



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.08

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО НАГРУЖЕНИЯ

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
Самара, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 23 апреля 2020 г.
Принята: 29 сентября 2020 г.
Опубликована: 09 ноября 2020 г.

Ключевые слова:

трещина в идеально пластическом материале, статически определяемая задача, секториальное решение, степенной закон деформационной теории пластичности, смешанное деформирование, параметр смешанности нагружения, аналитическое решение, асимптотическое решение.

АННОТАЦИЯ

В статье представлены асимптотические поля напряжений у вершины трещины в идеально пластическом материале в условиях смешанного деформирования для плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Цель исследования обусловлена необходимостью построения аналитического представления поля напряжений в окрестности вершины трещины для всего диапазона значений параметра смешанности нагружения, характеризующего тип смешанного деформирования. Вид смешанного деформирования задается параметром смешанности нагружения, изменяющимся от нуля, что соответствует поперечному сдвигу, до единицы, что отвечает нормальному отрыву. Решение статически определенной задачи отыскания поля напряжений у вершины трещины получено методом разложения по собственным функциям. Найдены распределения напряжений в полном диапазоне смешанных форм нагружения от нормального отрыва до поперечного сдвига. Показано, что решение описывается различными функциональными зависимостями в разных секторах (в семи секторах – при нагружениях, близких к поперечному сдвигу, в шести – для значений параметра смешанности от 0,33 до 0,89, и в пяти секторах – при нагружениях, отвечающих значениям параметра смешанности нагружения, больших 0,89 для плоского деформированного состояния; в семи – от 0 до 0,39, пяти – от 0,39 до 1 для плоского напряженного состояния). Интересной характерной чертой полученного асимптотического решения является наличие диапазона значения параметра смешанности нагружения (от 0,89 до 1) для плоского деформированного состояния, при котором решение имеет вид распределения напряжений при нормальном отрыве. Следовательно, для плоского деформированного состояния существует такой диапазон значений параметра смешанности нагружения, при котором асимптотическое решение описывается соотношениями, не зависящими от значения параметра смешанности нагружения из этого диапазона, и соответствует чистому нормальному отрыву. В случае плоского напряженного состояния такой диапазон отсутствует и решение отражает любое значение параметра смешанности нагружения. Полученное асимптотическое решение задачи может рассматриваться как предельное решение для материала, следующего степенному закону деформационной теории пластичности или степенному закону Бейли – Нортон.

© ПНИПУ

© Степанова Лариса Валентиновна – д.ф.-м.н., проф., e-mail: stepanova.lv@ssau.ru, [ID: 0000-0002-6693-3132](https://orcid.org/0000-0002-6693-3132)

Stepanova L.V. – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
e-mail: stepanova.lv@ssau.ru, [ID: 0000-0002-6693-3132](https://orcid.org/0000-0002-6693-3132)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



ASYMPTOTIC STRESS FIELDS IN THE VICINITY OF THE CRACK IN PERFECTLY PLASTIC SOLIDS UNDER MIXED MODE LOADING

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 23 April 2020
Accepted: 29 September 2020
Published: 09 November 2020

Keywords:

crack in perfect plastic materials, sectorial solution, statically determinate problem, power law hardening material, mixity parameter, analytical solution, asymptotic solution.

ABSTRACT

In the paper presents the asymptotic stress fields in the vicinity of the crack tip in perfectly plastic Mises materials under mixed mode loading for a full range of the mode mixities. This objective is engendered by the necessity of considering all the values of the mixity parameter for the full range of the mode mixities both for plane strain and plane stress conditions to grasp stress tensor components behaviour in the vicinity of the crack tip as the mixity parameter is changing from 0 to 1. To gain a better understanding of the stress distributions, all values of the mixity parameter within 0.1 were considered and analyzed. The asymptotic solution to the statically determinate problem is obtained using the eigenfunction expansion method. Steady – state stress distributions for the full range of the mode mixities are found. The type of the mixed mode loading is controlled by the mixity parameter changing from zero for pure mode II loading to 1 for pure mode I loading. It is shown that the analytical solution is described by different relations in different sectors, the value of which is changing from 7 sectors to 5 sectors. At loadings close to pure mode II, seven sectors determine the solution whereas six and five sectors define the solution for the mixity parameter higher 0.33 and less than 0.89 and higher 0.89 respectively for plane strain conditions and seven sectors determine the asymptotic solution for the mixity parameter less than 0.39, while five sectors determine the solution for other values of the mixity parameter for plane stress conditions. The number of sectors depends on the mixity parameter. The angular stress distributions are not fully continuous and radial stresses are discontinuous for some values of the mixity parameter. It is interesting to note that the characteristic feature of the asymptotic solution obtained is the presence of a segment of values of the mixity parameter for which the solution does not depend on the mixity parameter (the solution does not depend on the mixity parameter for the mixity parameter from 0.89 to 1 and the solution coincides with the solution for mode I crack in perfect plastic materials for plane strain conditions). Thus, the salient point of the study is that the asymptotic solution is described by the same formulae for all values of the mixity parameter from 0.89 to 1 for plane strain. For plane stress conditions this segment can't be observed. The solution in each sector corresponds to the certain value of the mixity parameter. The obtained solutions for plane strain and plane stress conditions can be considered as the limit solution for power law hardening materials and creeping power law materials.

© PNRPU

Введение

Несмотря на то, что изучение полей напряжений у вершины трещины в идеально пластическом материале восходит к работам Прандтля [1] и является классической проблемой механики упругопластического разрушения, вопросы определения напряженно-деформированного состояния в жестко идеально пластическом и упругом идеально пластическом материале продолжают вызывать интерес в научном сообществе, особенно в связи с необходимостью математического описания полей напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения в материалах с нелинейными определяющими уравнениями [2–14]. Результаты исследований [2–14], полученные в самое последнее время и касающиеся более точного и аккуратного описания напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины в упругопластических материалах, опираются на теоретические, экспериментальные и численные решения, ставшие уже классическими результатами нелинейной механики разрушения [15–23]. Например, в статье [2], где исследуется возможность распространения имеющихся асимптотических решений двумерных задач для идеально пластического материала на

трехмерный случай, дано обобщение решений плоских задач механики трещин для упругопластического материала на случай пространственных проблем.

В [3] авторы отмечают, что многочисленные исследования показали существенное значение стесненной деформации в вершине трещины при изучении распространения трещины в рамках механики упругопластического разрушения и что влияние стесненности деформации (влияние геометрии нагружаемого образца и условий нагружения) подробно изучено в основном для задач чистого отрыва. Очень мало работ посвящено рассмотрению влияния стесненности деформации в вершине трещины на разрушение типа II или смешанного типа I/II в металлических материалах. Поэтому в [3] проведено численное исследование параметра стесненности деформации при сдвиговом нагружении для образца в условиях чистого сдвига. С помощью метода конечных элементов проведено моделирование образца, находящегося в условиях чистого сдвига, а также изучен диапазон допустимых значений параметра стесненности сдвиговой деформации.

В [4] получены оценки областей пластического течения вблизи краевых надрезов в условиях смешанного нагружения, полученные с помощью метода конечных

элементов. Продемонстрирована геометрия пластических зон у вершины надрезов вдоль фронта трещины по толщине образца в трехмерной постановке упругопластической задачи.

В [5] в качестве основного метода исследования полей напряжений и перемещений у вершины трещины используются методы асимптотического анализа и синтеза, являющиеся классическими, стандартными методами анализа напряженно-деформированного состояния у вершины трещины, активно применяющимися в настоящее время для материалов с нелинейными определяющими уравнениями [7, 24–29].

В [6] представлен анализ процесса гибки металлического листа с возможностью образования трещин на поверхности. Для прогнозирования разрушения получено решение задачи гибки листа в условиях плоского деформированного состояния методом графического построения линий скольжения в идеально пластическом материале. В [7] приводится математическая постановка задачи о центральной трещине в пластине из упрочняющегося упругопластического материала в условиях плоского деформированного состояния. Получено численно-аналитическое решение задачи с использованием методов асимптотического анализа. В работе предлагается методика определения коэффициента нелинейности, характеризующего нелинейность диаграммы деформирования упругопластического материала.

В [8] дана экспериментальная оценка области пластического течения в условиях усталостного нагружения. Авторы [8] с помощью метода корреляции цифровых изображений и его комбинации с конечно-элементным анализом получили конфигурации области пластического течения у вершины усталостной трещины для различных режимов: от маломасштабного пластического течения до развитых пластических деформаций. Работа [9] также посвящена усталостному росту трещины, однако рассматривается смешанное нагружение и используется сканирующий электронный микроскоп для экспериментального определения направления роста трещины в условиях смешанного нагружения. В [10] обсуждаются экспериментальные методики определения зон пластического течения у вершины трещины.

В [11] авторы используют пластический коэффициент интенсивности напряжений для установления связи между двухосностью нагружения, свойствами материала и условиями пластического течения: от маломасштабного до развитого пластического течения в окрестности вершины трещины. Работа [12] посвящена теоретическому изучению параметров тесненности и их влияния на конфигурацию областей пластического течения у вершины трещины. В статье предложены новые параметры, эффективно описывающие пластические зоны у вершин трещин нормального отрыва и поперечного сдвига. Показано, что эти параметры хорошо описывают пластическую зону как в условиях маломасштабного пластического течения, так и в условиях умеренного пластического течения.

