



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2020

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.12

УДК 539.231+537.622

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАПАСА ПРИ ПОВТОРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

О.Ф. Чернявский, А.О. Чернявский

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 23 апреля 2019 г.  
Принята: 31 августа 2020 г.  
Опубликована: 09 ноября 2020 г.

#### Ключевые слова:

прочность, долговечность, коэффициент запаса, знакопеременное течение, прогрессирующее накопление деформаций, комбинированное деформирование.

### АННОТАЦИЯ

Использование расчетов за пределами упругости для обоснования возможности эксплуатации конструкций требует нормирования коэффициентов запаса прочности и методов расчета, используемых при их получении. В статье в рамках дискуссии о пересмотре норм прочности авиационной и атомной отраслей для конструкций, работающих при малоцикловых механических и обратимых дилатационных (температурных, водородных) внешних воздействиях, рассматриваются: предельные состояния; необходимые для их расчета деформационные свойства материалов; коэффициенты запаса по нагрузкам и долговечности; методы расчета.

Предельные состояния конструкций при малоцикловых воздействиях подразделяются в данной работе на две группы: типовые, соответствующие качественному изменению типа деформирования, и индивидуальные, определяемые допустимыми величинами перемещений и трещинами для конкретной конструкции. Рассматриваются следующие типы деформирования: неупругое деформирование только на стадии приработки (сменяющееся упругим после выработки благоприятных остаточных напряжений и циклического упрочнения материала), не прекращающееся с числом циклов знакопеременное течение, прогрессирующее накопление деформаций и перемещений, комбинированное деформирование (в стабильном цикле отличны от нуля и размахи, и приращения деформаций). Типы деформирования различаются возможными последствиями для конструкции и требуемыми для расчета исходными данными: характеристики материалов при разных типах деформирования должны определяться из принципиально разных испытаний. Анализ индивидуальных предельных состояний без учета различий типов деформирования и, таким образом, типовых предельных состояний может быть некорректен. Основное внимание в статье уделено типовым предельным состояниям.

Предельные состояния различаются в зависимости от стадии эксплуатации, на которой допускается неупругое циклическое деформирование. Отмечается, что расширение области допустимых нагрузок за счет допущения неупругой деформации только на стадии приработки обычно более существенно, чем добавочное расширение за счет допущения непрекращающегося неупругого деформирования, при этом неупругое деформирование только на стадии приработки не требует анализа малоциклового усталости и накопленных деформаций. Дальнейшее расширение допустимой области, как и решение задач обеспечения безопасности на основе оценок риска, требует более полного изучения деформационных свойств материалов на стадии предразрушения, где преобладает циклическое разупрочнение.

© ПНИПУ

© Чернявский Олег Федорович – д.т.н., проф., e-mail [cherniavskiof@susu.ru](mailto:cherniavskiof@susu.ru), ID: 0000-0003-0023-8871  
Чернявский Александр Олегович – д.т.н., проф., e-mail [a.o.cher@mail.ru](mailto:a.o.cher@mail.ru), ID: 0000-0002-2900-3948

Oleg F. Cherniavsky – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail [cherniavskiof@susu.ru](mailto:cherniavskiof@susu.ru), ID: 0000-0003-0023-8871  
Alexander O. Chernyavsky – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail [a.o.cher@mail.ru](mailto:a.o.cher@mail.ru), ID: 0000-0002-2900-3948



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## LIMIT STATES AND SAFETY FACTORS UNDER REPEATED LOADING

O.F. Chernyavsky, A.O. Chernyavsky

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 23 April 2019  
Accepted: 31 August 2020  
Published: 09 November 2020

#### Keywords:

strength, durability, safety factor, alternating flow, progressive accumulation of strains, combined deformation.

### ABSTRACT

Verification of the structures operating possibility using numerical modeling beyond the elastic limit requires standardization of safety factors and calculation methods used to get them. In the framework of the discussion on the improvement of the strength standards of the aviation and nuclear industries for structures operating under low-cycle mechanical and reversible dilatation (temperature, hydrogen) external influences, the article discusses the limiting states; the deformation properties of materials necessary for their calculation; safety factors for loads and durability; calculation methods.

