

Юрлова Н.А., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлов М.А. Численный алгоритм поиска компоновок электроупругих тел с внешними электрическими цепями для получения наилучших демпфирующих характеристик // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 3. С. 108-124. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.11

Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A. Numerical algorithm for searching for layouts of electroelastic bodies with external electric circuits for obtaining the best damping properties. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 3, pp. 108-124. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.11



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.11

УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КОМПОНОВОК ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛ С ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ НАИЛУЧШИХ ДЕМПФИРУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Н.А. Юрлова, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, М.А. Юрлов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 25 мая 2020 г.
Принята: 31 августа 2020 г.
Опубликована: 09 ноября 2020 г.

Ключевые слова:

электроупругость, пьезоэлемент, внешние электрические цепи, собственные колебания, оптимальное размещение, демпфирование колебаний, численное моделирование.

АННОТАЦИЯ

В работе представлен алгоритм, основанный на решении задачи о собственных колебаниях, позволяющий находить компоновки электромеханических систем, обеспечивающие наилучшее демпфирование колебаний либо одной заданной моды, либо их совокупности в пределах некоторого непрерывного диапазона частот. Под электромеханической системой понимается упругая конструкция с размещенными на ее поверхности пьезоэлементами, к электродированным поверхностям которых присоединены пассивные электрические цепи. Пьезоэлектрические элементы, зашунтированные электрической цепью, при этом являются устройствами, на которых происходит диссипация энергии, и тем самым осуществляется демпфирование колебаний. Изменение демпфирующих свойств такой системы может быть достигнуто за счет выбора параметров электрической цепи и соответствующего расположения пьезоэлемента, позволяющего обеспечить наибольший отток электрической энергии во внешнюю электрическую цепь. В статье приведена математическая постановка задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электроупругих тел, зашунтированных внешними пассивными электрическими цепями, решением которой являются комплексные собственные частоты колебаний, с действительной частью, представляющей собой частоту, и мнимой – показатель демпфирования колебаний. Предложены методики определения места расположения пьезоэлемента на поверхности конструкции и параметров внешней электрической цепи, шунтирующей пьезоэлемент, на основе полученных при решении задачи о собственных колебаниях значений комплексных собственных частот. Предложенный подход продемонстрирован на примере оболочки в форме полуцилиндра, к поверхности которой присоединен пьезоэлемент в форме сегмента кольца, выполненный из пьезокерамики PZT-4, к электродированным поверхностям которого присоединена последовательная резонансная (RL -) электрическая цепь. Поставленная задача решается численно методом конечных элементов с использованием возможностей коммерческого пакета программ ANSYS.

© ПНИПУ

© Юрлова Наталья Алексеевна – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., e-mail: yurlova@icmm.ru, ID: 0000-0003-3497-0358.

Ошмарин Дмитрий Александрович – м.н.с., e-mail: oshmarin@icmm.ru, ID: 0000-0002-9898-4823.

Севодина Наталья Витальевна – к.т.н., н.с., e-mail: natsev@icmm.ru, ID: 0000-0001-9374-7135.

Юрлов Максим Александрович – инж.-исслед., e-mail: yurlov@icmm.ru, ID: 0000-0003-1507-6617.

Nataliia A. Yurlova – CSc in Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: yurlova@icmm.ru, ID: 0000-0003-3497-0358.

Dmitrii A. Oshmarin – Junior Research, e-mail: oshmarin@icmm.ru, ID: 0000-0002-9898-4823.

Nataliya V. Sevodina – CSc in Technical Sciences, Researcher, e-mail: natsev@icmm.ru, ID: 0000-0001-9374-7135.

Maksim A. Yurlov – Research Engineer, e-mail: yurlov@icmm.ru, ID: 0000-0003-1507-6617.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

NUMERICAL ALGORITHM FOR SEARCHING FOR LAYOUTS OF ELECTROELASTIC BODIES WITH EXTERNAL ELECTRIC CIRCUITS FOR OBTAINING THE BEST DAMPING PROPERTIES

N.A. Iurlova, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina, M.A. Iurlov

Institute of Continuous Media Mechcaics UB RAS, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 25 May 2020
Accepted: 31 August 2020
Published: 09 November 2020

Keywords:

electroelasticity, piezoelectric element, external electric circuits, natural vibrations, optimal location, vibration damping, numerical modelling.

ABSTRACT

This paper presents an algorithm which allows finding such layouts of electromechanical systems that provide the best vibration damping whether for one mode or a set of vibration modes within some continuous frequency ranges. The basis for the algorithm is the problem solution about natural vibrations. An elastic structure with a piezoelectric element located on its surfaces, which electrodes are connected to a passive external electric circuit, is treated as an electromechanical system. The piezoelectric elements shunted with an electric circuit are the devices where energy dissipation occurs, thus leads to damping of vibrations. A change in damping properties of such systems can be reached by a proper choice of parameters of the electric circuits and corresponding location of the piezoelectric element, which provides the highest energy withdrawal into the electric circuit. The paper presents the mathematical formulation of the natural vibrations problem for piecewise-homogeneous electroelastic bodies shunted with passive external electric circuits. Within the proposed mathematical statement, the problem solution of natural vibrations for such objects is based on values of complex natural vibration frequencies. Real parts of the complex natural vibration frequencies are the circular frequency of vibrations, and the imaginary parts are the damping indices of vibrations. We proposed techniques aimed at determining the location of the piezoelectric element and selecting parameters of shunting the external electric circuit. These approaches are based on values of the complex natural vibration frequencies obtained as results of solving the natural vibrations problem. The proposed approach is demonstrated using a specimen of a thin-walled shell in the semi-cylinder form. The piezoelectric element has a form of a segment of a ring made of PZT-4 piezoceramics. Electrodes of the piezoelectric element are connected to the series resonant RL -circuit. The formulated problem is solved numerically using the finite element method and ANSYS commercial package.

© PNRPU

Введение

Концепция smart-технологий, которой в последнее время уделяется большое внимание в научных исследованиях и в различных практических приложениях, является относительно новой. Smart-технологии основаны на дополнении конструкций элементами, выполненными из материалов, которые изменяют свои свойства в зависимости от внешнего воздействия различной природы и позволяют регистрировать эти изменения. К таким материалам можно отнести сплавы с памятью формы, пьезоэлектрические материалы, магнитные материалы и т.п. Возможность регистрации изменений характеристик данных функциональных материалов позволяет осуществлять функции управления механическим поведением конструкций в целом. Конструкции, в которых применены такие технологии, известны в литературе как smart-конструкции, интеллектуальные, чувствительные, многофункциональные или адаптивные.

Smart-конструкции, в состав которых входят элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов, достаточно широко применяются для демпфирования колебаний [1–7], сбора и накопления энергии [8–10], создания устройств управления геометрическими параметрами конструкций [11–14], мониторинга состояния конструкций [14–18] и т.д. Подавляющее большинство

прикладных задач, в которых использование пьезоэлектрических элементов показало свою высокую эффективность, подразумевает работу конструкций в динамических режимах (собственные или вынужденные колебания) [1–18].

Присоединенные к механической конструкции пьезоэлектрические элементы, к электродированным поверхностям которых подключена внешняя электрическая цепь, являются устройствами, на которых происходит диссипация энергии, и тем самым осуществляется демпфирование колебаний конструкции. Варьируя параметры полученной системы, отвечающие за степень преобразования механической энергии в электрическую и за способность рассеивать ее в виде теплового и электромагнитного излучения, можно добиться наилучших демпфирующих характеристик рассматриваемых объектов в заданных условиях (например, для демпфирования определенной моды колебаний).

Среди таких параметров одним из важнейших является место расположения пьезоэлемента на конструкции. Как известно, неудачное расположение пьезоэлемента может приводить к тому, что он либо не сможет обеспечить в достаточной для управления мере преобразования механической энергии колебаний в электрическую, либо будет являться причиной некорректного отклика электромеханической системы на внешнее воз-

действие (раскачивание вместо демпфирования колебаний) [19–22].

Проблеме размещения пьезоэлемента на конструкции посвящено множество работ, обзор которых приведен в [20], однако к настоящему времени некоторого универсального подхода, позволяющего однозначно определять наилучшее месторасположение пьезоэлемента вне зависимости от цели его применения, на данный момент не предложено.

Среди большого разнообразия прикладных задач, для решения которых эффективно применяются элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов, является демпфирование колебаний [1–7]. Можно выделить следующие основные варианты реализации механизмов демпфирования колебаний: активный [1, 5], пассивный [2, 3, 5–7, 23], полуактивный или гибридный [4, 5]. Суть активного подхода заключается в подаче на электроды пьезоэлемента управляющего электрического сигнала с характеристиками, обеспечивающими требуемый отклик конструкции [1, 5]. Реализация пассивных методик управления динамическим поведением конструкций заключается в присоединении к электродам пьезоэлемента электрической цепи, состоящей из различным образом соединенных резистивных (резисторы), индуктивных (катушки индуктивности или гираторы) и емкостных (конденсаторы) элементов [2–3, 5–7]. Под пассивностью в данном случае подразумевается отсутствие дополнительных источников энергии, питающих электрическую цепь. Данная методика названа шунтированием, а соответствующие электрические цепи – шунтирующими [2, 5]. Гибридные или полуактивные подходы к демпфированию подразумевают совместное использование пассивных электрических цепей и переключателей [4, 5]. При обычных режимах работы конструкции переключатели разомкнуты, т.е. ток от пьезоэлемента в электрическую цепь не поступает. При замыкании переключателя часть энергии колебаний начинает отводиться во внешнюю цепь.

Самым простым, но тем не менее весьма эффективным способом улучшения диссипативных характеристик конструкций является применение пассивного демпфирования колебаний с помощью шунтирующих пьезоэлемент электрических цепей. В данном случае основной задачей становится определение конфигурации цепи (типов элементов, их количества и способа их соединения) и подбор параметров ее элементов, при которых достигается наилучшее демпфирование заданной моды колебаний [2, 3, 5–7]. Требования к дизайну шунтирующей цепи могут быть сведены к следующим: шунтирующая цепь должна демпфировать механические колебания максимально эффективно, при этом должна быть гарантирована ее стабильность; поскольку цепь интегрируется в конструкцию, то размер и вес ее компонент должны быть минимальными [5].

Исследования, проведенные за последние несколько десятилетий, позволили определить ряд простых конфигураций шунтирующих цепей, позволяющих наибо-

лее эффективно демпфировать колебания [4]. Для решения прикладных задач наиболее часто используются резистивные R -цепи, состоящие из одного резистора [2], и резонансные RL -цепи, состоящие из последовательно или параллельно соединенных резистивного и индуктивного элементов [2, 3]. В результате задача обеспечения демпфирования заданной моды колебаний сводится к подбору значения сопротивления (в случае R -цепи) либо значений индуктивности и сопротивления (в случае RL -цепи).