Авторы статей [13, 14] с помощью методов асимптотического анализа построили поля напряжений у вершины трещины вблизи трещины в условиях смешанного нагружения и V-образного выреза для степенного закона Бейли – Нортон теории установившейся ползучести. В [13, 14] основным методом исследования является метод разложения по собственным функциям, приводящий к нелинейным задачам на собственные значения. В случае трещины и V-образного выреза в материале со степенным законом Бейли – Нортон теории установившейся ползучести в условиях смешанного нагружения нелинейные задачи на собственные значения решаются численно с помощью метода многопараметрической пристрелки, результаты которого требуют дополнительной проверки и обоснования. Хорошо известно, что в предельном случае, когда показатель нелинейности в степенных определяющих уравнениях увеличивается, поведение материала приближается к поведению идеально пластического материала. Поэтому представляется важным иметь аналитические выражения для компонент тензора напряжений в предельном случае идеально пластического материала в условиях смешанного нагружения, чему и посвящена настоящая работа.

Первыми работами, в которых были исследованы асимптотические механические поля вблизи вершины трещины в упрочняющемся по степенному закону материале при смешанном деформировании и получены аналитические представления для поля напряжений в окрестности вершины трещины в идеально пластическом материале в условиях смешанного нагружения, являются работы Ши [15, 16]. В [15] был впервые введен параметр смешанности нагружения, характеризующий вид смешанного нагружения,

$$M^p = \frac{2}{\pi} \arctg \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right], \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}(r, \theta)$ – компоненты тензора напряжений в полярной системе координат r, θ с полюсом в вершине трещины.

Ши [16] впервые получил асимптотические поля напряжений у вершины трещины при смешанном нагружении и угловые распределения компонент тензора напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения для степенного закона упрочнения для плоского деформированного состояния и рассмотрел предельный случай идеально пластического материала, для которого приведены аналитические выражения поля напряжений для четырех значений параметра смешанности нагружения $M^p = 0, 0; 54, 0; 84, 1$. Таким образом, в работе [16] рассмотрены два значения параметра смешанности нагружения, соответствующие чистому поперечному сдвигу и чистому нормальному отрыву, и два значения параметра смешанности нагружения, отвечающие непосредственно смешанному нагружению.

Для значения показателя упрочнения $n = 13$ приведено сравнение угловых распределений компонент тензора напряжений, построенных численно, с аналитическим решением, найденным для идеально пластического материала. Сравнение показывает их хорошее совпадение. Дальнейшее изучение поля напряжений у вершины трещины в идеально пластическом теле шло по двум направлениям: 1) построение поля напряжений для всего диапазона значений параметра смешанности нагружений и 2) устранение скачка радиальной компоненты тензора напряжений и построение непрерывного поля напряжений в окрестности вершины трещины, что достигается за счет введения упругих секторов в окрестности вершины трещины. Так, одной из классических работ в построении асимптотических полей напряжений в окрестности вершины трещины в упругом идеально пластическом материале стало исследование [17], где построено асимптотическое решение статически определимой задачи для поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения в предположении реализации плоского деформированного состояния. Авторы показали, что асимптотическое решение хорошо согласуется с конечно-элементным решением для целого ряда значений параметра смешанности нагружения. В работе [17] подробно рассмотрены четыре значения параметра смешанности нагружения $M^p = 0,16; 0,54; 0,7; 0,84$ для нагрузок, при которых область пластического течения охватывает не всю окрестность вершины трещины и имеются упругие секторы в окрестности вершины трещины. С помощью двух допущений: 1) об ограниченности поля напряжений и 2) о непрерывности всех компонент тензора напряжений – авторам удалось построить асимптотическое решение задачи для трех указанных значений параметра смешанности нагружения. Несмотря на приведенный детальный анализ секторов, формирующих поле напряжений, в статье [17] не получено решение для всех значений параметра смешанности нагружения. Кроме того, при более высоких нагрузках пластическая область может охватывать всю окрестность вершины трещины (без упругих секторов) [18], а для таких смешанных нагружений асимптотические решения, по всей видимости, отсутствуют.

Проблема построения аналитических решений для поля напряжений вызывает интерес и в настоящее время [2, 12, 14, 17]. Так, в [19] проанализированы асимптотические поля напряжений у вершины стационарной трещины отрыва в условиях плоского деформированного состояния в несжимаемом материале. Предложено 5-секторное решение, включающее в себя в качестве частных случаев решения, полученные в [20, 21].

К построению поля напряжений у вершины трещины в упругом идеально пластическом материале при смешанном нагружении в условиях плоского напряженного состояния позже обращались и другие исследователи [22]. В [22] построено непрерывное поле на-

пряжений в окрестности вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния с использованием упругих секторов вблизи вершины трещины. Таким образом, можно заключить, что свойственное отсутствие непрерывности радиального напряжения в решении для идеально пластического материала снимается путем введения упругих зон в окрестности вершины трещины. Тем не менее решение для идеально пластического материала представляет собой предельное решение для полей напряжений Хатчинсона – Райса – Розенгрена [23–25] в окрестности вершины трещины в упрочняющемся по степенному закону материале. При построении угловых распределений компонент тензора напряжений в упрочняющихся по степенному закону материалах и в материалах, следующих степенному закону ползучести Бейли – Нортон, очень важным оказывается знание закономерностей угловых распределений компонент тензора напряжений для смешанного деформирования [14, 26–32]. Мотивом настоящего исследования послужило отсутствие аналитических представлений для компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины в идеально пластическом материале в полном диапазоне смешанных форм нагружения от чистого поперечного сдвига до чистого нормального отрыва и анализ угловых распределений напряжений для различных значений параметра смешанности нагружения. Поэтому целью настоящей работы является асимптотический анализ поля напряжений в окрестности вершины трещины в идеально пластическом материале в условиях смешанного нагружения в предположении реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния без предположения существования упругих зон в окрестности вершины.

1. Математическая постановка задачи и основные уравнения

Определение напряженного состояния в окрестности вершины трещины в идеально пластическом материале приводит к необходимости решения следующей системы уравнений:

– уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

– условия пластического течения

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2 &= 4k^2, \\ \sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{r\theta}^2 &= 3k^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k = \sigma_y / \sqrt{3}$, σ_y – предел текучести при растяжении для плоского деформированного и плоского напряженного состояния соответственно.

Граничные условия задачи есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (4)$$

Вид смешанного нагружения характеризуется значением параметра смешанности нагружения M^p (1). Заданное значение параметра смешанности нагружения замыкает математическую постановку задачи.

2. Асимптотическое решение задачи. Плоское деформированное состояние

Распределение напряжений в окрестности вершины трещины можно получить следующим образом. Опираясь на асимптотический анализ уравнений равновесия, проведенный в [33] и дополнительно представленный в [17], можно разыскивать напряжения в непосредственной окрестности вершины трещины в виде разложения по собственным функциям

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + r^\alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\theta), \quad r \rightarrow 0. \quad (5)$$

В дополнение можно отметить, что в случае плоско-деформированного состояния справедливо равенство $\varepsilon_{33} = 0$. Исходя из этого равенства, как по уравнениям теории течения, так и по уравнениям деформационной теории, справедливо соотношение $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$. Поэтому напряжения в окрестности вершины трещины ограничены и их можно искать в асимптотической форме (5). Подставляя асимптотическое разложение (5) в разрешающую систему уравнений (2), (3) и пренебрегая малыми при $r \rightarrow 0$ величинами, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sigma_{r\theta, \theta}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta, \theta}^{(0)} + 2\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad (6)$$

и алгебраическому условию пластического течения

$$(\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)})^2 + 4(\sigma_{r\theta}^{(0)})^2 = 4k^2. \quad (7)$$

Условие пластического течения (7) будет тождественно выполнено, если положить

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= \sigma^{(0)}(\theta) - k \cos 2\Theta^{(0)}(\theta), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \sigma^{(0)}(\theta) + k \cos 2\Theta^{(0)}(\theta), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= k \sin 2\Theta^{(0)}(\theta), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sigma^{(0)}(\theta), \Theta^{(0)}(\theta)$ – функции, подлежащие определению в ходе решения задачи.