The article divides limit states of structures under low-cycle actions into two groups: typical, corresponding to a qualitative change in the deformation type, and individual, determined by allowable displacements and cracks for a particular structure. The following types of deformation are considered: inelastic deformation only at the running-in stage (that changes to elastic after the auspicious residual stresses develop and cyclic hardening of the material); alternating flow (that continues with the number of cycles); progressive accumulation of strains and displacements; combined deformation (when both strain span and strain increment are non-zero in a stable cycle). The types of deformation differ in possible consequences for the structure and the initial data for the calculation: mechanical properties of the material required for modeling different types of deformation should be determined by fundamentally different tests. An analysis of individual limit states without taking into account differences in the types of deformation – and thus typical limit states – may be incorrect. The main focus of the article is on typical limit states.

The limit states vary depending on the stage of operation at which inelastic cyclic deformation is allowed. Inelastic deformation expands allowable load range, the expansion due to the inelastic deformation at the running-in stage only is usually more significant than additional expansion due to the continuous inelastic deformation; besides, the inelastic deformation only at the running-in stage does not demand analysis of low-cycle fatigue and accumulated strains. Further expansion of the permissible load range, as well as solution of safety problems based on risk assessments, requires a more complete study of the deformation properties of materials at the pre-fracture stage, where cyclic softening predominates.

© PNRPU

### Введение

Регламентируемые отраслевыми нормами расчета на прочность предельные состояния, методы расчета и коэффициенты запаса определяют безопасность и конкурентоспособность соответствующей техники. Развитие методов расчета, пополнение экспериментальной информации о поведении материалов, новые методы мониторинга нагрузок и дефектов в конструкциях требуют регулярного пересмотра норм. Характерным, но далеко не единственным примером являются Нормы расчета на прочность сосудов давления Американского общества инженеров-механиков: действующая редакция этих Норм [1, 2] датирована 2019 г., предыдущая – 2017 г. (между этими датами предлагаемые изменения выносятся на обсуждение в виде проектов – draft Code case).

В Советском Союзе также существовала практика пересмотра Норм прочности для сосудов давления в атомной энергетике, начавшаяся в 1976 г. Однако эта практика прекратилась, и действующие сейчас Нормы [3] датированы 1986 г., т.е. совершенно не отражают современного состояния науки о прочности. Усугубляет ситуацию то, что на эти Нормы, как на образец, ссылается, например, ряд нормативных документов Газпрома.

Необходимость совершенствования нормативных подходов наиболее ярко проявляется в тех отраслях, где использование старых методов резко ограничивает допустимые нагрузки – в авиации [4, 5], ракетостроении [6, 7], энергомашиностроении [8, 9], химическом машиностроении [10]. В данной статье для подобных конструкций рассматриваются особенности предельных состояний, связанных с повторным неупругим деформированием.

### 1. Недостатки и проблемы существующих методов

С точки зрения эксплуатации конструкции в нормативные документы должны быть включены функциональные критерии: появление перемещений, препятствующих нормальной эксплуатации; появление и развитие трещин, приводящее к разгерметизации и т.п. Существовавшие раньше сложности расчетного анализа привели к тому, что эти критерии были заменены более простыми в использовании. Так, в Нормах [3] используется подход, основанный на условно-упругих расчетах с последующим делением напряжений на категории (мембранные и изгибные, общие и местные) и отдельным назначением коэффициентов запаса по напряжениям – для приближенного учета возможностей перерас-

пределения напряжений при пластическом деформировании.

Попытки уточнить и расширить область допустимых значений нагрузок и долговечностей за счет использования пластических свойств материала привели к тому, что современные российские и зарубежные нормативные документы содержат упоминания как о методах, использованных в [3], так и о более современных методах расчета. При этом более сложные методы должны применяться в тех случаях, когда не выполняются ограничения, формулируемые на основе условно-упругих расчетов. Так, [2] и ГОСТ 34233.1–2017 «Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования», кроме приближенного учета пластических свойств материала путем условно-упругих расчетов с делением напряжений на категории, предусматривают возможность прямой оценки предельной нагрузки при однократном нагружении (с использованием теорем теории предельного равновесия) или «численное моделирование напряженно-деформированного состояния и предельных состояний конструкции». При этом Нормы [2] частично регламентируют процедуру численного анализа и коэффициенты запаса – в виде множителей при комбинациях нагрузок (в ГОСТ 34233.1–2017 подобная регламентация отсутствует).