В начале 90-х гг. прошлого века исследователи Nagood и von Flotow опубликовали работу [2], в которой были описаны ключевые особенности динамического поведения конструкций с пьезоэлементами, зашунтированными R -цепями (резистивными) и последовательными RL -цепями (резонансными). На основе использования положений и методик теории автоматического управления ими был предложен подход к подбору параметров шунтирующих цепей, заключающийся в оптимизации характеристик передаточной функции электромеханической системы. Данный подход до сих пор широко используется исследователями для задач анализа динамического поведения такого рода систем и для подбора оптимальных параметров шунтирующих цепей [24–27]. Однако он не является единственным при анализе динамического поведения электромеханических систем. Так, например, в работах [7, 28] предлагается осуществлять подбор параметров шунтирующей цепи на основе анализа обобщенного коэффициента электромеханической связи, в [29] – оптимального распределения потенциала при вращении консольно-защемленной балки, а в работах [30–32] – комплексных собственных частот колебаний такого рода объектов.

Как отмечается в [2], использование пьезоэлементов, зашунтированных резистивными цепями, приводит к тому, что динамическое поведение конструкции становится таким же, как при замене упругого материала конструкции вязкоупругим.

Применение же резонансных RL -цепей, состоящих из последовательно либо параллельно соединенных катушки индуктивности и резистора, приводит к образованию электрического колебательного контура, обусловленного взаимодействием индуктивности внешней электрической цепи и собственной емкости пьезоэлемента, что приводит к возникновению в спектре частот колебаний системы дополнительной резонансной частоты (собственной частоты колебательного контура).

Путем изменения параметров элементов внешней электрической цепи можно производить настройку частоты колебательного контура на частоту, совпадающую с собственной частотой колебаний конструкции, обеспечивая отвод энергии колебаний во внешнюю электрическую цепь, и тем самым эффективно подавлять колебания системы на данной частоте. Однако на практике чаще всего к конструкциям предъявляются требования отсутствия либо демпфирования колебаний в некотором диапазоне частот возбуждающего воздействия.

Поэтому развитие способов мультимодального (на нескольких частотах) демпфирования колебаний конструкции является весьма актуальным. На сегодняшний день можно условно выделить следующие основные подходы к мультимодальному демпфированию:

- использование одного пьезоэлемента и сложной внешней электрической цепи, в которой реализована тем или иным способом возможность демпфирования нескольких мод колебаний [33–35];

- применение нескольких пьезоэлементов, образующих единую сеть, соединенных тем или иным способом с одной внешней электрической цепью [36–38];

- несколько пьезоэлементов имеют каждый свою отдельную электрическую цепь, которые не объединяются [39–42].

Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки.

Так, например, при использовании сложных разветвленных цепей существенно возрастает сложность их настройки, поскольку каждая ветвь шунтирующей цепи не может рассматриваться как отдельный независимый шунт [43]. В этом случае можно использовать блокирующие либо проводящие цепи, подключенные последовательно к шунтирующим ветвям [44, 45], что позволит рассматривать их как независимые. Однако при технической реализации это приводит к очень громоздким электрическим схемам за счет использования большого числа индуктивных элементов, что неизбежно сказывается на массовых характеристиках демпфирующих устройств. Использование электронных аналогов индуктивных элементов помогает, в какой-то мере, обойти данную проблему, но в силу того, что они являются лишь приближенным представлением идеальных индуктивных элементов, это не устраняет проблемы сложности настройки и подбора параметров цепи [35].

Применение нескольких пьезоэлементов с присоединенными к ним простыми RL -цепями позволяет обойти проблему сложности настройки цепей, поскольку в этом случае каждый пьезоэлемент с присоединенной цепью представляет собой изолированную систему, что позволяет подбирать параметры шунтирующих цепей независимо друг от друга. Тем не менее в [33] показано, что в случае мультимодального демпфирования данный подход не всегда эффективен, так как использование большого числа пьезоэлементов может привести к существенному увеличению массы конструкции и крайне негативно сказаться на ее динамических характеристиках.

Таким образом, на сегодняшний день ряд проблем, связанных с применением пьезоэлементов и внешних электрических цепей для демпфирования нескольких мод колебаний, требует дальнейшего исследования и разработки новых подходов к реализации мультимодального демпфирования.

В рамках данной работы предложен численный алгоритм, позволяющий определить такие компоновки электромеханических систем, которые будут проявлять

наилучшие демпфирующие свойства при заданных условиях их использования. Под электромеханической системой понимается упругая конструкция, на поверхности которой располагается пьезоэлемент, выполненный из электроупругого материала. Электродированные поверхности пьезоэлемента соединены с внешней электрической цепью.

Представленный алгоритм основан на результатах решения задачи о собственных колебаниях, которая для различных приложений приведена в работах В.П. Матвеевко с соавторами: для кусочно-однородных вязкоупругих тел [46], упругих, взаимодействующих с жидкостью [47, 48], электроупругих, в том числе с внешними электрическими цепями [49].

Наилучшие демпфирующие характеристики электромеханической системы обеспечиваются путем соответствующего выбора места расположения пьезоэлемента на поверхности конструкции и значений параметров элементов внешней электрической цепи. Место расположения пьезоэлемента определяется таким образом, чтобы достигалась наибольшая степень преобразования энергии для одной заданной моды колебаний либо обеспечивался достаточный уровень преобразования на всех модах колебаний, входящих в некоторый непрерывный частотный диапазон. При этом параметры внешней электрической цепи должны обеспечивать максимальный отвод электрической энергии с ее последующим рассеянием в виде тепла и электромагнитного излучения.

1. Математическая постановка задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электроупругих тел с внешними электрическими цепями

Построение математической модели, описывающей собственные колебания электромеханической системы с распределенными параметрами с помощью подходов механики сплошных сред, базируется на вариационном уравнении движения, сформулированном на основе соотношений линейной теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла [50–52]. Для этого рассматриваемая электромеханическая система представляется в виде кусочно-однородного тела объемом $V = V_{str} + V_{pz}$, где V_{str} представляет собой объем конструкции, а V_{pz} – объем пьезоэлектрических элементов. В результате, вариационное уравнение движения будет иметь следующий вид [49–52]:

$$\int_{V_{pz}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_{pz} \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_{str}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{str} \ddot{u}_i \delta u_i) dV = \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS + \int_{S_e} q_e \delta \varphi dS. \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения: D_i , E_i – компоненты векторов электрической индукции и напря-

женности электрического поля; σ_{ij} – компоненты симметричного тензора напряжений Коши; ε_{ij} – компоненты тензора линейных деформаций; u_i – компоненты вектора перемещений; ρ_{str} – удельная плотность материала конструкционной составляющей кусочно-однородного тела объема V_{str} ; ρ_{pz} – удельная плотность материала пьезоэлектрической составляющей кусочно-однородного тела объемом V_{pz} ; S_σ – часть поверхности тела объемом V , на которой заданы поверхностные усилия p_i ; $S_{pz} = S_{el} + S_0$ – поверхность пьезоэлектрического тела объемом V_{pz} , где S_{el} – электродированная и S_0 – неэлектродированная ее части; q_e – поверхностная плотность свободных зарядов; φ – электрический потенциал; δ – вариация соответствующей переменной.

Связь между компонентами вектора перемещений и компонентами тензора деформаций описывается дифференциальными соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2)$$

Для электрического поля выполняется условие потенциальности:

$$E_j = -\varphi_{,j}. \quad (3)$$

Определяющие соотношения для пьезоэлектрической части объема V_{pz} :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^{pz} \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k, \\ D_k &= \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ki} E_i. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь C_{ijkl}^{pz} – компоненты тензора упругих констант пьезоэлемента; β_{ijk} и ε_{ki} – компоненты тензоров пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).

В случае, если материал упругой части V_{str} кусочно-однородного тела является изотропным, определяющие соотношения будут иметь вид (5)

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} \right), \quad \sigma = B \vartheta. \quad (5)$$

Если материал упругой части V_{str} кусочно-однородного тела обладает свойством анизотропии, для определения связи компонент тензора напряжений с компонентами тензора деформаций справедливы соотношения:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{el} \varepsilon_{kl}. \quad (6)$$

Здесь $\sigma = \sigma_{jj} / 3$ – среднее напряжение; ϑ – объемная деформация; G, B – модуль сдвига и модуль объемного

сжатия материала конструкции; C_{ijkl}^{el} – компоненты тензора упругих констант материала конструкции.

Через электродированные поверхности к рассматриваемой системе могут быть присоединены электрические цепи, включающие элементы сопротивления (R), емкости (C) и индуктивности (L). Если к этим цепям не подведены внешние источники энергии, то они будут являться внутренними элементами системы (конструкции с пьезоэлементом и шунтирующей цепью), и тогда в уравнение (1) должно быть добавлено слагаемое, которое учитывает сумму всех работ электрического поля с разностью потенциалов $\pm \varphi$ по перемещению любого возможного заряда на элементах внешней электрической цепи [30, 31, 49]. Таким образом, вариационное уравнение движения электроупругого тела с внешними электрическими цепями примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{V_{pz}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_{pz} \dot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_{str}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{str} \dot{u}_i \delta u_i) dV + \\ & + \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{L_p} \iint (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta \varphi dt + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{R_q} \int (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi dt + \\ & + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS + \int_{S_{el}} q_e \delta \varphi dS. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\varphi_1^{el} - \varphi_2^{el}$ – разность потенциалов на соответствующем элементе внешней цепи $el = L_p, R_q, C_r$; n_L, n_R, n_C – количество индуктивных, резистивных и емкостных элементов соответственно; L_p, R_q, C_r – значение индуктивности, сопротивления или емкости соответствующего элемента цепи [30, 31, 49]. В этом случае электрическая цепь рассматривается как внутренний элемент системы.

При рассмотрении движения кусочно-однородного тела с электрической цепью под действием только внутренних усилий, что эквивалентно режиму свободных или собственных колебаний, все граничные условия могут принимать только нулевые значения, что приводит к равенству нулю соответствующих поверхностных интегралов в уравнениях (1) и (7). Данное условие для компонент механических полей (перемещения и механические напряжения) математически может быть выражено следующим образом:

$$\begin{aligned} S_\sigma : \quad & \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{или} \quad \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0, \\ S_u : \quad & u_i = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где S_u – поверхность, на которой задаются нулевые значения компонент вектора перемещения u_i . Для компонент электрических полей (электрический потенциал и электрическая индукция) отсутствие внешних нагрузок можно выразить в виде следующих соотношений для граничных условий:

$$S_0 : \quad \int_{S_0} n_i D_i dS = 0 \quad \text{или} \quad D_{i,i} = 0,$$

$$S_{el}^0 : \varphi = 0, \\ S_{el}^Q : n_i D_i = 0 \text{ или } \int_{S_{el}^Q} q_e \delta \varphi dS = 0. \quad (9)$$

С учетом соотношений (8), (9) вариационное уравнение движения (7) для задачи о собственных колебаниях примет следующий вид:

$$\int_{V_{pz}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_{pz} \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \\ + \int_{V_{str}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{str} \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \\ + \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{L_p} \iint (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta \varphi dt + \\ + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{R_q} \int (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi dt + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = 0 \quad (10)$$

Пусть решение задачи о собственных колебаниях отыскивается в виде

$$u(x, t) = u(x) e^{-i\omega t}, \quad (11)$$

где $u(x) = \{u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3), \varphi(x_1, x_2, x_3)\}$ – обобщенный вектор состояния, содержащий компоненты механических перемещений u_1, u_2, u_3 и электрический потенциал φ ; $\omega = \omega_{re} + i\omega_{im}$ – комплексная собственная частота колебаний конструкции, в которой ω_{re} является круговой собственной частотой колебаний, а ω_{im} – показателем демпфирования, характеризующим скорость затухания колебаний.