Исследование системы уравнений (6), (7) вместе с граничными условиями на берегах трещины (4) приводит к хорошо известным распределениям для трещин нормального отрыва [34–37], состоящим из пяти секторов:

$$\begin{cases} -\pi \leq \theta \leq -3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\pi/4 \leq \theta \leq -\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\pi/4 \leq \theta \leq \pi, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \end{cases}$$

и поперечного сдвига, состоящим из семи секторов:

$$\begin{cases} -\pi = \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 = -3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 = -(5\pi/8 + 1/4), \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + 1/2 + 3\pi/4, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -1/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4 = \theta_3 + \pi/2, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \theta_4 \leq \theta \leq \theta_5 = \pi/8 + 1/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = 1/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_5 \leq \theta \leq \theta_6 = 5\pi/8 + 1/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_6 \leq \theta \leq \theta_7 = 3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta - 1/2 - 3\pi/4, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -1/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_7 \leq \theta \leq \pi, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{cases}$$

В соотношениях (9) и (10) все компоненты тензора напряжений отнесены к пределу текучести при чистом сдвиге k и записаны в безразмерной форме. Пользуясь распределением напряжений (10), справедливым для трещины поперечного сдвига в идеально пластическом материале, можно построить решение для произвольно-

го значения параметра смешанности нагружения M^p (1). Обобщение формул (10) на случай смешанного нагружения включает семь секторов и имеет вид:

$$\begin{cases} -\pi = \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 = -3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = (1/2) + (1/2) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = (1/2) - (1/2) \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -(1/2) \sin 2\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + 1/2 + 3\pi/4, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -1/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_4 \leq \theta \leq \theta_5 \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + (1/2) \operatorname{tg}(\pi M^p / 2), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = 1/2, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \theta_5 \leq \theta \leq \theta_6 \quad \sigma_{rr}^{(0)} = -\theta_5 + (1/2) \operatorname{tg}(\pi M^p / 2) + \\ + (1/2) \cos 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta_5 + (1/2) \operatorname{tg}(\pi M^p / 2) - (1/2) \cos 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -(1/2) \sin 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_6 \leq \theta \leq \theta_7 = 3\pi/4 \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta - 1/2 - 3\pi/4, \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -1/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_7 \leq \theta \leq \pi, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -(1/2) - (1/2) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -(1/2) + (1/2) \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = (1/2) \sin 2\theta. \end{cases}$$

В выражения (11) входит параметр смешанности нагружения: на отрезке $\theta_4 \leq \theta \leq \theta_5$ компоненты тензора напряжений определяются соотношениями, найденными с помощью определения параметра смешанности нагружения (1) и общей структуры решения задачи (8): $\sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + (1/2) \operatorname{tg}(\pi M^p / 2)$, что позволяет получить решения для различных значений M^p . Незвестные углы $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ определяются из условий непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(\theta)$ и $\sigma_{r\theta}^{(0)}(\theta)$ на лучах, разделяющих сектора. Формулируя условия непрерывности на лучах $\theta = \theta_4$, можно получить выражения для углов θ_3, θ_4 :

$$\theta_3 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} M^p\right) - \frac{1}{4} - \frac{5\pi}{8}, \quad \theta_4 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} M^p\right) - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}. \quad (12)$$

Формулируя условия непрерывности компонент $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(\theta)$ и $\sigma_{r\theta}^{(0)}(\theta)$ на луче $\theta = \theta_6$, можно получить выражения для углов θ_5, θ_6 :

$$\theta_5 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} M^p\right) + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}, \quad \theta_6 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} M^p\right) + \frac{1}{4} + \frac{5\pi}{8}. \quad (13)$$

Из соотношений (13) следует, что при $M^p = 0,3301952$ угол θ_6 становится равным $3\pi/4$ и область $\theta_6 \leq \theta \leq \theta_7$ исчезает из решения. Следовательно, распределение (11) справедливо для всех значений параметра смешанности нагружения из диапазона $0 \leq M^p \leq 0,3301952$. При значениях параметра смешанности нагружения, превышающих $M^p = 0,3301952$, асимптотическое решение задачи определяется соотношениями, образующими шесть секторов:

$$\begin{cases} -\pi = \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 = -3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + 1/2 + 3\pi/4, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -1/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2(\theta - \theta_3 + 3\pi/4), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_4 \leq \theta \leq \theta_5, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + (1/2) \operatorname{tg}(\pi M^p / 2), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = 1/2, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \theta_5 \leq \theta \leq \theta_6, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\theta_5 + (1/2) \operatorname{tg}(\pi M^p / 2) + (1/2) \cos 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta_5 + (1/2) \operatorname{tg}(\pi M^p / 2) - (1/2) \cos 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -(1/2) \sin 2(\theta - \theta_5 - \pi/4), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_6 \leq \theta \leq \pi \quad \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{cases}$$

Углы θ_3, θ_4 вычисляются с помощью формул (12), поскольку в области $-\pi \leq \theta \leq 0$ решение сохраняет свою структуру, а углы θ_5, θ_6 находятся из уравнений

$$\begin{aligned} -\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} M^p\right) - \frac{1}{2} \cos 2\left(\theta_6 - \theta_5 - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_6, \\ -\sin 2\left(\theta_6 - \theta_5 - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin 2\theta_6. \end{aligned}$$

Результаты решения задачи представлены на рис. 1–3, на которых приведены угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые соотношениями (11) и (14).

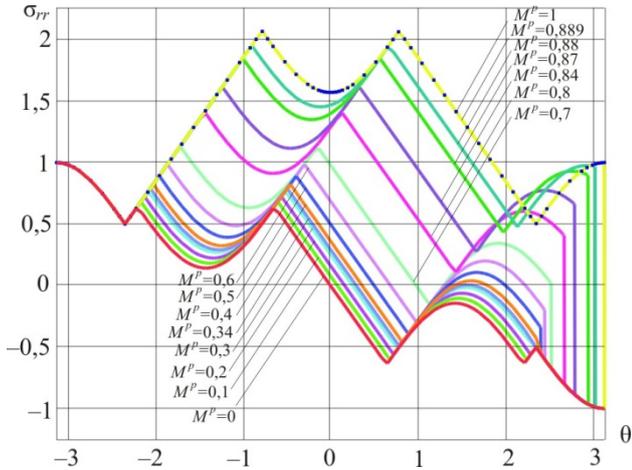


Рис. 1. Распределения радиального напряжения $\sigma_{rr}^{(0)}$ в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения (плоское деформированное состояние)

Fig. 1. Distributions of the radial stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for different values of the mixity parameter (plane strain condition)

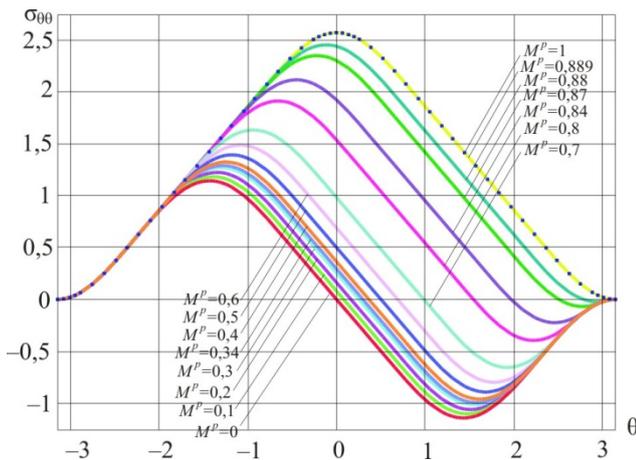


Рис. 2. Распределения тангенциального напряжения в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения (плоское деформированное состояние)

Fig. 2. Distributions of the circumferential stress $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for different values of the mixity parameter (plane strain condition)

Следует отметить, что при значениях параметра смешанности нагружения, близких к единице (при нагружениях, близких к нормальному отрыву), решение обладает особенностью. Можно было бы ожидать, что при стремлении параметра смешанности к единице распределение (14) будет непрерывным образом стремиться к решению (9). Однако не существует конечного предела функций, которыми задается решение, в областях $\theta_4 \leq \theta \leq \theta_5$ и $\theta_5 \leq \theta \leq \theta_6$ при $M^p \rightarrow 1$. Ана-

лиз решения (14) при увеличении параметра смешанности нагружения показал, что угловые распределения компонент тензора напряжений выходят на решение, отвечающее нормальному отрыву при $M^p = 0,8896724$.

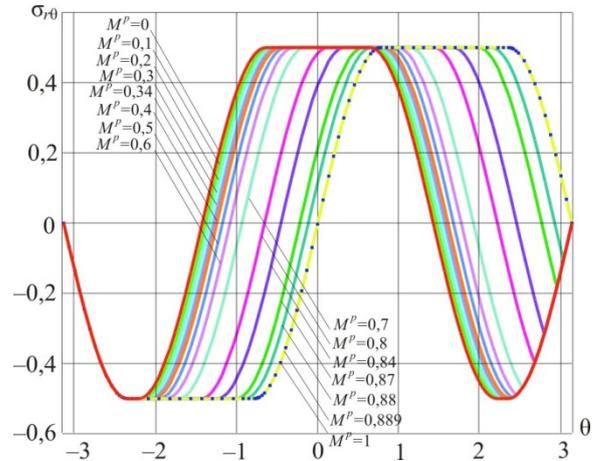


Рис. 3. Распределения касательного напряжения $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения (плоское деформированное состояние)

Fig. 3. Distributions of the shear stress $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for different values of the mixity parameter (plane strain condition)

Для всех значений параметра смешанности нагружения из отрезка $0,8896724 \leq M^p \leq 1$ решение описывается формулами (9), отвечающими чистому нормальному отрыву (см. рис. 1–3) (решение включает пять секторов). На рис. 1–3 можно ясно видеть переход от чистого поперечного сдвига к чистому нормальному отрыву. Кривая красного цвета на каждом из рисунков показывает распределение компонент тензора напряжений для чистого поперечного сдвига (первый предельный случай $M^p = 0$): компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ являются антисимметричными относительно оси ординат, тогда как касательное напряжение $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ симметрично. Кривые, изображенные синими точками, отвечают второму предельному случаю – чистому нормальному отрыву ($M^p = 1$). Здесь, напротив, компоненты $\sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ симметричны относительно оси ординат, а касательное напряжение $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ – антисимметрично.