Можно отметить ряд недостатков предлагаемой в [2] процедуры:

- не выделяются в явном виде стадии эксплуатации конструкции (приработка, стабильное деформирование, предразрушение), характеризующиеся различным поведением материала и различным влиянием начального состояния конструкции (остаточных напряжений, технологических наклепов и т.д.);

- используется истинная кривая деформирования, получаемая по аппроксимационным формулам, опирающимся на предел текучести и предел прочности материала при однократном нагружении – тогда как циклическая кривая, при наличии циклического упрочнения или разупрочнения, может сильно (на многие десятки процентов по напряжениям) отличаться от предлагаемой;

- в качестве предельной используется расчетная нагрузка, при которой расчет напряженно-деформированного состояния детали методом конечных элементов перестает сходиться – хотя величина такой расчетной нагрузки зависит от (нерегламентированных) параметров расчета, а ошибка не всегда идет в запас прочности (МКЭ, построенный на предположениях о характере распределения перемещений по конструкции, в этом смысле близок к кинематическому методу теории предельного анализа, дающему, как известно, верхнюю оценку предельной нагрузки);

- отсутствие не прекращающегося с числом циклов накопления остаточных перемещений доказывается путем расчета нескольких последовательных циклов, хотя экстраполяция темпа накопления перемещений по

первым циклам может иметь очень низкую точность – вплоть до ошибок в знаке [11].

Возможностям развития существующих нормативных процедур посвящен ряд публикаций. Круг рассматриваемых в этих работах вопросов включает более подробный анализ поведения материалов за пределами упругости [5, 8, 9, 12–15], разработку методов расчетного определения моментов достижения предельных состояний [16–18], вопросы соотношения результатов расчетов с экспериментами и практикой [7, 10, 19], вопросы описания накопления повреждений при длительном повторно-переменном неупругом деформировании [4, 20], вопросы соотношения норм и стандартов в разных отраслях [21] или даже в пределах одной отрасли [22]. Отмечается, что для элементов атомных энергетических установок при нарушении нормальных условий эксплуатации риск-анализ должен опираться на реалистичную расчетную оценку механизмов разрушения, которая должна учитывать множество возможных типов разрушения (локальное разрушение из-за истощения ресурса пластичности или накопления деформации ползучести, прогрессирующее формоизменение, потерю устойчивости при ползучести и т.д.) и механизмов разрушения (распределения деформаций и напряжений по конструкции) [23, 24]. Эти положения, естественно, применимы и при длительной нормальной эксплуатации, в том числе при продлении эксплуатации за пределами планового ресурса [25]. Приводимые ниже соображения направлены на совершенствование норм (прежде всего отечественных) именно с позиций реалистичного описания предельных состояний и последующего риск-анализа применительно к малоцикловым механическим и дилатационным (т.е. связанным с неравномерным по конструкции изменением объема материала вследствие нагрева, облучения, диффузии окружающей среды и т.п.) воздействиям.

## **2. Предельные состояния при допущении неупругого деформирования конструкции только на стадии приработки**

Современные возможности расчета физически и геометрически нелинейного поведения конструкций позволяют подойти к применению функциональных критериев – накопленных перемещений и трещин, препятствующих нормальной эксплуатации. Определяемые запасы при этом должны включать как запас по долговечности – до достижения предельных перемещений и трещин, так и запас по нагрузке. Вычисление последнего осложняется тем, что увеличение нагрузки может приводить к качественному изменению типа циклического неупругого деформирования.

Множество рассматриваемых при этом предельных состояний должно включать две группы. К одной относятся индивидуальные состояния, характеризующиеся определенными величинами остаточных перемещений

и трещин в заданных участках конструкции. Другая группа включает типовые состояния, соответствующие качественному изменению процесса деформирования, деформационных свойств материала, влияния особенностей программы нагружения. Для разных предельных состояний должны быть установлены различающиеся нормативные коэффициенты запаса по нагрузке и долговечности, учитывающие как опасность рассматриваемого предельного состояния, так и нерегламентируемые особенности его расчетного анализа.

Первым типовым предельным состоянием является граница между упругой работой конструкции во все моменты времени и возможностью неупругого деформирования на стадии приработки конструкции. Пластические деформации на стадии приработки обычно приводят к образованию благоприятных остаточных напряжений и деформационному упрочнению материала. В результате деформирование конструкции после приработки становится упругим (упругая приспособляемость). Допущение такой возможности, естественно, расширяет область допустимых нагрузок по сравнению с расчетами по допускаемым упругим напряжениям.