Численная реализация поставленной задачи осуществляется методом конечных элементов (МКЭ) [53]. В результате использования типовых процедур МКЭ вариационная задача о собственных колебаниях, описываемая уравнениями (2)–(6), (10), сводится к алгебраической проблеме собственных значений для матричного уравнения вида (12)

$$([K] + [K_p] - \omega^2 [M] - \\ - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} [K_{L_p}] + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} [K_{R_q}] + \\ + \sum_{r=1}^{n_C} C_r [K_{C_r}]) \{u\} = \{0\}, \quad (12)$$

где $[K], [K_p], [M]$ – соответственно матрицы жесткости упругого тела и пьезоэлемента и матрица масс конструкции; $[K_{L_p}], [K_{R_q}], [K_{C_r}]$ – матрицы жесткости элементов электрической цепи, которые имеют размерность глобальной матрицы жесткости, но содержат только коэффициенты (1) и (–1) лишь на тех позициях, которые относятся к узловым переменным соответствующих элементов.

Поставленная задача решается с помощью разработанного авторами специального алгоритма, в котором для использования возможностей коммерческого пакета программ ANSYS [30] написаны макросы на языке APDL, и программы на языке FORTRAN. При выборе алгоритма решения алгебраической проблемы собственных значений необходимо учитывать большую размерность алгебраической задачи, возможность решения алгебраической проблемы комплексных собственных значений. Следует отметить, что для рассматриваемых задач имеет смысл решать только частичную проблему собственных значений, т.е. определять не весь спектр собственных частот, а только какую-то его часть.

Последнее обстоятельство выдвигает жесткое условие, состоящее в том, что собственные значения должны быть гарантированно определены либо в заданном интервале, либо в требуемой последовательности, например, в порядке возрастания действительных частей в случае комплексных собственных значений. С учетом вышесказанного, для решения поставленной задачи использовался метод Мюллера [54]. Подробно математическая постановка задачи и алгоритм ее численной реализации приведены в работах [30, 31, 49].

Таким образом, в результате решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электроупругих тел при наличии и при отсутствии внешних электрических цепей получаем спектр комплексных собственных частот колебаний.

2. Численный алгоритм поиска параметров, обеспечивающих наилучшие демпфирующие свойства кусочно-однородных электроупругих тел с внешними электрическими цепями

Знание комплексных собственных частот колебаний конструкции позволяет построить эффективный алгоритм поиска наилучших диссипативных характеристик такого рода электромеханических систем. Обеспечить такие характеристики оказывается возможным за счет соответствующего подбора двух групп параметров электромеханической системы. Первая группа параметров относится к характеристикам, определяющим место размещения пьезоэлемента на конструкции, при котором обеспечивается наибольшее по величине преобразование механической энергии в электрическую. Второй группой параметров являются значения характеристик элементов цепи, при которых отток электрической энергии от конструкции во внешнюю электрическую цепь будет также наибольшим.

Данный алгоритм включает в себя последовательное применение двух методик: определения места расположения пьезоэлемента на конструкции и затем – параметров внешних электрических цепей. При этом методика определения места расположения пьезоэлемента на конструкции основана на использовании действительных собственных частот колебаний рассматриваемого кусочно-однородного электроупругого тела

при отсутствии внешней электрической цепи, а определение величины параметров электрической цепи – на использовании мнимой части комплексной собственной частоты колебаний при подключенной к системе внешней электрической цепи. Обе методики могут применяться для демпфирования колебаний как на одной моде, так и на нескольких модах колебаний, входящих в заданный частотный диапазон.

2.1. Методики определения размещения пьезоэлемента на конструкции

2.1.1. Размещение пьезоэлемента для демпфирования одной моды колебаний

Как известно, степень демпфирования колебаний при использовании зашунтированных пьезоэлементов зависит не только от значений параметров элементов электрических цепей, но и от размещения пьезоэлементов на поверхности конструкции [19].

В задачах пассивного управления диссипативными свойствами кусочно-однородных электроупругих тел эффективность работы пьезоэлемента оценивается с точки зрения того, какая доля механической энергии колебаний может быть преобразована в энергию электрического поля благодаря присущему ему пьезоэффекту (и, соответственно, наоборот). Наиболее удобным и распространенным параметром, характеризующим это преобразование, происходящее в процессе деформирования пьезоэлемента, является коэффициент электромеханической связи (КЭМС) [2, 55].

Он определяется величиной собственных частот колебаний конструкции с пьезоэлементом в режимах холостого хода (open circuit, далее – $\omega_{o/c}$) и короткого замыкания (short circuit, далее – $\omega_{s/c}$):

$$K = \sqrt{\frac{\omega_{o/c}^2 - \omega_{s/c}^2}{\omega_{s/c}^2}}. \quad (13)$$

Значения собственных частот колебаний $\omega_{o/c}$ и $\omega_{s/c}$ могут быть получены на основе решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электроупругих тел без внешних цепей в постановке (1)–(6) с нулевыми граничными условиями вида (8)–(9).

Значения КЭМС принимают различные значения в зависимости от расположения пьезоэлемента. Это обусловлено неоднородностью деформации конструкции при ее колебаниях.

При использовании данной величины место размещения пьезоэлемента, обеспечивающее наибольшую эффективность его работы, будет определяться наибольшим значением КЭМС из всех возможных мест размещения пьезоэлемента на конструкции [56]:

$$K_{opt} = K_{max i} = \max(K_i). \quad (14)$$

Поскольку эффективность работы пьезоэлемента определяется степенью его деформации, которая,

в свою очередь, зависит от деформации конструкции, для различных мод колебаний i максимальное значение коэффициента $K_{max i}$ будет достигаться при разных расположениях пьезоэлемента. В результате, размещенный таким образом пьезоэлемент будет обеспечивать наилучшее демпфирование колебаний только одной i -й моды колебаний.

В рамках предлагаемого подхода поиск места расположения пьезоэлемента, при котором будет достигаться максимальное значение коэффициента электромеханической связи, осуществляется на основе метода сканирования (прямой поиск).

Для этого на поверхности конструкции в области, в которой можно расположить пьезоэлемент, строится сетка, узлами которой являются координаты (x_1, x_2, x_3) центра масс пьезоэлемента. После этого в узлах сетки численно на основе метода конечных элементов для соответствующей i -й моды колебаний кусочно-однородной электроупругой конструкции определяются значения собственных частот в режимах холостого хода и короткого замыкания $\omega_{o/c}$ и $\omega_{s/c}$. На их основе в соответствующем узле сетки определяются значения коэффициентов электромеханической связи по формуле (13).

В результате получаем сеточную функцию $K_i(x_1, x_2, x_3)$, которая определяет зависимость коэффициента электромеханической связи K_i i -й моды колебаний от координат центра масс пьезоэлемента (x_1, x_2, x_3) . Координаты оптимального расположения центра масс пьезоэлемента определяют координаты узла сетки, в котором достигается максимальное значение полученной сеточной функции $K_i(x_1, x_2, x_3)$.

Для поиска максимального значения полученной сеточной функции $K_i(x_1, x_2, x_3)$ используются стандартные процедуры пакета Matlab.

2.1.2. Размещение пьезоэлемента для демпфирования нескольких мод колебаний в заданном частотном диапазоне

Возможность демпфирования нескольких мод колебаний при помощи одного пьезоэлемента имеет очевидные преимущества перед традиционными (при помощи нескольких пьезоэлементов, настроенных на каждую демпфируемую частоту в отдельности) в силу того, что изменение массы за счет использования одного пьезоэлемента оказывается минимальным, а настройка внешней цепи сводится к нахождению всего двух параметров – сопротивления резистора и индуктивности катушки. Однако при этом расположение пьезоэлемента в конструкции играет особую роль.

Для реализации изменения демпфирующих характеристик конструкции в некотором диапазоне частот необходимо разместить пьезоэлемент таким образом, чтобы он обеспечивал достаточный уровень преобразо-

вания механической энергии колебаний в электрическую для последующего его рассеяния во внешней электрической цепи.

С этой целью модифицируем способ, предложенный для размещения пьезоэлемента при его использовании для демпфирования одной моды колебаний, на случай применения его для демпфирования нескольких мод колебаний, реализующихся в некотором заданном диапазоне частот [57].

Определим значения сеточных функций коэффициентов электромеханической связи $K_i(x_1, x_2, x_3)$, полученных при изменении расположения пьезоэлемента на поверхности конструкции с размещением его центра масс в узлах сетки (x_1, x_2, x_3) , для тех собственных частот колебаний, которые входят в рассматриваемый частотный диапазон. При этом полученные значения $K_i(x_1, x_2, x_3)$ демонстрируют, что максимальные значения для разных частот колебаний наблюдаются при различных расположениях пьезоэлемента.

Для размещения пьезоэлемента на конструкции таким образом, чтобы реализовать улучшение ее диссипативных характеристик в некотором заданном диапазоне частот, предложен параметр P , характеризующий суперпозицию распределений коэффициентов электромеханической связи для всех собственных частот, входящих в рассматриваемый диапазон [57]:

$$P = \sum_{i=n_p}^{n_k-1} \left\{ \sum_{q=i+1}^{n_k} [(K_i + K_q) - |K_i - K_q|] \right\}. \quad (15)$$

Здесь n_p, n_k – начальный и конечный (в общей нумерации собственных частот колебаний системы) номер частот из рассматриваемого диапазона; $K_i (i = n_p, \dots, n_k)$ – коэффициент электромеханической связи для каждой точки возможного места расположения центра масс пьезоэлемента при рассматриваемых частотах колебаний.

Параметр P является функцией координат (x_1, x_2, x_3) , определяющих положение центра масс пьезоэлемента на поверхности конструкции S , где возможно его размещение. Максимальное значение параметра P для заданного диапазона спектра собственных частот колебаний обеспечит наилучшее демпфирование мод колебаний, входящих в рассматриваемый частотный диапазон:

$$P_{\max} = \max_{(x_1, x_2, x_3) \in S} P. \quad (16)$$

В силу различных причин (например, симметрии объекта) возможно существование нескольких вариантов размещения пьезоэлемента m , для которых P_{\max} равны или близки друг к другу по величине. Для выбора наилучшего из них предлагается следующий алгоритм.