3. Асимптотическое решение задачи. Плоское напряженное состояние

В случае плоского напряженного состояния асимптотическое решение задачи будем также искать в форме (5). Справедливы уравнения равновесия (6), но условие пластического течения имеет вид

$$\left(\sigma_{rr}^{(0)}\right)^2 - \sigma_{rr}^{(0)}\sigma_{\theta\theta}^{(0)} + \left(\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\right)^2 + 3\left(\sigma_{r\theta}^{(0)}\right)^2 = 3k^2. \quad (15)$$

Условию пластического течения для плоского напряженного состояния (15) можно тождественно удовлетворить, если положить [37, 38]

$$\sigma_{rr}^{(0)} = k \cos \theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2k \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = k \sin \theta. \quad (16)$$

Известно и иное распределение компонент тензора напряжений, приводящее к тождественному выполнению условия пластического течения [30, 38]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= a + b \cos 2\Theta(\theta) + c \sin 2\Theta(\theta), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= a - b \cos 2\Theta(\theta) - c \sin 2\Theta(\theta), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= -b \sin 2\Theta(\theta) + c \cos 2\Theta(\theta), \end{aligned} \quad (17)$$

где a, b, c – такие постоянные, что

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3k^2. \quad (18)$$

Хорошо известны решения для задач о трещинах нормального отрыва [30, 38, 39] (здесь и далее напряжения отнесены к пределу текучести k):

$$\left\{ \begin{aligned} &0 \leq \theta \leq \theta_1, \\ &\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \\ &\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ &\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_2) + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_2) \times \\ &\quad \times \cos 2(\theta - \theta_2) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta - \theta_2), \\ &\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_2) - \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_2) \times \\ &\quad \times \cos 2(\theta - \theta_2) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta - \theta_2), \\ &\sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_2) \sin 2(\theta - \theta_2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \cos 2(\theta - \theta_2), \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_2 \leq \theta \leq \pi, \\ &\sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \end{aligned} \right.$$

где углы $\theta_1 = 1,39233 = 79,77^\circ$, $\theta_2 = 2,63960 = 151,24^\circ$ определяются из решения системы трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta_1 &= -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_2) \times \\ &\times \sin 2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta_1 &= \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_2) - \\ &- \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_2) \cos 2(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

и поперечного сдвига [36] в идеально пластическом материале

$$\left\{ \begin{aligned} &-\pi \leq \theta \leq \theta_1, \\ &\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ &\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_3), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_3), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \\ &\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_2 + c_3) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \times \\ &\quad \times \cos 2(\theta - \theta_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta - \theta_2), \\ &\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_2 + c_3) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \times \\ &\quad \times \cos 2(\theta - \theta_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta - \theta_2), \\ &\sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta - \theta_2) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \cos 2(\theta - \theta_2), \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \\ &\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_4 \leq \theta \leq \theta_5, \\ &\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_5 + c_2) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \times \\ &\quad \times \cos 2(\theta - \theta_5) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta - \theta_5), \\ &\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_5 + c_2) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \times \\ &\quad \times \cos 2(\theta - \theta_5) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta - \theta_5), \\ &\sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta - \theta_5) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \cos 2(\theta - \theta_5), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_5 \leq \theta \leq \theta_6, \\ &\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_2), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_2), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_6 \leq \theta \leq \pi, \\ &\sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \right.$$

В асимптотическом решении (20) углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ и константы c_2, c_3 определяются из условий непрерывности тангенциального и касательного напряжений на лучах, разделяющих сектора, – условий, приводящих к необходимости решения следующих систем уравнений. Угол θ_6 и константа c_2 находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta_6 + c_2) &= -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta_6), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_6 + c_2) &= \frac{1}{2} \sin(2\theta_6). \end{aligned} \quad (21)$$

Угол θ_1 и константа c_3 находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta_1 + c_3) &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta_1), \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_1 + c_3) &= \frac{1}{2} \sin(2\theta_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Углы θ_2, θ_3 вычисляются с помощью системы уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_2 + c_3) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \cos 2(\theta_3 - \theta_2) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta_3 - \theta_2), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_3 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta_3 - \theta_2) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \cos 2(\theta_3 - \theta_2). \end{aligned} \quad (23)$$

Углы θ_4, θ_5 вычисляются с помощью системы уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_5 + c_2) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \cos 2(\theta_4 - \theta_5) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta_4 - \theta_5), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_4 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta_4 - \theta_5) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \cos 2(\theta_4 - \theta_5). \end{aligned} \quad (24)$$

Обобщение представления (20) на случай смешанного нагружения позволяет получить асимптотическое решение для значений параметра смешанности нагружения, близких к поперечному сдвигу. Анализ соотношений (20) указывает на их справедливость для смешанного нагружения с заменой решения в секторе $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_4$ на выражения

$$\begin{cases} \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_1), \end{cases}$$

где константа определяется из соотношения (1) и

$$c_1 = \operatorname{arccctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} M^p \right) \right) \quad (25)$$

отражает вид смешанного нагружения. Аналитическое решение (20) для других секторов сохраняется и для смешанного нагружения. Таким образом, для смешанного нагружения поле напряжений определяется различными зависимостями в семи секторах:

$$\begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \theta_1 \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_3), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_3), \\ \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_2 + c_3) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \times \\ \times \cos 2(\theta - \theta_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta - \theta_2), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_2 + c_3) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \times \\ \times \cos 2(\theta - \theta_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta - \theta_2), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta - \theta_2) + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \cos 2(\theta - \theta_2), \\ \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_1), \\ \theta_4 \leq \theta \leq \theta_5 \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_5 + c_2) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \times \\ \times \cos 2(\theta - \theta_5) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta - \theta_5), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_5 + c_2) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \times \\ \times \cos 2(\theta - \theta_5) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta - \theta_5), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta - \theta_5) + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \cos 2(\theta - \theta_5), \\ \theta_5 \leq \theta \leq \theta_6 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_2), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_2), \\ \theta_6 \leq \theta \leq \pi \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{cases} \quad (26)$$

Появление в решении константы c_1 (переход к рассмотрению смешанного нагружения) приводит к изменению углов θ_2, θ_3 , которые в случае смешанного нагружения определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta_3 + c_1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_2 + c_3) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \cos 2(\theta_3 - \theta_2) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \sin 2(\theta_3 - \theta_2), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_3 + c_1) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_3) \times \\ &\times \sin 2(\theta_3 - \theta_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_3) \cos 2(\theta_3 - \theta_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Углы θ_4, θ_5 в случае смешанного нагружения вычисляются с помощью системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta_4 + c_1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_5 + c_2) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \cos 2(\theta_4 - \theta_5) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \sin 2(\theta_4 - \theta_5), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_4 + c_1) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_5 + c_2) \times \\ &\times \sin 2(\theta_4 - \theta_5) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_5 + c_2) \cos 2(\theta_4 - \theta_5). \end{aligned} \quad (28)$$

При приближении значения параметра смешанности нагружения к $M^P = 0,3918025$ углы θ_2, θ_3 приближаются друг к другу и совпадают для приведенного значения параметра смешанности нагружения, поэтому асимптотическое решение (26), состоящее из семи секторов, редуцируется к решению, состоящему из пяти секторов:

$$\left\{ \begin{aligned} &-\pi \leq \theta \leq \theta_1, \\ \sigma_{rr}^{(0)} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \\ &\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ \sigma_{rr}^{(0)} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_1) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_1) \times \\ &\times \cos 2(\theta - \theta_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_1) \sin 2(\theta - \theta_2), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_1) \times \\ &\times \cos 2(\theta - \theta_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_1) \sin 2(\theta - \theta_2), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_2 + c_1) \sin 2(\theta - \theta_2) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_2 + c_1) \cos 2(\theta - \theta_2), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= 2\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_1), \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} &= \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_4) + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_4) \times \\ &\times \cos 2(\theta - \theta_4) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_4 \sin 2(\theta - \theta_4), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_4) - \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_4) \times \\ &\times \cos 2(\theta - \theta_4) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_4 \sin 2(\theta - \theta_4), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_4) \sin 2(\theta - \theta_4) + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\theta_4 \cos 2(\theta - \theta_4), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta_4 \leq \theta \leq \pi, \\ \sigma_{rr}^{(0)} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \right.$$

Значения углов θ_1, θ_2 определяются из системы тригонометрических уравнений

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}(1 - \cos 2\theta_1) &= 3 \cos(\theta_2 + c_1) + \\ &+ \cos(\theta_2 + c_1) \cos 2(\theta_1 - \theta_2) - \\ &- 2 \sin(\theta_2 + c_1) \sin 2(\theta_1 - \theta_2), \\ \sqrt{3} \sin 2\theta_1 &= \cos(\theta_2 + c_1) \sin 2(\theta_1 - \theta_2) + \\ &+ \sin(\theta_2 + c_1) \cos 2(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (30)$$

Значения углов θ_3, θ_4 определяются из системы тригонометрических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_3 + c_1) &= -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_4) \times \\ &\times \sin 2(\theta_3 - \theta_4) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_4 \cos 2(\theta_3 - \theta_4), \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta_3 + c_1) &= \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_4) - \\ &- \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_4) \cos 2(\theta_3 - \theta_4) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_4 \sin 2(\theta_3 - \theta_4). \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, два представления (26) и (29) полностью описывают поле напряжений в окрестности вершины трещины в идеально пластическом материале при условии, что пластическое течение охватывает вершину трещины. Представление (26) дает поле напряжений для значений параметра смешанности нагружения при значениях параметра смешанности нагружения, меньших $M^P = 0,3918025$. Параметры, входящие в зависимости (26), вычисляются с помощью уравнений (21), (22) и (27), (28). В случае смешанного нагружения,

отвечающего значениям параметра смешанности нагружения, большим $M^p = 0,3918025$, решение описывается формулами (29), в которых значения углов вычисляются из уравнений (30) и (31). Результаты вычислений показаны на рис. 4–6, где приведены угловые распределения компонент тензора напряжений для всех значений параметра смешанности нагружения (в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого поперечного сдвига до чистого нормального отрыва, когда параметр смешанности нагружения пробегает значения от нуля до единицы).