Дальнейшее повышение нагрузок приводит к пластическому деформированию не только на стадии приработки, но и в стабильном цикле. Если размах неупругой деформации в цикле становится отличен от нуля (знакопеременное неупругое деформирование), то в расчетах следует учитывать дополнительный эффект – малоцикловую усталость. Таким образом, переход от упругой приспособляемости к знакопеременному деформированию должен рассматриваться как типовое предельное состояние, запас по которому позволяет не учитывать в расчетах малоцикловую усталость. Аналогичная ситуация возникает и в случае, когда отличным от нуля становится приращение деформации в цикле: рассмотрение этого перехода как типового предельного состояния (с соответствующим коэффициентом запаса) позволяет исключить необходимость выполнять расчеты накопления остаточных перемещений. Ситуация, когда в стабильном цикле отличны от нуля и размах, и приращение неупругой деформации, может не рассматриваться, поскольку возникает при более высоких параметрах воздействий. Если запасы по переходу от упругой приспособляемости к знакопеременному течению или к прогрессирующему накоплению деформаций оказываются недостаточны, следует рассматривать индивидуальные для конструкции предельные состояния (число циклов, величину накопленных перемещений). Рассмотрим несколько более подробно все эти предельные состояния.

Непрекращающееся знакопеременное течение возникает в наиболее нагруженной точке детали, если годограф условно-упругих напряжений в цикле, сдвигаемый параллельно самому себе произвольными остаточными напряжениями, не может быть помещен внутри поверхности текучести [11]. В частном случае пропорционального нагружения циклически стабильного мате-

риала знакопеременное течение возникает, если амплитуда условно-упругих напряжений превышает предел текучести [26]. При анализе – в отличие от [1, 2] – следует использовать циклический предел текучести, который определяется по результатам испытаний в жестком цикле как амплитуда напряжений, при которой ширина петли пластического гистерезиса не превышает заданного допуска, обеспечивающего пренебрежимо малую роль малоцикловой усталости по сравнению с многоцикловой (упругой) составляющей. Для идеально циклически стабильного материала циклический предел текучести совпадает с пределом текучести при однократном нагружении (при одинаковых допусках на пластическую деформацию). Материалы большинства реальных конструкций не являются идеально циклически стабильными; в этих случаях циклический предел текучести учитывает циклическое упрочнение или разупрочнение материала в процессе приработки – если программа испытаний учитывает особенности этого процесса (выдержки в цикле, перегрузки и др.). Следует отметить, что знакопеременное течение материала может существенно влиять на характеристики ползучести. Внешне этот эффект напоминает восстановление первой фазы или затухающей кратковременной ползучести в каждом цикле. Для ряда сталей и сплавов при достаточно высоких напряжениях он проявляется даже при нормальной температуре и требует учета скорости деформирования при испытании материала. При большой длительности выдержки в цикле (характерной, например, для оборудования электростанций) этот эффект может быть несущественным.

При непропорциональном нагружении критерий «знакопеременное течение возникает, если интенсивность размаха условно упругих напряжений превышает удвоенный предел текучести» может приводить к существенным ошибкам не в запас прочности. Точная формулировка обсуждается в [11], где показано, что определение нагрузки, вызывающей стабильное знакопеременное течение, не требует расчетов кинетики неупругого деформирования – нужны лишь результаты расчетов условно-упругих напряжений в разные моменты цикла с учетом всех существенных циклически изменяющихся внешних воздействий: механических, температурных, дилатационных воздействий среды – водорода, природного газа и др.

Индивидуальным предельным состоянием, анализируемым в случае наличия стабильного знакопеременного течения, является появление и развитие трещин малоцикловой усталости.

Другим типовым предельным состоянием, лимитирующим упругое деформирование конструкции после приработки, является накопление остаточных перемещений, приводящее либо к недопустимым изменениям размеров и формы детали, либо к исчерпанию ресурса пластичности и разрушению. В общем случае непрекращающееся с числом циклов накопление перемещений обусловлено неодновременным по объему неупру-

гим деформированием. Если суммарные приращения перемещений за цикл совместны, то остаточные напряжения, образовавшиеся при приработке, не меняются и следующий цикл повторяет предыдущий. Такой процесс называют прогрессирующим формоизменением. Приращения перемещений за цикл могут быть невелики, если области «мгновенного» неупругого деформирования малы и ограничены упругими участками. При достаточно большой механической нагрузке соответствующая ей область неупругого деформирования может стать достаточно большой для реализации состояния предельного равновесия [26] и «мгновенного» разрушения. Очевидная повышенная опасность этого частного случая прогрессирующего формоизменения требует более высоких коэффициентов запаса по нагрузке, чем при поцикловом накоплении перемещений.

