye kolebaniya v fizicheskikh sistemakh [Nonlinear oscillations in physical systems]. *Moscow, Mir*, 1968, 432 p.
15. Moiseyev N.N. Asimptoticheskiye metody nelineynoy mekhaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics]. *Moscow, Nauka*, 1981, 400 p.
16. Butenin N.V., Neymark Yu.I., Fufayev N.A. Vvedeniye v teoriyu nelineynykh kolebany [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. *Moscow, Nauka*, 1976, 384 p.
17. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E. Teoriya kolebany [Oscillation theory]. *Moscow, Nauka*, 1981, 568 p.
18. Biderman V.L. Teoriya mekhanicheskikh kolebany: Uchebnik dlya vuzov [Theory of Mechanical Oscillations: A Textbook for High Schools]. *Moscow, Vyssh. Shkola*, 1980, 408 p.
19. Veretennikov V.G. Ustoychivost i kolebaniya nelineynykh sistem [Stability and oscillations of nonlinear systems]. *Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.*, 1984. 320 p.
20. Alifov A.A. Metody prjamoj linearizacii dlja rascheta nelineynykh sistem [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems]. *Moscow-Izhevsk, NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika»*, 2015, 74 p.
21. A.A. Alifov. Method of the Direct Linearization of Mixed Nonlinearities. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 2. pp. 128-131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
22. Alifov A.A., Farzaliev M.G., Dzhafarov Je.N. Dynamics of a Self-Oscillatory System with an Energy Source. *Russian Engineering Research*, 2018, vol. 38, no. 4. pp. 260-262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
23. Alifov A.A. On the Calculation by the Method of Direct Linearization of Mixed Oscillations in a System with Limited Power-Supply. *Advances in Computer Science for Engineering and Education II. ICCSEE 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 938 / Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds). Springer, Cham. pp.23-31. DOI: 10.1007/978-3-030-16621-2\_3.
24. Alifov A.A. About Direct Linearization Methods for Nonlinearity. In: *Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III. AIMEE 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 1126 / Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds). Springer, Cham. pp.105-114. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1_10).
25. Alifov A.A. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. Baku, *Proceedings of the second international symposium of mechanism and machine science (ISMMS – 2017)*, 2017, 11-14, pp. 218-221.
26. Klimov D.M. Ob odnom vide avtokolebany v sisteme s sukhim treniyem [On one Type of Self-Excited Vibrations in a System with Dry Friction]. *Izv. RAN. MTT*. 2003 no. 3. pp. 6-12.
27. Frolov K.V. Izbrannye trudy [Selected Works]: in 2 volumes. *Moscow, Nauka*, 2007.
28. Panovko Ya.G. Osnovy prikladnoy teorii kolebany i udara [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. *Leningrad, Mashinostroyeniye*, 1976, 320 p.

29. Abdiyev F.K. Avtokolebaniya sistemy s zapazdyvaniyem i s neidealnym istochnikom energii [Delayed Self-Oscillations of a System with a non-ideal Energy Source]. *Izv. AN AzSSR. Seriya fiziko-tehnicheskikh i matematicheskikh nauk*, 1983, no. 4. pp. 134-139.

30. Rubanik V.P., Starik L.K. Ob ustoychivosti avtokolebany reztsa v sluchaye neidealnogo istochnika energii [On the Stability of Self-oscillation of a Cutter in the Case of an non-ideal Energy Source]. *Nauchnye trudy vuzov Lit. SSR. Vibrotehnika*. 1971, no. 2 (11). pp. 205-212.

31. Murashkin L.S., Murashkin S.L. Prikladnaya nelineynaya mekhanika stankov [Applied Nonlinear Mechanics of Machine Tools]. *Leningrad, Mashinostroyeniye*, 1977, 192 p.

32. Ponomarev A.S. i dr. Poperechnye avtokolebaniya silovykh stolov, vyzvannye silami treniya [Transverse self-oscillations of power tables caused by friction forces] // *Vestnik Kharkovskogo politekhn. in-ta. Mashinostroyeniye*. 1977, no. 130 (8). pp. 67-69.

33. Bronovets M.A., Zhuravlyov V.F. Ob avtokolebaniyakh v sistemakh izmereniya sil treniya [On Self-Excited Vibrations in Friction Force Measurement Systems]. *Izv. RAN, MTT*, 2012, no. 3. pp. 3-11.