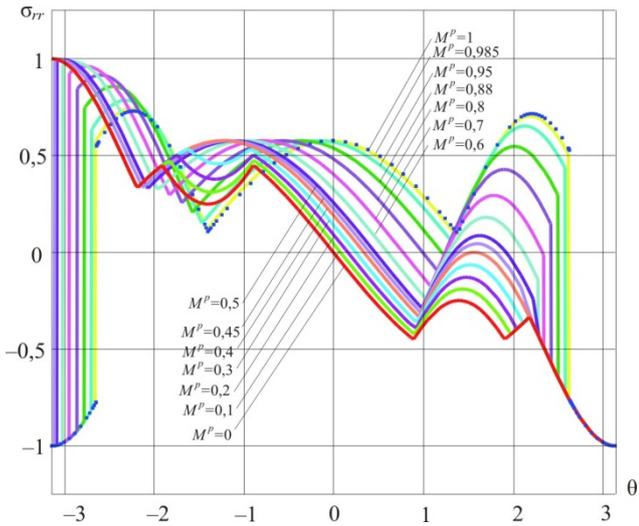


Рис. 4. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения (плоское напряженное состояние)

Fig. 4. Distributions of the radial stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for different values of the mixity parameter (plane stress condition)

Следует отметить, что в случае плоского напряженного состояния константа c_1 , связанная с параметром смешанности нагружения уравнением (25), принимает значения $\pi/2$ для поперечного сдвига и нуль – для нормального отрыва. При стремлении константы c_1 к нулю имеется конечный предел компонент тензора напряжений в уравнениях (29). Поэтому, как видно из рис. 4–6, увеличивая параметр смешанности нагружения до 1, можно получить распределение напряжений, соответствующее нормальному отрыву, в отличие от ранее рассмотренного случая плоского деформированного состояния.

Наглядную картину распределения радиального напряжения у вершины трещины при изменении параметра смешанности нагружения дают рис. 7–13, показывающие радиальное напряжение для трещины поперечного сдвига (рис. 7, а), для смешанного нагружения (см. рис. 7–13) и для трещины нормального отрыва (рис. 13, б).

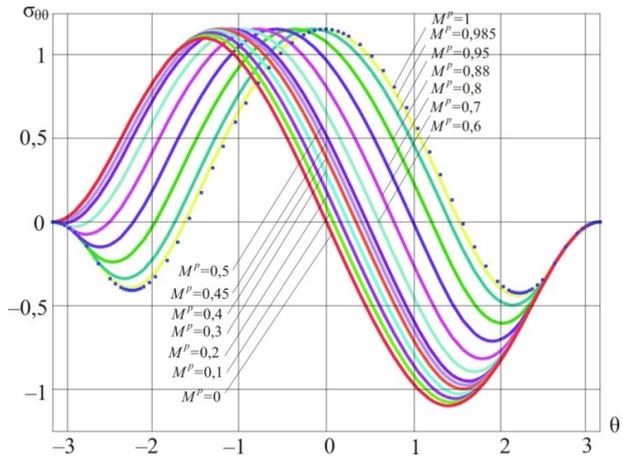


Рис. 5. Распределения тангенциального напряжения в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения (плоское напряженное состояние)

Fig. 5. Distributions of the circumferential stress $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for different values of the mixity parameter (plane stress condition)

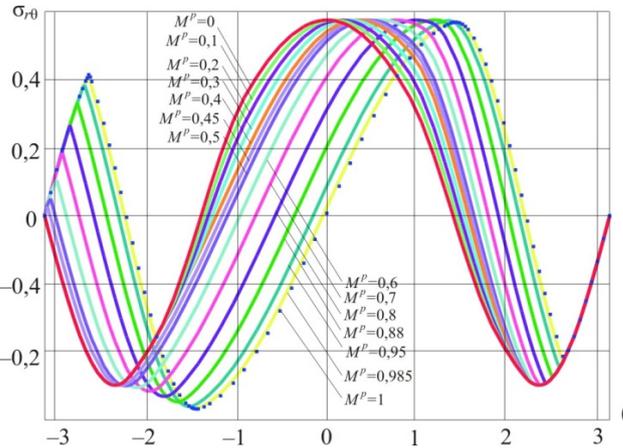


Рис. 6. Распределения касательного напряжения $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения (плоское напряженное состояние)

Fig. 6. Distributions of the shear stress $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for different values of the mixity parameter (plane stress condition)

Из рис. 9 видно, что радиальное напряжение претерпевает резкие изменения вблизи $\theta = -\pi$ при переходе от значения параметра смешанности нагружения $M^p = 0,39$ к значению $M^p = 0,45$, что может вызвать сложности при реализации метода двухпараметрической пристрелки для построения численных и асимптотических решений задач определения поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения в материалах, подчиняющихся степенному закону деформационной теории пластичности и степенному закону установившейся ползучести [38–44].

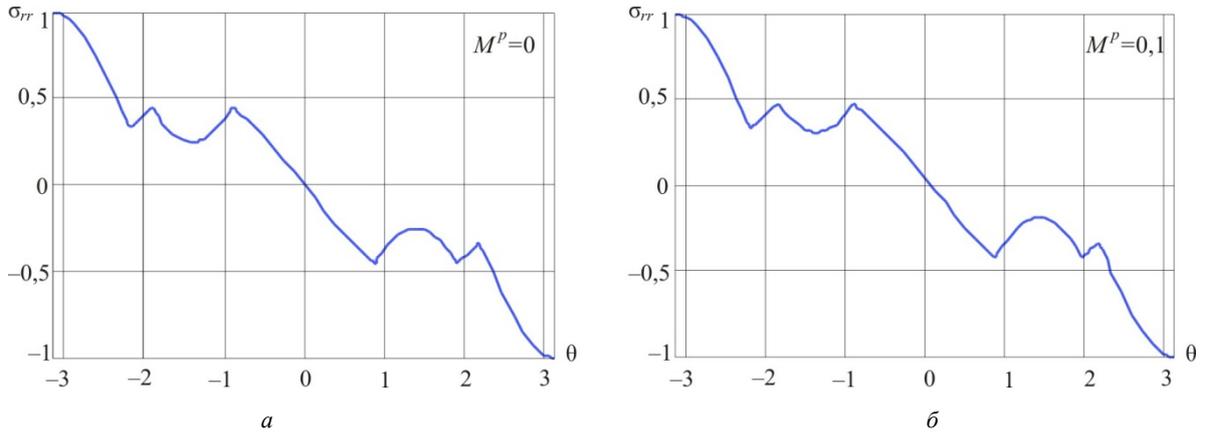


Рис. 7. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига $M^p = 0$ (а) и для смешанного нагружения $M^p = 0,1$ (б)

Fig. 7. Distributions of the shear stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for mode II crack (а) and for mixed mode crack $M^p = 0.1$ (б)

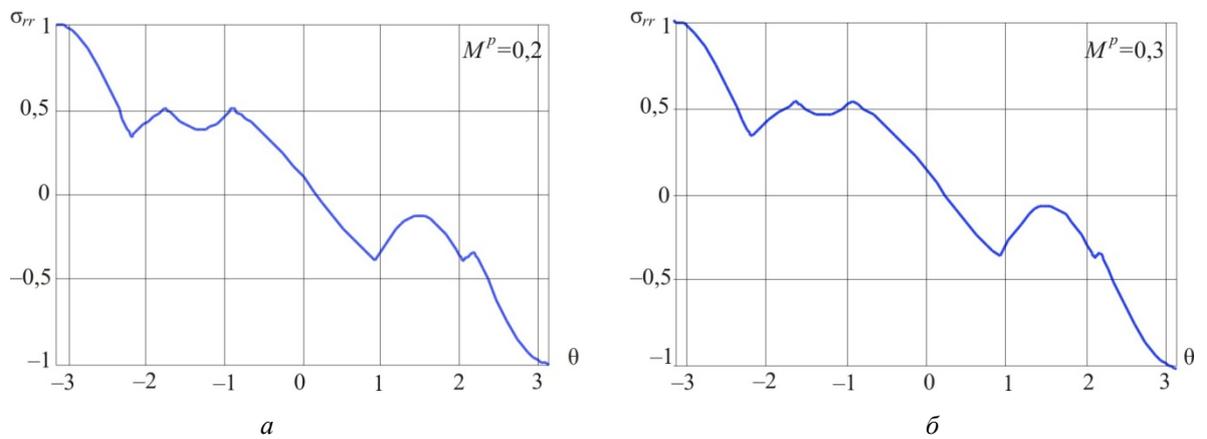


Рис. 8. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины в условиях смешанного нагружения при $M^p = 0,2$ (а) и $M^p = 0,3$ (б)

Fig. 8. Distributions of the shear stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for mixed mode crack $M^p = 0.2$ (а) and $M^p = 0.3$ (б)