Для каждого j -го ($j = 1, \dots, m$) варианта расположения пьезоэлемента выбирается совокупность значений $K_i^{(j)}$, которые соответствуют коэффициенту электромеханической связи i -й собственной частоты колебаний. Затем вычислим сумму разностей значений $K_{\max i}$, определяемых по формуле $K_{\max i} = \max_{(x_1, x_2, x_3) \in S} K_i^{(j)}$, и значений $K_i^{(j)}$:

$$\Delta_j = \sum_{i=n_p}^{n_k} (K_{\max i} - K_i^{(j)}). \quad (17)$$

В итоге выбирается вариант, обеспечивающий минимальное значение Δ_j .

$$\Delta_{\min} = \min_{j=1, m} \Delta_j. \quad (18)$$

2.2. Методики определения параметров электрической цепи

2.2.1. Демпфирование одной моды колебаний

После определения места расположения пьезоэлемента на конструкции, при котором доля преобразования механической энергии колебаний в электрическую наибольшая, необходимо обеспечить ее наибольший отток во внешнюю электрическую цепь для последующего рассеяния в виде тепла и электромагнитного излучения, создавая тем самым дополнительный фактор, повышающий диссипативные характеристики рассматриваемой электромеханической системы.

Для этого необходимо определить величину параметров внешней электрической цепи (шунтирующей пьезоэлемент), которые позволят отток электрической энергии сделать максимальным.

Традиционно подходы к подбору параметров шунтирующей цепи основываются на анализе передаточной функции, построенной для рассматриваемой системы с шунтированным пьезоэлементом [2–5, 24–27].

Предлагаемый в настоящей работе способ определения параметров шунтирующей цепи основан на анализе результатов решения задачи о собственных колебаниях электроупругих конструкций с внешними электрическими цепями в постановке (2)–(6), (8)–(12). Результатом решения данной задачи являются комплексные собственные частоты колебаний

$$\omega = \omega_{\text{Re}} + i \omega_{\text{Im}}. \quad (19)$$

В соответствии с выбранной формой записи решения (11) компоненты комплексных собственных частот (19) имеют следующий смысл: ω_{Re} – круговая частота собственных колебаний, ω_{Im} – показатель демпфирования, характеризующий скорость затухания колебаний.

Одним из самых распространенных вариантов внешних электрических цепей, используемых для

демпфирования колебаний, является последовательная резонансная RL -цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивности и резистора. Данная электрическая цепь, будучи присоединенной к пьезоэлементу, приводит к образованию электрического колебательного контура, обусловленного взаимодействием индуктивности внешней электрической цепи и собственной емкости пьезоэлемента. Результатом этого взаимодействия является возникновение в системе дополнительной моды колебаний, частота которой соответствует собственной частоте колебательного контура.

Использование методики определения параметров внешней цепи для демпфирования одной моды колебаний в случае последовательной RL -цепи приводит к тому, что значение дополнительной комплексной собственной частоты колебаний становится равным значению комплексной собственной частоты колебаний соответствующей демпфируемой моды [31]. При этом происходит демпфирование только этой моды колебаний [2, 5].

Анализ комплексных собственных частот колебаний различных вариантов кусочно-однородных электроупругих конструкций с внешними электрическими цепями позволил обнаружить, что при всех вариантах шунтирующих цепей мнимая часть комплексной собственной частоты колебаний имеет ярко выраженный экстремум [31], что является характерной особенностью динамического поведения таких объектов.

Параметры шунтирующей цепи, соответствующие данным экстремумам, будут обеспечивать наилучшее демпфирование соответствующей моды колебаний рассматриваемой электромеханической системы. Это позволило разработать методику определения параметров внешних шунтирующих цепей, обеспечивающих наилучшее демпфирование одной моды колебаний конструкции [31], основанную на результатах численного решения задачи о собственных колебаниях (2)–(6), (8)–(12).

Как и в случае с определением оптимального места расположения пьезоэлемента, для поиска значений параметров внешней цепи использовался метод сканирования (прямой поиск). С этой целью в пространстве параметров внешней электрической цепи строилась сетка, в узлах которой определялись значения комплексных собственных частот колебаний системы. После получения сеточной функции $\omega_{lm}(\overline{P_{cir}})$, где $\overline{P_{cir}}$ – вектор внешних параметров цепи, длина и компоненты которого зависят от конфигурации внешней цепи, требуемые значения параметров внешней цепи определяются согласно условию

$$\omega_{lm}^{opt} = \omega_{lm}^{max} = \max \left| \omega_{lm}(\overline{P_{cir}}) \right|. \quad (20)$$

Параметры внешней цепи, подобранные согласно условию (20), будут обеспечивать максимальную скорость затухания колебаний соответствующей моды.

Подробно предложенная методика подбора параметров внешней цепи представлена в [31].

2.2.2. Демпфирование нескольких мод колебаний в заданном частотном диапазоне

Определив положение пьезоэлемента, при котором обеспечивается его эффективная работа на всех частотах, входящих в рассматриваемый диапазон, найдем параметры внешней электрической цепи, при которых скорость снижения амплитуды колебаний на всех частотах из заданного диапазона будет одинакова. Иными словами, появляется возможность демпфировать несколько мод колебаний, реализующихся на частотах, входящих в заданный диапазон, с помощью одних и тех же средств.

Анализ влияния значений параметров индуктивности (L) и сопротивления (R) внешней последовательной резонансной RL -цепи на величину мнимых частей ω_{lm} комплексных собственных частот колебаний, относящихся к различным модам, позволил обнаружить новую характерную особенность динамического поведения. Эта особенность заключается в том, что в пространстве параметров L - R существуют точки с такими значениями параметров L_{eq} и R_{eq} , при которых значения ω_{lm} , относящиеся к разным модам, оказываются равными: $\omega_{lm}^i(R_{eq}, L_{eq}) = \omega_{lm}^j(R_{eq}, L_{eq})$, $i \neq j$. Анализ зависимостей $\omega_{lm}^i(R, L)$ позволил установить, что для некоторых мод имеется множество таких точек (R_{eq}, L_{eq}) , образующих пространственные кривые (линии) [58].

Это означает, что при значениях параметров внешней электрической цепи, соответствующих точкам совпадений, будет наблюдаться демпфирование с равной скоростью различных мод колебаний, реализующихся на рассматриваемых частотах.

В результате данного анализа была разработана методика определения параметров внешней последовательной RL -цепи, при которых возможно осуществить демпфирование нескольких мод колебаний [58].

Математически данное условие можно сформулировать следующим образом:

$$\max \left(\left| \omega_{lm}^i \right| = \dots = \left| \omega_{lm}^n \right| \right), \quad (21)$$

где i, \dots, n – номер демпфируемых одновременно мод колебаний.

Другими словами, значения параметров электрической цепи должны соответствовать точке в пространстве параметров R - L , в которой совпадающие модули показателей демпфирования нескольких мод колебаний максимальны.

Кратко предложенная методика определения параметров внешней электрической цепи, при которых наблюдается демпфирование нескольких мод колебаний, входящих в рассматриваемый частотный диапазон, может быть сформулирована следующим образом.

Для каждой моды колебаний конструкции в рассматриваемом диапазоне частот строятся функции мо-

дулей показателей демпфирования $|\omega_{lm}^i(R, L)|$ на сетке, узлами которой являются пары значений параметров сопротивления и индуктивности. После этого определяются узлы сетки (R_{eq}, L_{eq}) или совокупность узлов (линии), в которых параметры $|\omega_{lm}^i(R_{eq}, L_{eq})|$ для рассматриваемых мод колебаний принимают равные значения. Среди найденной совокупности точек (R_{eq}, L_{eq}) необходимо найти такую точку, в которой достигаются наибольшие значения $|\omega_{lm}^i(R_{eq}, L_{eq})|$. Эта точка и будет соответствовать оптимальным значениям параметров внешней электрической цепи, при которых будет возможно демпфирование нескольких мод колебаний.

3. Численная демонстрация методик, основанных на решении задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электроупругих систем, определяющих алгоритм улучшения их демпфирующих свойств

Проиллюстрируем предлагаемые методики определения места расположения пьезоэлемента на конструкции и параметров внешних электрических цепей на примере тонкостенной оболочки в форме полуцилиндра, жестко заземленной по торцам и свободно опертой по образующей (рис. 1).

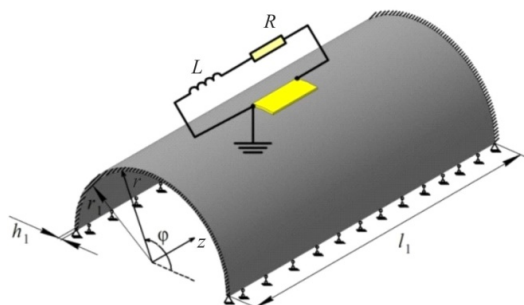


Рис. 1. Расчетная схема оболочки с пьезоэлементом, шунтированной последовательной RL -цепью

Fig. 1. Computational scheme of the shell with the piezoelectric element shunted with the series RL -circuit

Геометрические размеры оболочки: $r_1 = 76$ мм, $l_1 = 300$ мм, $h_1 = 0,25$ мм. Оболочка выполнена из упругого изотропного материала со следующими физико-механическими характеристиками: $E = 1,96 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,3$, $\rho = 7700$ кг/м³. К поверхности оболочки прикреплен пьезоэлемент с размерами: ширина 20 мм, толщина 0,36 мм, длина 50 мм. Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики PZT-4 с поляризацией в направлении оси r и следующими физико-механическими характеристиками в цилиндрической системе координат: $C_{11} = C_{22} = 13,9 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{12} = 7,78 \cdot 10^{10}$ Н/м²,

$C_{13} = C_{23} = 7,43 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{33} = 11,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{44} = 3,06 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{55} = C_{66} = 2,56 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\beta_{31} = \beta_{32} = -5,2$ Кл/м², $\beta_{33} = 15,1$ Кл/м², $\beta_{52} = \beta_{61} = 12,7$ Кл/м², $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 6,45 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\varepsilon_{33} = 5,62 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\rho = 7500$ кг/м³. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы. К электродированным поверхностям пьезоэлемента присоединена внешняя последовательная RL -цепь (см. рис. 1).

При решении задачи методом конечных элементов в пакете прикладных программ ANSYS расчетная модель электромеханической системы состояла из объемных 20 узловых элементов в виде параллелепипеда с квадратичной аппроксимацией неизвестных переменных как по компонентам вектора перемещений $u_i(\bar{x})$, так и по потенциалу $\phi(\bar{x})$. Количество уравнений в разрешающей системе составило 3810 и 3808 при наличии внешней последовательной электрической цепи и без нее соответственно. Степень дискретизации, соответствующая данному количеству уравнений, была выбрана на основе анализа асимптотической сходимости получаемых результатов, которая не превышала 1 %. Точность расчетов по методу Мюллера для комплексных собственных частот колебаний составила $\varepsilon = 10^{-3}$.