Прогрессирующее формоизменение и его частный случай – предельное равновесие – достигаются после практического исчерпания деформационного упрочнения материала при нагружениях с упругими разгрузками. Соответствующий участок диаграммы деформирования материала традиционно схематизируется при расчетах моделью идеальной пластичности по пределу прочности или длительной прочности реального материала [3, 26]. Такой подход является наиболее простым и доступным, но не учитывает роль кратковременной ползучести, проявляющуюся не только при выдержках, но и в виде зависимости диаграмм статического деформирования от скорости нагружения. По-видимому, более реалистичной в данном случае является схематизация не диаграммы однократного деформирования, а результатов циклического нагружения материала в мягком асимметричном цикле с высокими (вплоть до предела прочности) напряжениями в одном полуцикле и не превышающими предела текучести в другом.

Расчет параметров предельного по прогрессирующему формоизменению цикла заметно сложнее, чем рассмотренный выше для случая знакопеременного течения, поскольку остаточные напряжения, образующиеся при приработке, не являются локальными и должны быть самоуравновешенными. В Нормах прочности [3] по аналогии с предельным равновесием был предложен расчет на основе приближенных и точных методов математической теории оптимальных процессов [27] и ее дискретных аналогов. Этот подход, несмотря на продолжающееся развитие – см., например, [28], не получил широкого распространения в связи с интенсивным развитием МКЭ в задачах анализа неупругого деформирования. В современных условиях более доступным и универсальным является расчет условий начала прогрессирующего формоизменения на основе поциклового анализа кинетики деформирования конструкции при последовательном увеличении параметров внешних воздействий – хотя этот путь является вычислительно затратным, поскольку включает серию неупругих расчетов, в каждом из которых должно быть рассмотрено достаточное число циклов для уверенной экстраполяции скоростей

накопления деформаций и обеспечения замкнутости цикла по напряжениям во всех точках конструкции.

В качестве примера на рис. 1, а, б приведены границы областей разных типов деформирования для дисков турбин ГТД – авиационного (см. рис. 1, а) и судового, отличающегося значительно большей интенсивностью теплосмен [29] (см. рис. 1, б). По осям отложены безразмерные множители, характеризующие условия работы – обороты  $k_{\omega}$  и неравномерность нагрева  $k_t$  ( $k_{\omega}$  представляет собой отношение условно упругих напряжений от центробежных сил к пределу текучести,  $k_t$  – отношение условно-упругих напряжений от неравномерного нагрева к пределу текучести). Расчеты выполнены с учетом ползучести на стационарном режиме при заданной проектной длительности этого режима и проектном числе циклов; использовано условие текучести Треска – Сен-Венана. Область I соответствует упругому деформированию во всех циклах, II – упругому деформированию после приработки; линия 1 – начало непрекращающегося знакопеременного течения, 2 – начало непрекращающегося накопления деформаций, 3 – предельное равновесие.

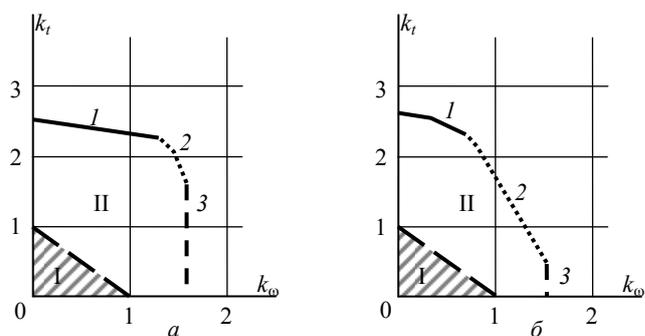


Рис. 1. Границы областей упругой приспособляемости для дисков турбин авиационного (а) и судового (б) ГТД

Fig. 1. Elastic shakedown areas (in the space of load parameters) for disks of an aircraft gas-turbine engine (a) and ship gas-turbine engine (b)

Очевидно, что определение коэффициентов запаса по нагрузкам требует задания пути перехода от рабочего цикла к предельному, как и в аналогичных задачах многоциклового усталости. Возможности выбора такого пути здесь значительно шире и могут, в частности, учитывать вероятные причины отказов. Простейшим вариантом является изменение параметра одного из воздействий при неизменных остальных. При заданных путях перехода к предельному циклу не требуется построение полной диаграммы предельных состояний, подобной рис. 1.