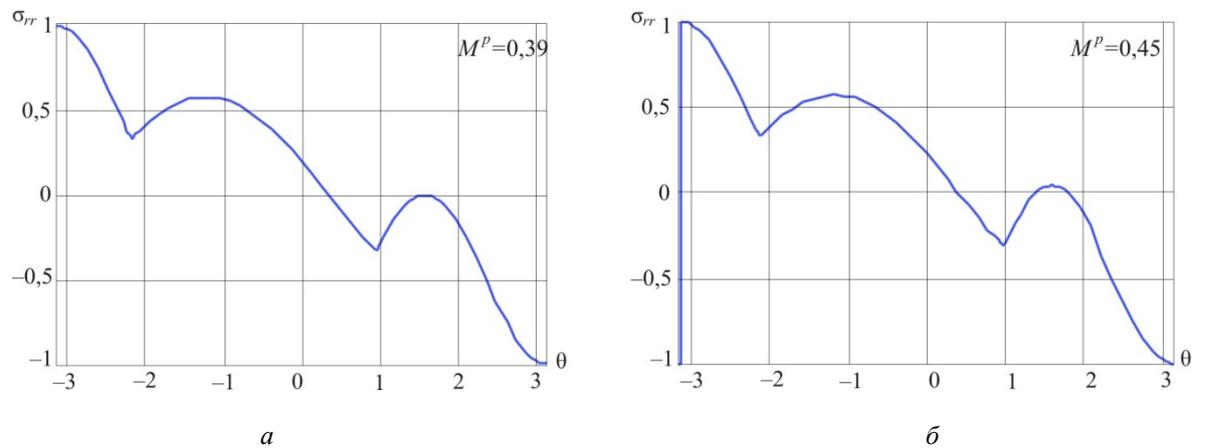


Рис. 9. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины в условиях смешанного нагружения при $M^p = 0,39$ (а) и $M^p = 0,45$ (б)

Fig. 9. Distributions of the shear stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for mixed mode crack $M^p = 0.39$ (а) and $M^p = 0.45$ (б)

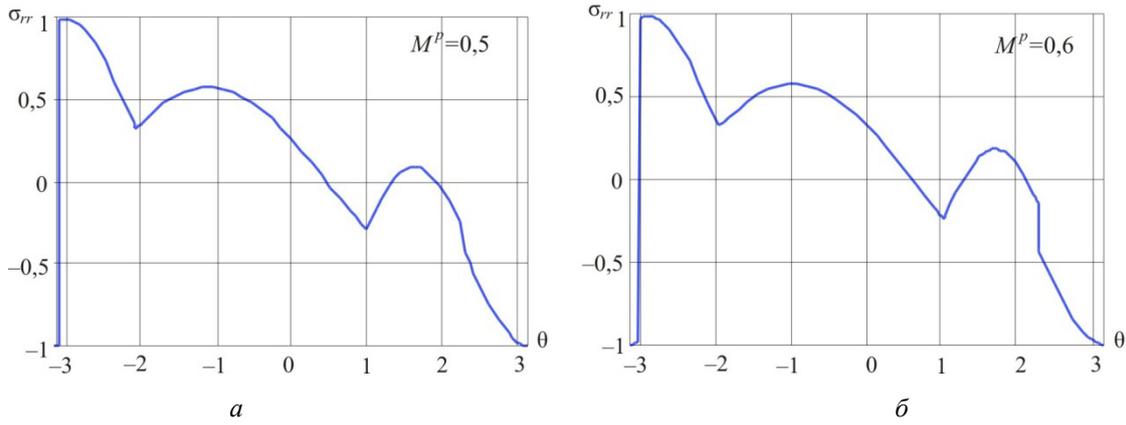


Рис. 10. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины в условиях смешанного нагружения при $M^p = 0,5$ (а) и $M^p = 0,6$ (б)

Fig. 10. Distributions of the shear stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for mixed mode crack $M^p = 0.5$ (a) and $M^p = 0.6$ (b)

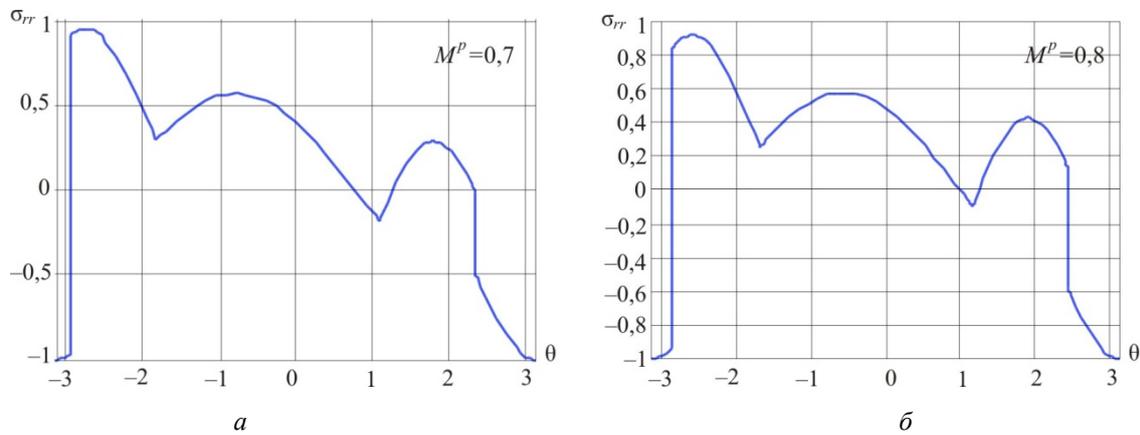


Рис. 11. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины в условиях смешанного нагружения при $M^p = 0,7$ (а) и $M^p = 0,8$ (б)

Fig. 11. Distributions of the shear stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for mixed mode crack $M^p = 0.7$ (a) and $M^p = 0.8$ (b)

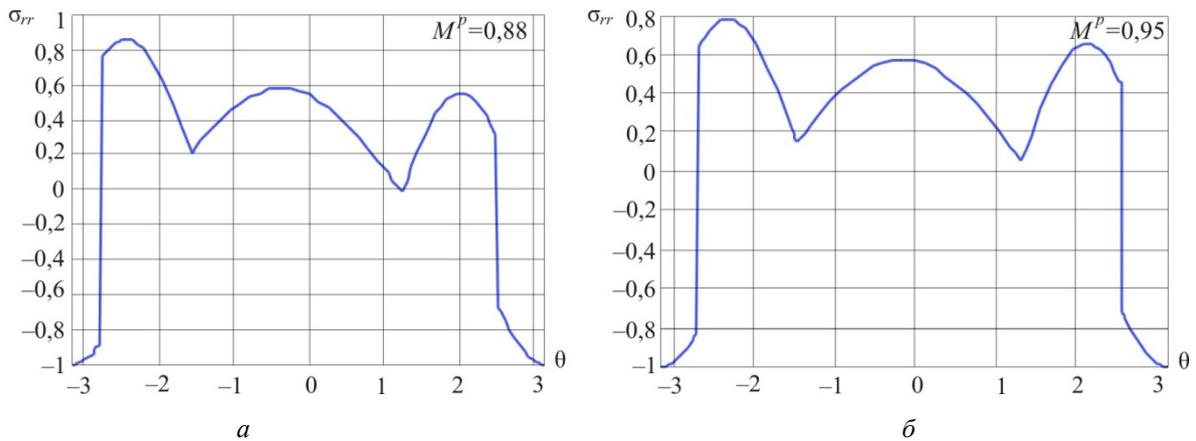


Рис. 12. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины в условиях смешанного нагружения при $M^p = 0,88$ (а) и $M^p = 0,95$ (б)

Fig. 12. Distributions of the shear stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for mixed mode crack $M^p = 0.88$ (a) and $M^p = 0.95$ (b)

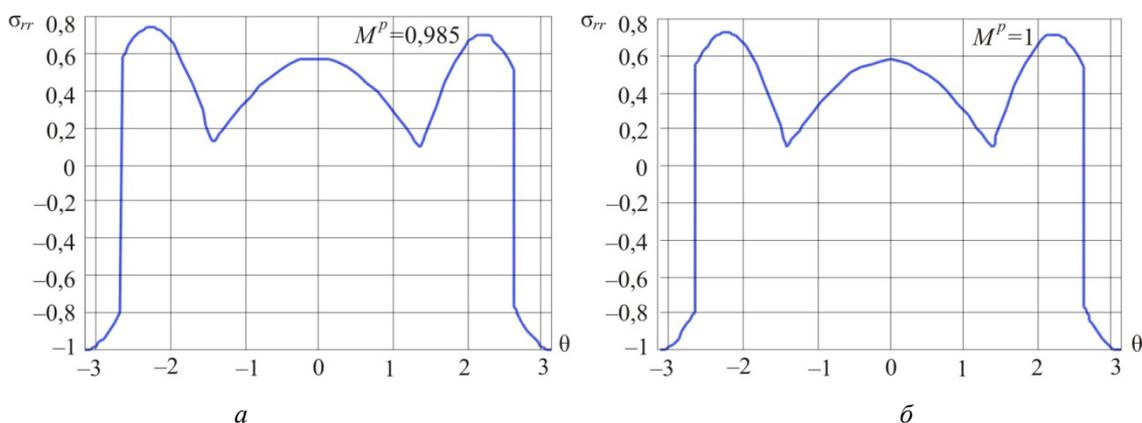


Рис. 13. Распределения радиального напряжения в окрестности вершины в условиях смешанного нагружения при $M^p = 0,985$ (а) и $M^p = 1$ (б)

Fig. 13. Distributions of the shear stress $\sigma_{rr}^{(0)}$ in the vicinity of the crack tip for mixed mode crack $M^p = 0.985$ (a) and $M^p = 1$ (b)

Выводы и обсуждение результатов

В статье получены аналитические решения задач определения напряженного состояния у вершины трещины в идеально пластическом материале в условиях смешанного нагружения в предположении, что область пластического течения полностью охватывает вершину трещины для случаев плоского деформированного и плоского напряженного состояний.