Рассмотрим два варианта демпфирования колебаний рассматриваемой электромеханической системы:

- расположение пьезоэлемента на оболочке и параметры внешней электрической цепи обеспечивают демпфирование одной моды колебаний;
- расположение пьезоэлемента на оболочке и параметры внешней электрической цепи обеспечивают демпфирование всех мод колебаний в рассматриваемом диапазоне.

3.1. Демпфирование одной моды колебаний

3.1.1. Расположение пьезоэлемента

Рассмотрим применение методики для определения размещения пьезоэлемента на оболочке таким образом, чтобы наилучшим образом демпфировать одну моду колебаний, например первую, реализующуюся на частоте 557,4 Гц.

На основе решения задачи о собственных колебаниях электромеханической системы без внешних цепей была получена сеточная функция $K_1(\phi, z)$. Для построения сетки были выбраны следующие диапазоны варьирования координат расположения центра масс пьезоэлемента: по углу – $\phi \in [10^\circ, 170^\circ]$, шаг – 10° , по длине – $z \in [25, 275]$ мм с шагом 25 мм. Данные диапазоны выбраны исходя из размеров пьезоэлемента. Картина распределения значений $K_1(\phi, z)$ приведена на рис. 2.

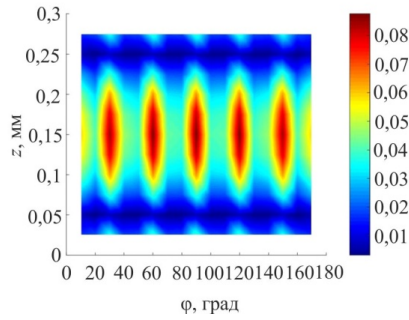


Рис. 2. Картина распределения значений сеточной функции $K_i(\varphi, z)$

Fig. 2. The distribution of values of grid function $K_i(\varphi, z)$

На основе анализа распределения $K_i(\varphi, z)$ можно сделать вывод о том, что наиболее эффективно пьезоэлемент будет работать в том случае, если его центр масс будет расположен в точке с координатами $\varphi = 90^\circ$, $z = 150$ мм. Коэффициент электромеханической связи для данного положения пьезоэлемента $K_{\max} = 0,0887$.

3.1.2. Определение параметров электрической цепи

На основе решения задачи о собственных колебаниях электромеханических систем с внешними электрическими цепями была построена сеточная функция $\omega_{\text{im}}^1(R, L)$ мнимых частей комплексных собственных частот, соответствующих первой моде колебаний, от параметров внешней резонансной (RL -) цепи, шунтирующей пьезоэлемент. Для построения сеточной функции были выбраны следующие диапазоны изменения значений индуктивности L и сопротивления R : $L \in [0,01; 20]$ Гн, шаг – 0,01 Гн, $R \in [10, 30\,000]$ Ом с шагом 10 Ом. На рис. 3 приведен график сеточной функции $\omega_{\text{im}}^1(R, L)$.

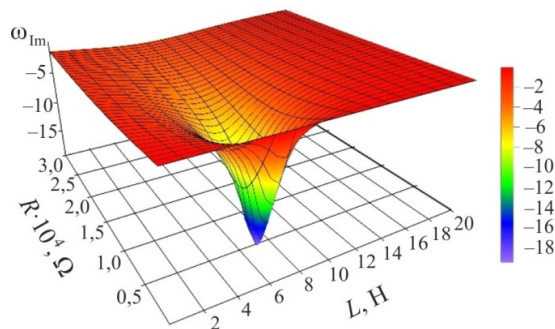


Рис. 3. График сеточной функции $\omega_{\text{im}}^1(R, L)$, соответствующей первой моде колебаний, в пространстве параметров индуктивности L и сопротивления R внешней последовательной RL -цепи

Fig. 3. Plots of the grid function $\omega_{\text{im}}^1(R, L)$ corresponding to the first mode of vibrations in the space of the inductance parameters L and the resistance R of the external serial RL -circuit

Анализируя результаты, представленные на рис. 3, можно увидеть, что мнимая часть комплексной собственной частоты колебаний рассматриваемой электромеханической системы имеет ярко выраженный экстремум. Параметры шунтирующей цепи, соответствующие данному экстремуму, обеспечивают наилучшее демпфирование соответствующей моды колебаний системы.

В рассматриваемом примере получено, что наибольшая степень демпфирования первой моды колебаний оболочки с пьезоэлементом достигается в том случае, когда параметры последовательной резонансной электрической цепи принимают значения $R_1^{\text{opt}} = 5,35$ кОм, $L_1^{\text{opt}} = 6,92$ Гн. При этом показатель демпфирования $\omega_{\text{im}}^1 = 26,01$.

3.2. Демпфирование нескольких мод колебаний в заданном частотном диапазоне

3.2.1. Расположение пьезоэлемента

Для реализации управления динамическим поведением конструкции одними и теми же средствами (при одном расположении пьезоэлемента, зашунтированного последовательной резонансной электрической цепью) в некотором диапазоне частот необходимо разместить пьезоэлемент таким образом, чтобы он обеспечивал достаточный уровень преобразования механической энергии колебаний в электрическую для последующего его рассеяния во внешней электрической цепи.

С этой целью воспользуемся способом, предложенным для размещения пьезоэлемента при его использовании для демпфирования одной моды колебаний в рассматриваемом диапазоне частот. Проанализируем вариант поиска места расположения пьезоэлемента, обеспечивающего наилучшее демпфирование первых трех мод колебаний оболочки с пьезоэлементом, попадающих в диапазон 500–700 Гц: 557,4; 587,7; 620,2 Гц.

На рис. 4 приведены графики сеточных функций $K_i(\varphi, z)$ для первых трех собственных частот колебаний, полученных на сетке, параметры которой приведены в п. 3.1.1. Представленные картины распределения K_i демонстрируют, что максимальные значения коэффициента электромеханической связи для разных частот колебаний наблюдаются при различных расположениях пьезоэлемента.

В соответствии с приведенным в п. 2.1.2 алгоритмом, оптимальным для демпфирования первых трех мод колебаний, является (с учетом симметрии конструкции) положение пьезоэлемента, определяемое координатами $\varphi = 30,24^\circ$, $z = 0,15$ м (рис. 5). Следует обратить внимание, что оно существенно отличается от того, которое является наилучшим для демпфирования только одной первой моды колебаний.

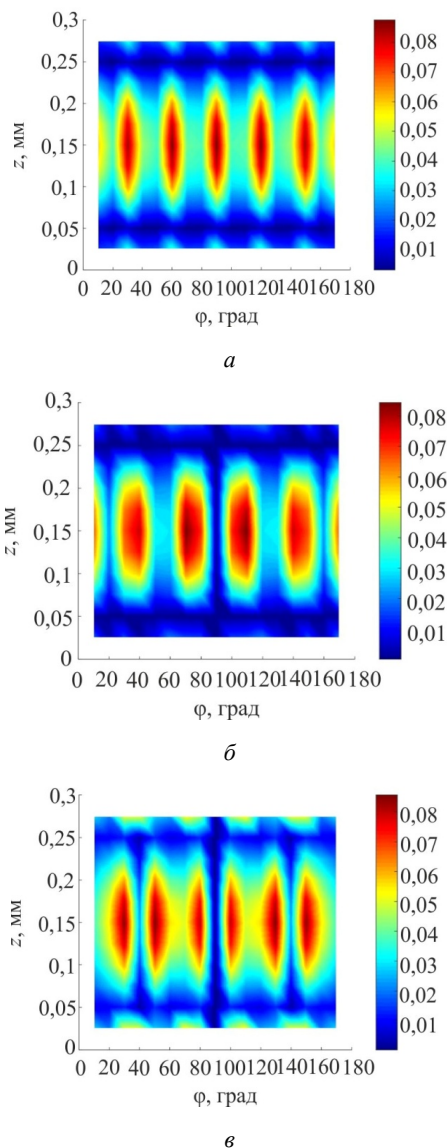


Рис. 4. Графики сеточных функций $K_i(\varphi, z)$ для первой (а), второй (б) и третьей (в) мод колебаний

Fig. 4. Plots of the grid functions $K_i(\varphi, z)$ for the first (a), the second (b) and the third (c) vibration modes

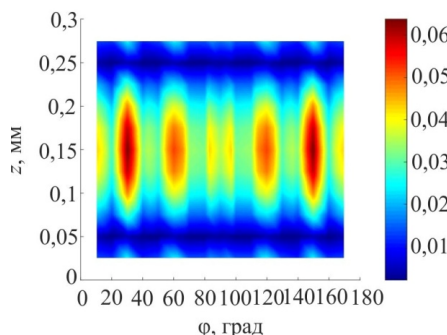


Рис. 5. График сеточной функции $P(\varphi, z)$, характеризующей суперпозицию сеточных функций $K_i(\varphi, z)$ для первых трех мод колебаний

Fig. 5. The plot of the grid function $P(\varphi, z)$ which characterizes superposition of grid functions $K_i(\varphi, z)$ for the first three vibration modes

В табл. 1 приведены максимальные значения коэффициентов электромеханической связи для положений пьезоэлемента, обеспечивающих демпфирование одной моды колебаний ($K_{\max i}$), а также величины K_i , соответствующие каждой из частот, при расположении пьезоэлемента для демпфирования трех мод колебаний.

Таблица 1

Коэффициенты электромеханической связи, соответствующие расположению пьезоэлемента для демпфирования одной или нескольких мод колебаний оболочки

Table 1

Values of electromechanical coupling coefficients, which corresponds to the optimal locations of the piezoelectric element for single-mode vibration damping and multimodal vibration damping

Номер ω_i	$K_{\max i}$	K_i
1	0,0887	0,0840
2	0,0845	0,0673
3	0,0858	0,0835

3.2.2. Определение параметров электрической цепи

Определив положение пьезоэлемента, при котором обеспечивается его эффективная работа на всех частотах, входящих в рассматриваемый диапазон, найдем параметры внешней электрической цепи, при которых скорость снижения амплитуды колебаний на этих частотах будет одинакова.

Для этого значения параметров электрической цепи должны соответствовать точке в пространстве параметров $R-L$, в которой совпадающие модули показателей демпфирования нескольких мод максимальны.

Для каждой моды колебаний конструкции в рассматриваемом диапазоне частот строим сеточные функции показателей демпфирования – $\omega_{\text{im}}^i(R, L)$, $i = 1, 2, 3$. На рис. 6, а представлены графики полученных сеточных функций $\omega_{\text{im}}^i(R, L)$, на которых приведены линии пересечения, а на рис. 6, б – проекции линий пересечения этих графиков.