При реализации упругой приспособляемости запасы по малоциклового долговечности обычно не вычисляются, поскольку повреждения, накопленные при приработке, малы при нормальной технологии. Редкие исключения связаны обычно с недопустимым охрупчиванием материала в зонах концентрации деформаций при изготовлении детали. Как правило, они обнаруживаются при изготовлении или испытаниях опытных образцов конструкций.

Параметры предельного цикла по началу накопления остаточных перемещений менее чувствительны к локальным разбросам деформационных свойств и к наличию концентраторов деформаций, чем при знакопеременном течении. Фактические запасы по нагрузке в изделиях разных предприятий различаются из-за различий в культуре конструирования и изготовления, особенностях эксплуатации. Так, например, для дисков турбин надежно работающих серийных ГТД одного предприятия запас по разрушающим оборотам от 1,23 до 1,45, по прогрессирующему формоизменению – от 1,0 до 1,3 а для аналогичных изделий другого предприятия – соответственно 1,6–2,5 и 1,4–1,75.

### 3. Предельные состояния при непрерывном неупругом деформировании

Попытки еще больше расширить область допускаемых нагрузок приводят к необходимости допустить неупругое деформирование после приработки, т.е. непрерывное знакопеременное течение или прогрессирующее формоизменение при нормальных условиях эксплуатации. Индивидуальными предельными состояниями при этом являются появление трещин малоциклового усталости, накопление недопустимых перемещений и/или деформаций (исчерпание ресурса пластичности). Типовым предельным состоянием становится переход к комбинированному деформированию, при котором отличны от нуля как размах, так и приращение неупругой деформации за цикл. Пример полных диаграмм предельных состояний показан на рис. 2 – для конструкций и условий рис. 1. Штриховкой различного вида отмечены области реализации разных типов деформирования: I – упругого на всех стадиях эксплуатации, II – упругого после приработки, III – знакопеременного течения, приводящего к малоциклового усталости, IV – прогрессирующего формоизменения, приводящего к квазистатическому разрушению, V – комбинированного деформирования, VI – область разрастания при однократном нагружении (предельного равновесия).

Необходимо отметить, что формы диаграмм предельных состояний для разных конструкций различаются, поэтому использование решений, полученных для определенных конструкций, должно быть строго ограниченным (в отличие, например, от расширенного использования известного решения [30] для оболочек при теплосменах в [2]).

При использовании идеально упругопластического описания материала и критерия текучести Треска границы между областями, показанными на рис. 2, являются линиями, т.е. имеют нулевую ширину: при (бесконечно) малом изменении нагрузки происходит качественное изменение типа деформирования. В более близких к реальности случаях, когда материал является упрочняющимся и/или начало пластического течения описывается критерием Мизеса или ему подобным, границы эти могут иметь условный характер – подобно тому,

как условная граница между упругостью и пластичностью при однократном нагружении. В этих случаях «границей» должно считаться достижение соответствующей величины (шириной петли или приращением деформации в цикле) заданного допуска, аналогично тому, как это делается при определении условного предела текучести  $\sigma_{0.2}$  при однократном нагружении.

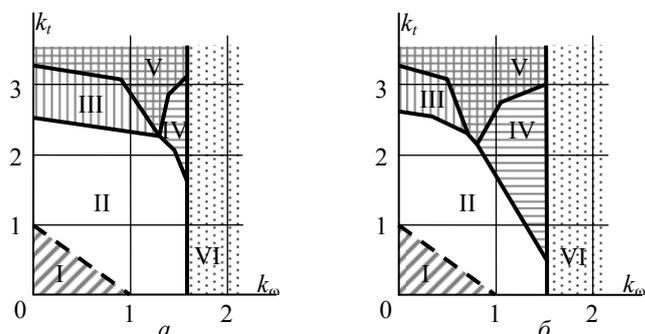


Рис. 2. Диаграммы предельных состояний для дисков турбин авиационного (а) и судового (б) ГТД

Fig. 2. Limit state diagrams for disks of the aircraft gas-turbine engine (a) and ship gas-turbine engine (b)