Асимптотические решения получены для всего диапазона значений параметра смешанности нагружения, задающего вид деформирования. Полученные решения позволяют для указанного значения параметра смешанности нагружения построить угловые распределения компонент тензора напряжений.

Интересной и важной особенностью рассмотренного класса задач для плоского деформированного состояния является наличие отрезка значений параметра смешанности нагружения, для которого решение задается выражениями, не зависящими от параметра сме-

шанности (справедливы единые зависимости (9) для всех значений параметра смешанности из отрезка $0,8896724 \leq M^p \leq 1$). Для данного диапазона значений параметра смешанности нагружения трещина ведет себя как трещина отрыва, несмотря на наличие сдвиговой нагрузки.

Построенные аналитические решения могут быть полезным для получения угловых распределений компонент тензора напряжений в материале, упрочняющемся по степенному закону, или для материала, следующего степенному закону теории установившейся ползучести, в условиях смешанного нагружения для больших значений показателя нелинейности материала, поскольку, как правило, при построении численного решения применяется метод многопараметрической (параллельной или множественной) пристрелки [40–47] и его результаты нуждаются в дополнительном обосновании и верификации, что и позволят сделать найденные аналитические зависимости.

Библиографический список

1. Prandtl L. Ueber die Haerte plastischer Koerper. Goettinger Nachr, Math.-Phys. Kl. – 1920. – P. 74–85.
2. Yusov F. Three-dimensional assessments of crack tip constraint // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 101. – P. 1–16.
3. Ayatollahi M.R., Berto F. Развитие стесненной деформации в вершине трещины при упругопластическом разрушении в условиях сдвиговой нагрузки // Физическая механика. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 79–83.
4. Turis M., Ivankova O. Using finite element analysis to obtain plastic zones in the vicinity of the crack edges, under mixed mode loading conditions // MATEC Web of Conferences. – 2020. – Vol. 310. – P. 00028.
5. Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Асимптотические поля в вершине трещины в линейных и нелинейных материалах и их роль в распространении трещин // Физическая механика. – 2018. – Т. 21, № 6. – С. 23–35.
6. Кожевникова Г.В. Решение задачи гибки листа методом полей линий скольжения // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 2018. – № 4. – С. 416–423.
7. Гундина М.А. Метод асимптотических разложений в задачах распространения трещин. Нахождение коэффициента нелинейности // Вестник МДУ имени А.А. Куляшова. – 2019. – № 1. – С. 63–70.
8. Plastic zone evolution during fatigue crack growth: Digital image correlation coupled with finite elements method // J. Hozdez, M. Langlois, J.-F. Witz, N. Limodin, D. Najjar, E. Charkaluk, P. Osmond, A. Forre, F. Szymtka // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 171. – P. 92–102.
9. Lesiuk G., Smolnicki M., Mech R., Ziety A., Fragassa C. Analysis of fatigue crack growth under mixed mode (I+II) loading conditions in rail steel using CTS specimen // Engineering Failure Analysis. – 2020. – Vol. 109. – P. 104354.

10. Evaluation of the elasto-plastic crack tip singularities via mechano-luminescent effects / R. Basnet, S. Timisina, K.H. Le, J.S. Kim // *International Journal of Engineering Science*. – 2018. – Vol. 123. – P. 127–142.
11. Couple effects of mixed mode biaxial loading and crack tip configuration on plastic stress intensity factor behavior at small and large scale yielding / A.P. Zakharov, V.N. Shlyannikov, A.M. Tartygasheva, D.V. Fedotova // *Procedia Structural Integrity*. – 2019. – Vol. 18. – P. 749–756.
12. Huang X., Liu Y., Huang Z. New constraint parameters based on crack tip plastic zone: Theoretical derivations and effectiveness verification // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – Vol. 190. – P. 129–147.
13. A unified method to solve higher order asymptotic crack-tip fields of mode I, mode II and mixed mode I/II crack in power-law creeping solids / Y. Dai, Y. Liu, F. Qin, Y.J. Chao // *Engineering fracture mechanics*. – 2019. – Vol. 218. – P. 106610.
14. Estimation of stress field for sharp V-notch in power-law creeping solids: An asymptotic viewpoint / Y. Dai, Y. Liu, F. Qin, Y.J. Chao, F. Berto // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. – Vol. 180–181. – P. 189–204.
15. Shih C.F. Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems. Ph. D. Thesis. Cambridge: Harvard University. 1973.
16. Shih C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane strain crack problems. In: *Fracture Analysis*, ASTM STP 560. 1974. American Society of Testing and Materials, Philadelphia. – P. 187–219.
17. Dong P., Pan J. Plane – strain mixed-mode near-tip fields in elastic perfectly plastic solids under small-scale yielding conditions // *International Journal of Fracture*. – 1990. – Vol. 45. – P. 243–262.
18. Zhu X.K., Chao Y.J. Fully plastic crack tip fields for CCP and DECP specimens under tension in non-hardening materials // *International Journal of Solids and Structures*. – 2000. – Vol. 37. – P. 577–598.
19. Characterisation of crack tip stresses in elastic-perfectly plastic material under mode-I loading / I.A. Khan, V. Bhasin, J. Chattopadhyay, A.K. Glosch // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2011. – Vol. 53. – P. 207–216.
20. Li J., Hancock J.W. Mode I and mixed mode fields with incomplete crack tip plasticity // *International Journal of Solids and Structures*. – 1999. – Vol. 36(5). – P. 711–725.
21. Zhu X.K., Chao Y.J. Constraint effects on crack tip fields in elastic-perfectly plastic materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2001. – Vol. 49(8). – P. 363–399.
22. Rahman M., Hancock J.W. Elastic perfectly plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 3692–3704.
23. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 13–31.
24. Rice J.R., Rosengren G.F. Plain strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 1–12.
25. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // *J Mech Phys Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 337–347.
26. Stepanova L.V. Intermediate self-similar asymptotic presentation of stress and damage fields in the vicinity of mixed mode crack tip under creep regime // *Procedia Structural Integrity*. – 2018. – Vol. 13. – P. 255–260.
27. Larisa S., Ekaterina Y. Asymptotic stress field in the vicinity of the mixed-mode crack in damaged materials under creep conditions // *Procedia Structural Integrity*. – 2016. – Vol. 2. – P. 793–800.
28. Stepanova L.V. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. – 2015. – Vol. 10(3). – P. 367–393.
29. Stepanova L.V., Yakovleva E. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems // *AIP Conference Proceedings*. – 2016. – Vol. 1785. – P. 030030.
30. Астафьев В.И., Крутов А.Н. Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. – 1999. – № 4(14). – С. 56–69.
31. Шляnnиков В.Н., Кислова С.Ю. Параметры смешанных форм деформирования для трещины // *Известия Саратовского университета*. – 2009. – Т. 9, № 1. – С. 77–84.
32. Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. – 2014. – № 3. – С. 129–162.
33. Rice J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // *Journal of Applied Mechanics*. – 1968. – № 35(2). – P. 379–386.
34. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
35. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. – Самара: Самарский университет, 2001. – 632 с.
36. Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. – М.: Физматлит, 2009. – 336 с.
37. Milne I., Ritchi R.O., Karahaloo B.L. *Comprehensive Structural Integrity*. – Amsterdam: Elsevier, 2003. – 5232 p.
38. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 408 с.
39. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
40. Trapp M., Ochsner A. *Computational Plasticity for Finite Elements: A Fortran – Based Introduction*. Springer International Publishing, 2018. – 99 p.
41. Saxena A. *Advanced fracture mechanics and structural integrity*. – Boca Raton: CRC Press, 2019. – 307 p.
42. C(t) dominance of the mixed I/II creep crack. Part I. Transient creep / Y. Dai, Y. Liu, F. Qin, Y.J. Chao // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 103. – 102314.
43. C(t) dominance of the mixed I/II creep crack. Part II. Extensive creep / Y. Dai, Y. Liu, F. Qin, Y.J. Chao, G. Qian // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 106. – P. 102489.
44. Astafjev V.I., Stepanova L.V., Shesterikov S.A. Crack tip asymptotic character of anti-plane stress and strain rate for linear fractional constitutive relations // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 1996. – Vol. 24, iss. 3. – P. 263–268.
45. On the stress ahead of a stationary crack tip during the transition from primary to secondary creep / J.W. Sanders, M. Dadfarnia, H. Sehitoglu, J. Stubbins, P. Sofronis // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – Vol. 193–194. – P. 455–473.
46. Петухов Д.С., Келлер И.Э. Двойственные задачи плоских ползущих течений степенной несжимаемой среды // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2016. – Т. 20, № 3. – С. 496–507.
47. Loghini A., Joseph P. Mixed mode fracture in power law hardening materials for plane stress // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2020. – Vol. 139. – P. 103890.