Среди всех точек пересечения в точке II на рис. 6, б показатели демпфирования комплексов собственных частот колебаний имеют максимальные значения. Координаты этой точки в пространстве параметров $R-L$ определяют величину оптимальных параметров внешней электрической цепи.

В табл. 2 приведены собственные частоты колебаний рассматриваемой оболочки для двух вариантов компоновки системы:

– при расположении пьезоэлемента на оболочке и параметрах внешней электрической цепи, обеспечивающих демпфирование одной моды колебаний;

– при расположении пьезоэлемента на оболочке и параметрах внешней электрической цепи, обеспечивающих демпфирование всех мод колебаний в рассматриваемом диапазоне.

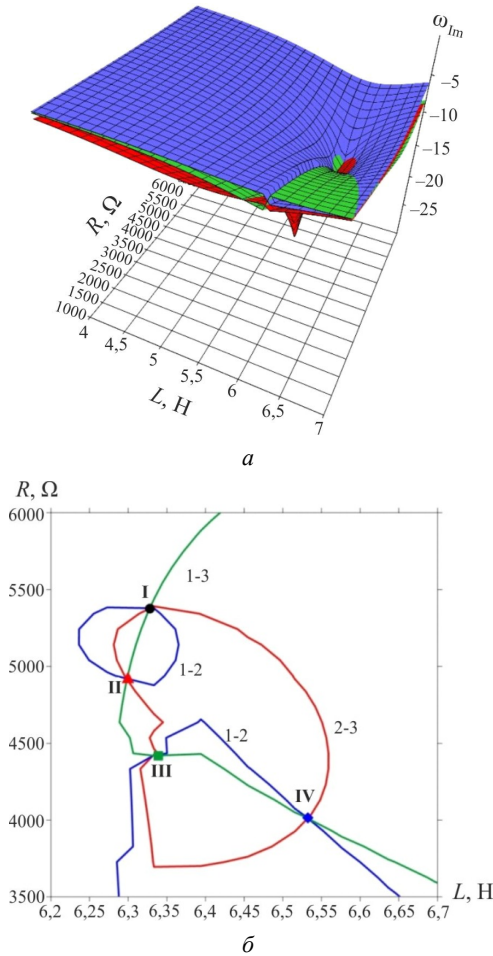


Рис. 6. Графики сеточных функций $\omega_{lm}^i(R, L)$ (a) и проекции линий пересечения этих графиков (б)

Fig. 6. Plots of the grid functions $\omega_{lm}^i(R, L)$ for the first three vibration modes (a) and projections of lines of their intersection (b)

В табл. 2 приведен также безразмерный коэффициент демпфирования ξ_i для каждой моды колебаний, который определяется как

$$\xi_i = \frac{\omega_{lm}^i}{\omega_i}, \quad (22)$$

где ω_i – i -я собственная частота колебаний оболочки без пьезоэлемента и шунтирующей цепи. Коэффициент демпфирования демонстрирует степень демпфирования мод колебаний как по отдельности, так и всех мод в заданном частотном диапазоне.

При этом показано, что степень демпфирования одной моды колебаний выше, чем нескольких, однако в последнем случае можно обеспечить большую устойчивость системы к изменению внешнего воздействия на нее.

Таблица 2

Сравнение эффективности демпфирования мод колебаний, входящих в заданный частотный диапазон

Table 2

Comparison of efficiency of the damping of vibration modes included into the specified frequency range

Номер частоты п/п	Оптимальные параметры цепи R (кОм), L (Гн)	Собственные частоты колебаний оболочки при наличии цепи f (Гц)	Коэффициент демпфирования ξ
Демпфирование каждой моды колебаний отдельно			
1	$R = 5,35, L = 6,92$	$556,84 + i 26,01$	0,047
2	$R = 5,20, L = 6,32$	$586,81 + i 17,60$	0,030
3	$R = 5,95, L = 5,69$	$636,32 + i 33,12$	0,053
Демпфирование трех мод колебаний одними и теми же средствами			
1	$R = 4,92$ кОм, $L = 6,30$ Гн	$547,17 + i 14,77$	0,026
2		$575,98 + i 15,71$	0,027
3		$648,74 + i 13,44$	0,022

Выводы

В данной работе представлен численный алгоритм поиска компоновок электроупругих тел с внешними электрическими цепями, обладающих наилучшими демпфирующими характеристиками при заданных условиях (демпфирование определенной моды колебаний либо их части, реализующихся в заданном частотном диапазоне).

Предложенный алгоритм основан на анализе поведения собственных частот колебаний, являющихся решением задачи о собственных колебаниях таких объектов.

Ключевой особенностью данного подхода является возможность построения сеточных функций на основе результатов решения рассматриваемых задач. Получаемые таким образом сеточные функции связывают параметры конструкции с ее динамическими характеристиками (в данном случае – собственными частотами колебаний). Предлагаемый подход позволяет анализировать такие факторы, как влияние на собственные частоты и формы колебаний конструкции расположения пьезоэлемента на ее поверхности, а также оценивать характер изменения спектра собственных частот колебаний при наличии внешней пассивной электрической цепи.

В качестве приложений задачи о собственных колебаниях при отсутствии электрических цепей были представлены варианты методики, позволяющие определять места расположения пьезоэлемента на поверхности конструкции, при которых он позволяет максимально эффективно использовать его для демпфирования одной или всех мод колебаний, входящих в некоторый заданный частотный диапазон.

Вариантами приложений задачи о собственных колебаниях при наличии внешних электрических цепей являются методики, позволяющие определять параметры индуктивности и сопротивления, обеспечивающие наилучшее демпфирование одной моды колебаний или

обеспечивающие максимально возможное значение скорости затухания всех мод колебаний, входящих в некоторый частотный диапазон.

Возможности представленного алгоритма поиска компоновок электроупругих конструкций с наилучшими демпфирующими характеристиками кусочно-однородного электроупругого тела с внешними электрическими цепями в заданных условиях продемонстрированы на примере полумонолитной оболочки, на поверхности которой расположен пьезоэлемент, к электропроводящим поверхностям которого присоединена внешняя электрическая цепь.

Показано, что предложенный алгоритм позволяет изменять диссипативные свойства электромеханической системы таким образом, чтобы обеспечить демпфиро-

вание либо одной, либо нескольких мод колебаний конструкции, входящих в заданный частотный диапазон.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ПФИЦ УрО РАН по теме № АААА-А19-119012290100-8.

Acknowledgments

The work was supported with the State Assignment of Perm Federal Research Center of the Ural branch of the Russian Academy of Sciences, No. АААА-А19-119012290100-8.

Библиографический список

1. Baz A., Poh S. Performance of an active control system with piezoelectric actuators // *Journal of Sound and Vibration*. – 1988. – Vol. 126, iss.2. – P. 327–343. DOI: 10.1016/0022-460X(88)90245-3
2. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // *Journal of Sound and Vibration*. – 1991. – Vol. 146, iss. 2. – P. 243–268. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90762-9
3. Wu S.Y. Piezoelectric Shunts with Parallel R-L Circuit for Structural Damping and Vibration Control // *Proc. SPIE Smart Structures and Materials, Passive Damping and Isolation*; SPIE, 1996. – Vol. 2720. – P. 259–269. DOI: 10.1117/12.239093
4. Trindade M.A., Benjeddou A. Hybrid Active-Passive Damping Treatments Using Viscoelastic and Piezoelectric Materials: Review and Assessment // *Journal of Vibration and Control*. – 2002. – Vol. 8. – P. 699–745. DOI: 10.1177/1077546029186
5. Moheimani S.O.R., Fleming A.J. Piezoelectric transducers for vibration control and damping. – London: Springer, 2006. – 276 p. DOI: 10.1007/1-84628-332-9
6. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction // *Smart Materials and Structures*. – 2012. – Vol. 21, iss. 1. – art. No. 0150082012. DOI: 10.1088/0964-1726/21/1/015008
7. Toftekar J.F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2019. – P. 1–15. DOI: 10.1080/15376494.2018.1549297
8. Alper E., Inman D.J. Piezoelectric energy harvesting. – John Wiley & Sons, 2011. – 412 p.
9. Energy harvesting module for the improvement of the damping performance of autonomous synchronized switching on inductance / T. Delpero, L. Di Lillo, A.E. Bergamini, P. Ermanni // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2012. – Vol. 24, iss. 7. – P. 837–845. DOI: 10.1177/1045389X12463463
10. Safaei M., Sodano H.A., Anton S.R. A review of energy harvesting using piezoelectric materials: state-of-the-art a decade later (2008–2018) // *Smart Materials and Structures*. – 2019. – Vol. 28, iss.11. – art. No: 113001 (62 pages). DOI: 10.1088/1361-665X/ab36e4
11. Irschik H. A review on static and dynamic shape control of structures using piezoelectric actuation // *Engineering Structures*. – 2002. – Vol. 24, iss.1 – P. 5–11. DOI: 10.1016/S0141-0296(01)00081-5
12. Ganguli R. Survey of Recent Developments in Rotorcraft Design Optimization // *Journal of Aircraft*. – 2004. – Vol. 41, iss. 3. – P. 493–510. DOI: 10.2514/1.58
13. Morphing Wing Technologies: Large Commercial Aircraft and Civil Helicopters / eds. A. Concilio, I. Dimino, L. Lecce, R. Pecora. Elsevier: Butterworth-Heinemann, 2018. – 978 p.
14. Active shape control of an antenna reflector using piezoelectric actuators / X. Song, S. Tan, E. Wang, S. Wu, Z. Wu // *Journal of intelligent material systems and structures*. – 2019. – Vol. 30, iss. 18–19. – P. 2733–2747. DOI: 10.1177/1045389X19873422
15. Schulz M.J., Pai P.F., Inman D.J. Health monitoring and active control of composite structures using piezoceramic patches // *Composites: Part B*. – 1999. – Vol. 30, iss.7. – P. 713–725. DOI: 10.1016/S1359-8368(99)00034-7
16. Michaels J.E. Detection, localization and characterization of damage in plates with in situ array of spatially distributed ultrasonic sensors // *Smart Materials and Structures*. – 2008. – Vol. 17, iss.3. – art. No: 35035 (15 pages). DOI: 10.1088/0964-1726/17/3/035035
17. Bhalla S., Chee K.S. Piezo-Impedance Transducers for Evaluation of Seismic Induced Structural Damage / in *Earthquakes and Health Monitoring of Civil Structures*. Springer: Netherlands, 2013. – P. 133–148. DOI: 10.1007/978-94-007-5182-8_5
18. Topology optimization of vibrational piezoelectric energy harvesters for structural health monitoring applications / S. Townsend, S. Grigg, R. Picelli, C. Featherston, H.A. Kim // *Journal of intelligent material systems and structures*. – 2019. – Vol. 30, iss. 18–19. – P. 2894–2907. DOI: 10.1177/1045389X19873392
19. Crawley E.F., de Luis J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures // *AIAA Journal*. 1987. – Vol. 25, iss. 10. – P. 1373–1385. DOI: 10.2514/3.9792
20. Gupta V., Sharma M., Thakur N. Optimization Criteria for Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators on a Smart Structure: A Technical Review // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2010. – Vol. 21, iss. 8. – P. 1227–1243. DOI: 10.1177/1045389X10381659
21. Bachmann F., Bergamini A., Ermanni P. Optimal piezoelectric positioning a strain-energy based finite element approach // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2012. – Vol. 23, iss. 14. – P. 1575–1591. DOI: 10.1177/1045389X12447985
22. Venna S., Lin Y.-J. An Effective Approach for Optimal PZT Vibration Absorber Placement on Composite Structures // *Modern Mechanical Engineering*. – 2013. – Iss. 3. – P. 21–26. DOI: 10.4236/mme.2013.31002
23. Araújo A.L., Madeira J.F.A. Optimal passive shunted damping configurations for noise reduction in sandwich panels // *Journal of Vibration and Control*. – 2020. – Vol. 26. – P. 1–9. DOI: 10.1177/1077546320910542

24. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: an exact solution / P. Soltani, G. Kerschen, G. Tondreau, A. Deraemaeker // *Smart Materials and Structures*. – 2014 – Vol. 23, iss. 12. – art. No. :125014. DOI: 10.1088/0964-1726/23/12/125014
25. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers / O. Heuss, R. Salloum, D. Mayer, T. Melz // *Archive of Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 86, iss. 10. – P. 1715–1732. DOI: 10.1007/s00419-014-0972-5
26. Vibration Control by Means of Piezoelectric Actuators Shunted with LR Impedances: Performance and Robustness Analysis / M. Berardengo, A. Cigada, S. Manzoni, M. Vanali // *Shock and Vibration*. – 2015, art. ID 704265, 30 p. DOI: 10.1155/2015/704265
27. Design of inductors with high inductance values for resonant piezoelectric damping / B. Lossouarn, M. Aucejo, J.-F. Deu, B. Multon // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 2017. – Vol. 259, iss. 1. – P. 68–76. DOI: 10.1016/j.sna.2017.03.030
28. Optimal piezoelectric resistive–inductive shunt damping of plates with residual mode correction / J.F. Toftekar, A. Benjeddou, J. Høgsberg, S. Krenk // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2018. – Vol. 29, Iss. 16. – P. 3346–3370. DOI: 10.1177/1045389X18798953
29. Botta F., Scorza A., Rossi A. Optimal Piezoelectric Potential Distribution for Controlling Multimode Vibrations // *Applied Sciences*. – 2018. – Vol. 8, iss. 4. – P. 1–14. DOI: 10.3390/app8040551
30. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data / N.A. Iurlova, N.V. Sevodina, D.A. Oshmarin, M.A. Iurlov // *International Journal of Smart and Nano Materials*. – 2019. – Vol. 10, iss. 2. – P. 156–176. DOI: 10.1080/19475411.2018.1542356
31. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations / V.P. Matveenko, N.A. Iurlova, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina, M.A. Iurlov // *International Journal of Smart and Nano Materials*. – 2018. – Vol. 9, iss. 2. – P. 135–149. DOI: 10.1080/19475411.2018.1461144
32. Sevodina N.V., Yurlova N.A., Oshmarin D.A. The optimal placement of the piezoelectric element in a structure based on the solution of the problem of natural vibrations // *Solid State Phenomena*. – 2015. – Vol. 243. – P. 67–74. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.243.67
33. Viana F.A.C., Valder S.Jr. Multimodal Vibration Damping through Piezoelectric Patches and Optimal Resonant Shunt Circuits // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. – 2006. – Vol. XXVIII, iss. (3). – P. 293–310. DOI: 10.1590/S1678-58782006000300007
34. Cheng T.H., Oh I.K. A current-flowing electromagnetic shunt damper for multi-mode vibration control of cantilever beams // *Smart Materials and Structures*. – 2009. – Vol. 18, iss. 9. – art. No. 095036. DOI: 10.1088/0964-1726/18/9/095036
35. Fleming A.J., Moheimani S.O.R. Adaptive piezoelectric shunt damping // *Smart Materials and Structures*. – 2003. – Vol. 12, iss. 1. – P. 36–48. DOI: 10.1088/0964-1726/12/1/305
36. Andreus U., dell’Isola F., Porfiri M. Piezoelectric passive distributed controllers for beam flexural vibrations // *Journal of Vibration and Control*. – 2004. – Vol. 10, iss. 5. – P. 625–659. DOI: 10.1177/1077546304038224
37. Giorgio I., Culla A., Del Vescovo D. Multimode vibration control using several piezoelectric transducers shunted with a multiterminal network // *Archive of Applied Mechanics*. – 2009. – Vol. 79. – P. 859–879. DOI: 10.1007/s00419-008-0258-x
38. Maurini C., dell’Isola F., Del Vescovo D. Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2004. – Vol. 18, iss. 5. – P. 1243–1271. DOI: 10.1016/S0888-3270(03)00082-7
39. Spadoni A., Ruzzene M., Cunefare K. Vibration and Wave Propagation Control of Plates with Periodic Arrays of Shunted Piezoelectric Patches // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2009. – Vol. 20, iss. 5. – P. 979–990. DOI: 10.1177/1045389X08100041
40. Trindade M.A., Maio C.E.B. Multimodal passive vibration control of sandwich beams with shunted shear piezoelectric materials // *Smart Materials and Structures*. – 2008. – Vol. 17, iss. 5. – art. No. 055015. DOI: 10.1088/0964-1726/17/5/055015
41. Guo K.M., Jiang J. Independent modal resonant shunt for multimode vibration control of a truss-cored sandwich panel // *International Journal of Dynamics and Control*. – 2014. – Iss. 2. – P. 326–334. DOI: 10.1007/s40435-013-0036-7
42. Gozum M.M., Aghakhani A., Basdogan I. An investigation of the electromechanical coupling and broadband shunt damping in composite plates with integrated piezo-patches // *Journal of intelligent material systems and structures*. – 2019. – Vol. 30, iss. 20. – P. 3008–3024. DOI: 10.1177/1045389X19873045
43. Hollkamp J.J. Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts // *Journal of intelligent material systems and structures*. – 1994. – Iss. 5. – P. 49–56. DOI: 10.1177/1045389X9400500106
44. Wu S.Y. Method for multiple mode shunt damping of structural vibration using a single PZT transducer // *SPIE Proceedings Series*. San Diego, CA, USA. – 1998. – Vol. 3327. – P. 159–168. DOI: 10.1117/12.310680
45. Behrens S., Moheimani S.O.R. Current flowing multiple mode piezoelectric shunt dampener // *SPIE Proceedings Series*. San Diego, CA, USA. – 2002. – Vol. 4697. – P. 1–24. DOI: 10.1117/12.472658
46. Matveyenko V.P., Kligman E.P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // *Journal of Vibration and Control*. – 1997. – Vol. 3, iss.1. – P. 87–102. DOI: 10.1177/107754639700300107
47. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid // *Thin-Walled Structures*. – 2015. – Vol. 90. – P. 12–22. DOI: 10.1016/j.tws.2015.01.001
48. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2016. – Vol. 16, iss. 10. – P. 1550076. DOI: 10.1142/S0219455415500765
49. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации / В.П. Матвеенко, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, Н.А. Юрлова // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 476–485. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40
50. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electro-magnetoelasticity: Piezo-electrics and Electrically Conductive Solids. New York: Gordon and Breach Science Publishers Ltd., 1988 – 526 p.
51. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 4: Электротермовязкоупругость. – Киев: Наукова думка, 1988. – 316 с.
52. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности: пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
53. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: пер. с англ. / ред. Б.Е. Победря. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
54. Матвеенко В.П., Севодин М.А., Севодина Н.В. Приложение метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 331–336. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32
55. Trindade M.A., Benjeddou A. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization // *Mechanics of Advanced Materi-*

als and Structures. – 2009. – Vol. 16, iss. 3. – P. 210–223. DOI: 10.1080/15376490902746863

56. Oshmarin D., Iurlov M. On location of piezoelectric element in a smart-structure: numerical investigation and experiment // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 208. – art. No.: 012047. DOI: 10.1088/1757-899X/208/1/012047

57. Algorithm for the layout of a piezoelectric element in an elastic medium providing the maximal piezoelectric effect within a

specified frequency range / D. Oshmarin, N. Iurlova, N. Sevodina, M. Iurlov // International Journal of Smart and Nano Materials. – 2019. – Vol. 10, iss. 4. – P. 268–284. DOI: 10.1080/19475411.2019.1576070

58. Possibility of tuning shunt circuits for multimodal damping of vibrations of structure with piezoelectric element / D. Oshmarin, N. Sevodina, M. Iurlov, N. Iurlova // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2019. – Vol. 13, iss. 49. – P. 800–813. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.13

References

1. Baz A., Poh S. Performance of an active control system with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, vol.126, iss. 2, pp. 327-343. DOI: 10.1016/0022-460X(88)90245-3

2. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol. 146, iss. 2, pp. 243-268. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90762-9

3. Wu S.Y. Piezoelectric Shunts with Parallel R-L Circuit for Structural Damping and Vibration Control / *Proc. SPIE Smart Structures and Materials, Passive Damping and Isolation; SPIE*, 1996, vol. 2720, pp. 259-269. DOI: 10.1117/12.239093

4. Trindade M.A., Benjeddou A. Hybrid Active-Passive Damping Treatments Using Viscoelastic and Piezoelectric Materials: Review and Assessment. *Journal of Vibration and Control*, 2002, vol. 8, pp. 699-745. DOI: 10.1177/1077546029186

5. Moheimani S.O.R., Fleming A.J. Piezoelectric transducers for vibration control and damping. *London: Springer*, 2006, 276 p. DOI: 10.1007/1-84628-332-9

6. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Materials and Structures*, 2012, vol. 21, iss. 1, 0150082012. DOI: 10.1088/0964-1726/21/1/015008

7. Toftekær J.F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019, pp.1-15. DOI:10.1080/15376494.2018.1549297

8. Alper E., Inman D.J. Piezoelectric energy harvesting. *John Wiley & Sons*, 2011, 412 p.

9. Delpero T., Di Lillo L., Bergamini A.E., Ermanni P. Energy harvesting module for the improvement of the damping performance of autonomous synchronized switching on inductance. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2012, vol. 24, iss. 7, pp. 837-845. DOI: 10.1177/1045389X12463463

10. Safaei M., Sodano H.A., Anton S.R. A review of energy harvesting using piezoelectric materials: state-of-the-art a decade later (2008–2018). *Smart Materials and Structures*. – 2000, vol.28, iss.11, 113001 (62 pages). DOI: 10.1088/1361-665X/ab36e4

11. Irschik H. A review on static and dynamic shape control of structures using piezoelectric actuation. *Engineering Structures*, 2002, vol. 24, iss. 1, pp. 5-11. DOI: 10.1016/S0141-0296(01)00081-5

12. Ganguli R. Survey of Recent Developments in Rotorcraft Design Optimization. *Journal of Aircraft*, 2004, vol. 41, iss. 3, pp. 493–510. DOI: 10.2514/1.58

13. Morphing Wing Technologies: Large Commercial Aircraft and Civil Helicopters / eds. Concilio A., Dimino I., Lecce L., Pecora R. *Elsevier: Butterworth-Heinemann*, 2018, 978 p.