В качестве примера на рис. 3 приведены результаты решения модельной задачи о цилиндрической оболочке, нагруженной постоянным внутренним давлением  $p$  и циклически меняющимся перепадом температур по толщине стенки  $\Delta t$ . Материал полагается идеально упругопластическим с пределом текучести  $\sigma_T$ , свойства материала считаются идеально стабильными и не зависящими от типа деформирования. По осям отложены давления и перепады температур в безразмерном виде:

$$\bar{p} = p \frac{R}{\sigma_T h}; \quad \bar{\Delta t} = \Delta t \frac{\alpha E}{2(1-\mu)\sigma_T},$$

здесь  $R$  и  $h$  – радиус срединной поверхности и толщина стенки оболочки;  $\alpha$ ,  $E$  и  $\mu$  – коэффициент теплового расширения, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Сплошные линии соответствуют границам областей II...VI, найденным в аналитическом решении [30] с использованием критерия текучести Треска (обозначение областей II...VI – то же, что на рис. 2). Штриховые линии – результаты численных расчетов (МКЭ) с использованием критерия текучести Мизеса; числа у этих линий обозначают величины размахов и приращений напряжений в стабильном цикле в долях  $\sigma_T/E$ . Видно, что положение границ между областями зависит от допуска на величину размахов и приращений деформаций (рис. 3, а, б). В практических расчетах важной характеристикой будет соотношение между накапливаемым за цикл циклическим и статическим повреждением (рис. 3, в), однако собственно величины размахов и приращений (рис. 3, а, б) также должны учитываться при анализе, поскольку могут влиять на свойства материала (циклическое упрочнение зависит от ширины петли гистерезиса).

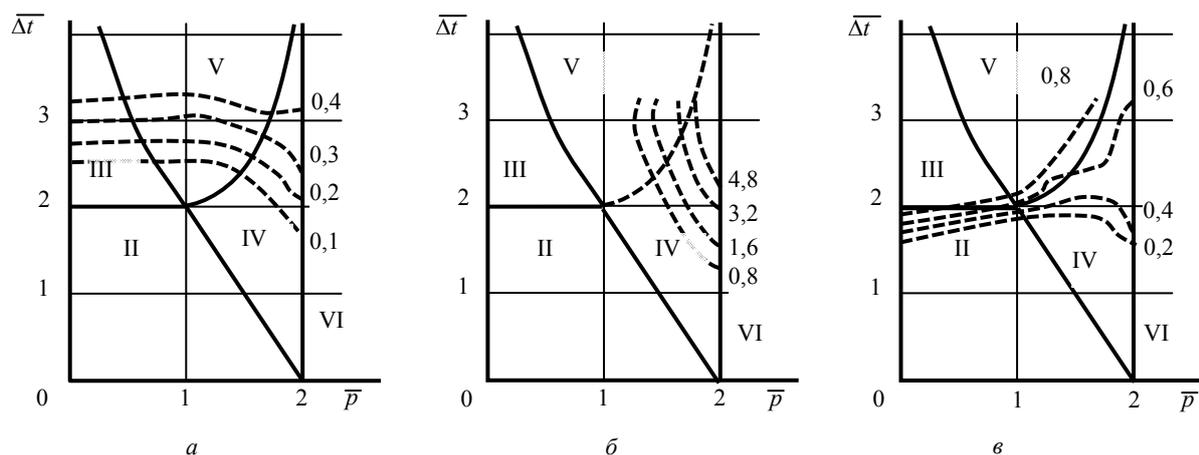


Рис. 3. Границы различных типов деформирования и соотношение между размахом и приращением деформаций в стабильном цикле. Числа у штриховых кривых означают: *a* – интенсивность размахов пластических деформаций за цикл; *b* – интенсивность приращений пластических деформаций; *c* – долю циклической составляющей повреждения в полном повреждении за цикл

Fig. 3. Boundaries of different types of deformation and the relationship between the strain span and strain increment in a stable cycle. The numbers on the dashed curves: *a*) is the plastic strain span per cycle; *b*) is the intensity of the plastic strain increments per cycle; *c*) is the proportion of the cyclic component of damage in the total damage per cycle