References

1. Prandtl L. Ueber die Haerte plastischer Koerper. *Goettinger Nachr. Math.-Phys. Kl.*, 1920. pp. 74-85.
2. Yusov F. Three-dimensional assessments of crack tip constraint. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, vol. 101, pp. 1-16. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.01.025
3. Ayatollahi M.R., Berto F. Evolution of crack tip constraint in a mode II elastic-plastic crack problem. *Physical mesomechanics*, 2018, vol.21, no. 1, pp. 79-83. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-11011
4. Turis M., Ivankova O. Using finite element analysis to obtain plastic zones in the vicinity of the crack edges, under mixed mode loading conditions. *MATEC Web of Conferences*, 2020, vol. 310, 00028. DOI: 10.1051/mateconf/202031000028
5. Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Asymptotic crack tip fields in linear and nonlinear materials and their role in crack propagation. *Physical mesomechanics*, 2018, vol.21, no. 6, pp. 23-35. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-16005
6. Kozhevnikova G.V. Reshenie zadachi gibki lista metodom polej linij skol'zhenija [Solution of the problem of sheet bending by the slip line field method]. *Izvestija Nacional'noj akademii nauk Belarusi. Serija fiziko-tehnicheskikh nauk*, 2018, no. 4, pp. 416-423. DOI: 10.29235/1561-8358-2018-63-4-416-423
7. Gundina M. Metod asimptoticheskikh razlozhenij v zadachah rasprostraneniya treshhin. Nahozhdenie koeficienta nelinejnosti [Method of asymptotic expansion for crack distribution problems. Finding nonlinearity coefficient]. *Vestnik of Kylyashev MDU*, 2019, no. 1, pp. 63-70.
8. Hozdez J., Langlois M., Witz J.-F., Limodin N., Najjar D., Charkaluk E., Osmond P., Forre A., Szmytka F. Plastic zone evolution during fatigue crack growth: Digital image correlation coupled with finite elements method. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 171, pp. 92-102. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2019.04.032
9. Lesiuk G., Smolnicki M., Mech R., Ziety A., Fragassa C. Analysis of fatigue crack growth under mixed mode (I+II) loading conditions in rail steel using CTS specimen. *Engineering Failure Analysis*, 2020, V. 109, 104354. DOI: 10.1016/J.ENGFAILANAL.2019.104354
10. Basnet R., Timisina S., Le K.H., Kim J.S. Evaluation of the elasto-plastic crack tip singularities via mechano-luminescent effects. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 123, pp. 127-142. DOI: 10.1016/J.IJENGSCI.2017.11.018
11. Zakharov A.P., Shlyannikov V.N., Tartygasheva A.M., Fedotova D.V. Couple effects of mixed mode biaxial loading and crack tip configuration on plastic stress intensity factor behavior at small and large scale yielding. *Procedia Structural Integrity*, 2019, vol. 18, pp. 749-756. DOI: 10.1016/J.PROSTR.2019.08.223
12. Huang X., Liu Y., Huang Z. New constraint parameters based on crack tip plastic zone: Theoretical derivations and effectiveness verification. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 190, pp. 129-147. DOI:10.1016/J.IJSOLSTR.2019.11.009
13. Dai Y., Liu Y., Qin F., Chao Y.J. A unified method to solve higher order asymptotic crack-tip fields of mode I, mode II and mixed mode I/II crack in power-law creeping solids. *Engineering fracture mechanics*, 2019, vol. 218, 106610. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106610
14. Dai Y., Liu Y., Qin F., Chao Y.J., Berto F. Estimation of stress field for sharp V-notch in power-law creeping solids: An asymptotic viewpoint. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 180-181, pp. 189-204. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.07.028
15. Shih C.F. Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems Ph. D. Thesis. (Cambridge: Harvard University). 1973.
16. Shih C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane strain crack problems. In: *Fracture Analysis*, ASTM STP 560. 1974. *American Society of Testing and Materials*, Philadelphia, pp. 187-219.
17. Dong P., Pan J. Plane – strain mixed-mode near-tip fields in elastic perfectly plastic solids under small-scale yielding conditions. *International Journal of Fracture*, 1990, vol. 45, pp. 243-262. Doi:10.1016/0013-7944(90)90330-J
18. Zhu X.K., Chao Y.J. Fully plastic crack tip fields for CCP and DECP specimens under tension in non-hardening materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, pp. 577-598. Doi: 10.1016/S0020-7683(99)00024-4
19. Khan I.A., Bhasin V., Chattopadhyay J., Glosch A.K. Characterisation of crack tip stresses in elastic-perfectly plastic material under mode-I loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, vol. 53, pp. 207-216. DOI: 10.1016/J.IJMECSCI.2011.01.001
20. Li J., Hancock J.W. Mode I and mixed mode fields with incomplete crack tip plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, vol. 36(5), pp. 711-725. DOI: 10.1016/S0020-7683(98)00042-0
21. Zhu X.K., Chao Y.J. Constraint effects on crack tip fields in elastic-perfectly plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, vol. 49(8), pp. 363-399. DOI:10.1016/S0022-5096(00)00030-2
22. Rahman M., Hancock J.W. Elastic perfectly plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 3692-3704. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2005.05.051
23. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J Mech Phys Solids*, 1968, vol.16, pp. 13-31
24. Rice J R, Rosengren G.F. Plain strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J Mech Phys Solids*, 1968, vol. 16, pp. 1-12.
25. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *J Mech Phys Solids*, 1968, vol. 16, pp. 337-347.
26. Stepanova L.V. Intermediate self-similar asymptotic presentation of stress and damage fields in the vicinity of mixed mode crack tip under creep regime. *Procedia Structural Integrity*, 2018, vol. 13, pp. 255-260. DOI: 10.1016/j.prostr.2018.12.043
27. Larisa S., Ekaterina Y. Asymptotic stress field in the vicinity of the mixed-mode crack in damaged materials under creep conditions. *Procedia Structural Integrity*, 2016, vol. 2, pp. 793-800. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.102
28. Stepanova L.V. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2015, vol. 10(3), pp. 367-393. DOI: 10.2140/jomms.2015.10.367
29. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems. *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1785, 030030. DOI: 10.1063/1.4967051
30. Astaf'ev V.I., Krutov A.N. Raspredelenie napriazhenii vblizi vershiny naklonnoi treshchiny v nelineinoi mekhanike razrusheniia [Stress distribution near the tip of an inclined crack in nonlinear fracture mechanics]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia*, 1999, no. 4(14), pp. 56-69.
31. Shliannikov V.N., Kislova S.Iu. Parametry smeshannykh form deformirovaniia dlia treshchiny [Parameters of mixed forms of deformation for a crack]. *Izvestiia Saratovskogo universiteta*. 2009, vol. 9, no.1, pp. 77-84.

32. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 129-162. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.08.
33. Rice J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, no. 35(2), pp.379-386.
34. Kachanov L.M. Fundamentals of the theory of plasticity, *Mineola, New York: Dover Publications*, 2004, 466 p.
35. Astafjev V.I., Radayev Y.N., Stepanova L.V. Nonlinear Fracture Mechanics. *Samara: Samara Univeristy*, 2001, 632 p.
36. Stepanova L.V. Mathematical methods of fracture mechanics. *Moscow, Fizmatlit*, 2009, 336 p.
37. Milne I., Ritchi R.O., Karihaloo B.L. Comprehensive Structural Integrity, *Amsterdam: Elsevier*, 2003, 5232 p.
38. Hill R. The mathematical theory of plasticity. *Oxford, New York: Oxford University Press*, 1950. Reprinted 2004, 355 c.
39. Sokolovsky W.W. The theory of plasticity. *Moscow, Higher School*, 1969, 608 p.
40. Trapp M., Ochsner A. Computational Plasticity for Finite Elements: A Fortran – Based Introduction. *Springer International Publishing*, 2018, 99 p.
41. Saxena A. Advanced fracture mechanics and structural integrity. *Boca Raton: CRC Press*, 2019, 307 p.
42. Dai Y., Liu Y., Qin F., Chao Y.J. C(t) dominance of the mixed I/II creep crack. Part I. Transient creep. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, vol. 103, 102314. DOI:10.1016/J.TAFMEC.2019.102314
43. Dai Y., Liu Y., Qin F., Chao Y.J., Qian G. C(t) dominance of the mixed I/II creep crack. Part II. Extensive creep. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 106, 102489. DOI: 10.1016/J.TAFMEC.2020.102489
44. Astafjev V.I., Stepanova L.V., Shesterikov S.A. Crack tip asymptotic character of anti-plane stress and strain rate for linear fractional constitutive relations. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1996, vol. 24, iss. 3, pp. 263-268. DOI: 10.1016/0167-8442(95)00049-6.
45. Sanders J.W., Dadfarnia M., Sehitoglu H., Stubbins J., Sofronis P. On the stress ahead of a stationary crack tip during the transition from primary to secondary creep. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 193-194, pp. 455-473. DOI: 10.1016/J.IJSSOLSTR.2020.02.040
46. Petuchov D.S., Keller I.E. Dvojtvennyye zadachi ploskih polzushhih techenij stepennoj neszhimaemoj sredy [Dual plane problems for creeping flow of power-law incompressible medium]. *Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2016, vol. 20, no. 3, pp. 496-507. DOI: 10.14498/vsgtu1508
47. Loghin A., Joseph P. Mixed mode fracture in power law hardening materials for plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, vol. 139, 103890. DOI:10.1016/j.jmps.2020.103890