14. Song X., Tan S., Wang E., Wu S., Wu Z. Active shape control of an antenna reflector using piezoelectric actuators. *Journal of intelligent material systems and structures*, 2019, vol. 30, iss. 18-19, pp. 2733-2747. DOI: 10.1177/1045389X19873422

15. Schulz M.J., Pai P.F., Inman D.J. Health monitoring and active control of composite structures using piezoceramic patches.

Composites: Part B. 1999, vol.30, iss. 7, pp. 713-725. DOI: 10.1016/S1359-8368(99)00034-7

16. Michaels J.E. Detection, localization and characterization of damage in plates with in situ array of spatially distributed ultrasonic sensors. *Smart Materials and Structures*. 2008, vol. 17, iss. 3, 35035 (15 pages). DOI: 10.1088/0964-1726/17/3/035035

17. Bhalla S., Chee K.S. Piezo-Impedance Transducers for Evaluation of Seismic Induced Structural Damage / in Earthquakes and Health Monitoring of Civil Structures. *Springer: Netherlands*, 2013, pp. 133-148. DOI: 10.1007/978-94-007-5182-8_5

18. Townsend S., Grigg S., Picelli R., Featherston C., Kim H.A. Topology optimization of vibrational piezoelectric energy harvesters for structural health monitoring applications. *Journal of intelligent material systems and structures*, 2019, vol. 30, iss. 18-19, pp. 2894-2907. DOI: 10.1177/1045389X19873392

19. Crawley E.F., de Luis J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA Journal*. 1987, vol.25, iss. 10, pp. 1373-1385. DOI: 10.2514/3.9792

20. Gupta V., Sharma M., Thakur N. Optimization Criteria for Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators on a Smart Structure: A Technical Review. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2010, vol. 21, iss. 8, pp. 1227-1243. DOI: 10.1177/1045389X10381659

21. Bachmann F., Bergamini A., Ermanni P. Optimal piezoelectric positioning a strain-energy based finite element approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2012, vol. 23, iss. 14, pp. 1575-1591. DOI: 10.1177/1045389X12447985

22. Venna S., Lin Y.-J. An Effective Approach for Optimal PZT Vibration Absorber Placement on Composite Structures. *Modern Mechanical Engineering*. 2013, iss. 3, pp. 21-26. DOI: 10.4236/mme.2013.31002

23. Araújo A.L., Madeira J.F.A. Optimal passive shunted damping configurations for noise reduction in sandwich panels. *Journal of Vibration and Control*. 2020, vol.26, pp.1-9. DOI: 10.1177/1077546320910542

24. Soltani P., Kerschen G., Tondreau G., Deraemaeker A. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: an exact solution. *Smart Materials and Structures*, 2014, vol. 23, iss. 12, 125014. DOI: 10.1088/0964-1726/23/12/125014

25. Heuss O., Salloum R., Mayer D., Melz T. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, vol. 86, iss. 10, pp.1715-1732. DOI: 10.1007/s00419-014-0972-5

26. Berardengo M., Cigada A., Manzoni S., Vanali M. Vibration Control by Means of Piezoelectric Actuators Shunted with LR Impedances: Performance and Robustness Analysis. *Shock and Vibration*, 2015, 704265. DOI: 10.1155/2015/704265

27. Lossouarn B., Aucejo M., Deu J.-F., Multon B. Design of inductors with high inductance values for resonant piezoelectric damping. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2017, vol. 259, iss. 1, pp. 68-76. DOI: 10.1016/j.sna.2017.03.030

28. Toftekær J.F., Benjeddou A., Høgsberg J., Krenk S. Optimal piezoelectric resistive–inductive shunt damping of plates

with residual mode correction. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, vol. 29, iss. 16, pp. 3346-3370. DOI: 10.1177/1045389X18798953

29. Botta F., Scorza A., Rossi A. Optimal Piezoelectric Potential Distribution for Controlling Multimode Vibrations. *Applied Sciences*, 2018, vol. 8, iss. 4, pp. 1-14. DOI: 10.3390/app8040551

30. Iurlova N.A., Sevodina N.V., Oshmarin D.A., Iurlov M.A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2019, vol. 10, iss. 2, pp. 156-176. DOI: 10.1080/19475411.2018.1542356

31. Matveenko V.P., Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2018, vol. 9, iss. 2, pp. 135-149. DOI: 10.1080/19475411.2018.1461144

32. Sevodina N.V., Iurlova N.A., Oshmarin D.A. The optimal placement of the piezoelectric element in a structure based on the solution of the problem of natural vibrations. *Solid State Phenomena*, 2015, vol. 243, pp. 67-74. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.243.67

33. Viana F.A.C., Valder S. Jr. Multimodal Vibration Damping through Piezoelectric Patches and Optimal Resonant Shunt Circuits. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2006, vol. XXVIII, iss. 3, pp. 293-310. DOI: 10.1590/S1678-58782006000300007

34. Cheng T.H., Oh I.K. A current-flowing electromagnetic shunt damper for multi-mode vibration control of cantilever beams. *Smart Materials and Structures*, 2009, vol. 18, iss. 9, 095036. DOI: 10.1088/0964-1726/18/9/095036

35. Fleming A.J., Moheimani S.O.R. Adaptive piezoelectric shunt damping. *Smart Materials and Structures*, 2003, vol. 12, iss. 1, pp. 36-48. DOI: 10.1088/0964-1726/12/1/305

36. Andreaus U., dell'Isola F., Porfiri M. Piezoelectric passive distributed controllers for beam flexural vibrations. *Journal of Vibration and Control*, 2004, vol.10, iss. 5, pp. 625-659. DOI: 10.1177/1077546304038224

37. Giorgio I., Culla A., Del Vescovo D. Multimode vibration control using several piezoelectric transducers shunted with a multiterminal network. *Archive of Applied Mechanics*, 2009, vol. 79, pp. 859-879. DOI: 10.1007/s00419-008-0258-x

38. Maurini C., dell'Isola F., Del Vescovo D. Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2004, vol. 18, iss. 5, pp. 1243-1271. DOI: 10.1016/S0888-3270(03)00082-7

39. Spadoni A., Ruzzene M., Cunefare K. Vibration and Wave Propagation Control of Plates with Periodic Arrays of Shunted Piezoelectric Patches. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, vol. 20, iss. 5, pp. 979-990. DOI: 10.1177/1045389X08100041

40. Trindade M.A., Maio C.E.B. Multimodal passive vibration control of sandwich beams with shunted shear piezoelectric materials. *Smart Materials and Structures*. 2008, vol. 17, iss. 5, 055015. DOI: 10.1088/0964-1726/17/5/055015

41. Guo K.M., Jiang J. Independent modal resonant shunt for multimode vibration control of a truss-cored sandwich panel. *International Journal of Dynamics and Control*, 2014, iss. 2, pp. 326-334. DOI: 10.1007/s40435-013-0036-7

42. Gozum M.M., Aghakhani A., Basdogan I. An investigation of the electromechanical coupling and broadband shunt damping in composite plates with integrated piezo-patches. *Journal of intelligent material systems and structures*, 2019, vol.30, iss. 20, pp. 3008-3024. DOI: 10.1177/1045389X19873045

43. Hollkamp J.J. Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts. *Journal of intelligent material systems and structures*, 1994, iss. 5, pp. 49-56. DOI: 10.1177/1045389X9400500106

44. Wu S.Y. Method for multiple mode shunt damping of structural vibration using a single PZT transducer. *San Diego, USA, CA, SPIE Proceedings Series*. 1998, vol. 3327, pp. 159-168. DOI: 10.1117/12.310680

45. Behrens S., Moheimani S.O.R. Current flowing multiple mode piezoelectric shunt dampener. *San Diego, CA, USA, SPIE Proceedings Series*. 2002, vol. 4697, pp. 1-24. DOI: 10.1117/12.472658

46. Matveenko V.P., Kligman E.P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions. *Journal of Vibration and Control*, 1997, vol. 3, iss. 1, pp. 87-102. DOI: 10.1177/107754639700300107

47. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*, 2015, vol. 90, pp. 12-22. DOI: 10.1016/j.tws.2015.01.001

48. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2016, vol. 16, iss. 10, pp. 1550076. DOI: 10.1142/S0219455415500765

49. Matveenko V.P., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlova N.A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation. *Computational Continuum Mechanics*. 2016, vol. 9, iss. 4, pp. 476-485. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40

50. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electro-magneto-elasticity: Piezo-electrics and Electrically Conductive Solids. *New York, Gordon and Breach Science Publishers Ltd*, 1988, 526p.

51. Karnauhov V.G., Kirichok I.F. Mekhanika svyazannykh polei v elementakh konstruksii. (v 5 T.); T.4: Elektrotermovyzakouprugost' [The mechanics of coupled fields in structural elements. (in 5 V.); V.4: Electrothermoviscoelasticity]. *Kiev, Nauk. Dumka*, 1988, 316 p.

52. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. *London, Pergamon Press*, 1982, 630p.

53. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in technology]. *Moscow, Mir*, 1975. 560 p.

54. Matveenko V.P., Sevodin M.A., Sevodina N.V. Prilozheniia metoda Miullera i printsipa argumenta k zadacham na sobstvennye znacheniia v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid mechanics] // *Computational Continuum Mechanics*. 2014, vol.7, iss. 3, pp. 331-336. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32

55. Trindade M.A., Benjeddou A. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2009, vol. 16, iss. 3, pp. 210-223. DOI: 10.1080/15376490902746863

56. Oshmarin D., Iurlov M. On location of piezoelectric element in a smart-structure: numerical investigation and experiment. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2017, vol. 208, 012047. DOI:10.1088/1757-899X/208/1/012047

57. Oshmarin D., Iurlova N., Sevodina N., Iurlov M. Algorithm for the layout of a piezoelectric element in an elastic medium providing the maximal piezoelectric effect within a specified frequency range. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2019, vol. 10, iss. 4, pp. 268-284. DOI: 10.1080/19475411.2019.1576070

58. Oshmarin D., Sevodina N., Iurlov M., Iurlova N. Possibility of tuning shunt circuits for multimodal damping of vibrations of structure with piezoelectric element. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2019, vol. 13, iss. 49, pp. 800-813. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.13