Прогноз числа циклов до появления макротрещины при развитом знакопеременном течении требует информации о размахах неупругих деформаций во всех циклах при заданных условиях эксплуатации. При нескольких сотнях циклов (с учетом десятикратного нормативного запаса это соответствует десяткам циклов реального ресурса) такая информация может быть получена в результате поцикловых расчетов кинетики деформирования. Такая ситуация характерна, например, для стационарных атомных реакторов на быстрых нейтронах и некоторых ракетных конструкций. При больших числах циклов процесс обычно схематизируется как кусочно-стабильный с расчетом до достижения стабилизации. Во всех случаях расчет требует задания диаграмм деформирования материала в смежных полуциклах каждого цикла. Реальные диаграммы, полученные в результате стандартизованных испытаний [31], изменяются в зависимости от числа циклов и размахов деформаций. В ограниченных диапазонах, где эти изменения не превышают заданного малого допуска, различиями можно пренебречь, т.е. считать материал циклически стабильным и соответствующим гипотезе единой кривой С.В. Серенсена и Н.А. Махутова [31]. Величины допусков и границы диапазонов при этом должны указываться в справочных данных или быть стандартизованы.

При сложных программах нагружения, в частности при наличии этапов ползучести в цикле, деформационные свойства материала при знакопеременном течении могут прогнозироваться структурными моделями среды Гохфельда – Садакова [32], Шабоша [33] и другими. Необходимым условием является циклическая стабильность материала. Основной проблемой расчетов при этом является точность моделирования на различных стадиях жизненного цикла конструкции, где поведение

материала может качественно различаться. Существующие модели для этого не вполне пригодны, а дальнейшее усложнение эмпирических моделей делает их идентификацию затруднительной.

При развитом прогрессирующем формоизменении запас по числу циклов прогнозируется с учетом приращений деформаций во всех циклах, рассчитанных при заданных условиях работы. Необходимые для расчета деформационные свойства материала определяются и схематизируются так же, как при описанном выше расчете условий начала прогрессирующего формоизменения.

Вычисление запаса по нагрузке, соответствующего переходу к комбинированному деформированию (указанное выше типовое предельное состояние), требует сопоставления параметров предельного (комбинированного) и рабочего цикла. Исследования деформационных свойств сталей и сплавов при соизмеримых циклических и статических повреждениях (когда приращение деформации за цикл мало по сравнению с размахом) впервые были проведены в работе [12]. Они показали, что выход из петли пластического гистерезиса на участок приращения происходит не по диаграмме однократного нагружения, а по продолжению последнего участка петли (т.е. с большим касательным модулем). Упрочнение, накопленное при приращении, забывается материалом уже в следующем полуцикле за счет сравнительно большой неупругой деформации другого знака. Таким образом, непрерывающееся накопление перемещений при переходе к комбинированному деформированию происходит не вследствие низких касательных модулей (как при прогрессирующем формоизменении), а за счет чередования упрочнения и разупрочнения материала. Для определения параметров предельного цикла необходимо при этом решать задачу устойчивости процесса деформирования

при большом числе возможных продолжений при одной и той же нагрузке. Решения таких задач развиты пока недостаточно. Временным выходом в этой ситуации является, по-видимому, ограничение размеров зоны, охваченной знакопеременным течением, аналогичное принятому в [1], но детализированное в зависимости от типа элемента конструкции.

Параметры нагрузки, соответствующие границе между прогрессирующим формоизменением и комбинированным деформированием, могут быть определены расчетами кинетики деформирования при последовательно увеличивающихся значениях нагрузок. Еще раз подчеркнем вычислительную трудоемкость выполнения серии неупругих расчетов с достаточным числом циклов в каждом расчете: число циклов до стабилизации процесса при комбинированном деформировании обычно существенно больше, чем при чистом знакопеременном течении или чистом накоплении деформаций. Критерием достижения границы является равенство размаха полных напряжений за цикл (с учетом изменений остаточных напряжений) максимальной протяженности упругого участка при разгрузке после однократного нагружения (около двух пределов текучести). Роль циклического упрочнения или разупрочнения, по-видимому, невелика (по аналогии с деформационным упрочнением на верхней границе области знакопеременного течения). Запасы по нагрузке должны при этом учитывать разбросы локальных свойств материала, хотя важность учета этого фактора различна при знакопеременном течении и при прогрессирующем накоплении деформаций.

В ряде опубликованных работ [28, 34 и др.] границы между нагрузками, приводящими к чистому знакопеременному течению или чистому формоизменению, и нагрузками, вызывающими комбинированное деформирование, определялись для идеально пластичных материалов с неизменными во всех условиях свойствами при продолжении только основного процесса деформирования. Материалов с близкими свойствами практически не существует, а второе предположение ведет к значительному завышению параметров предельного цикла.

Можно отметить, что чаще всего допущение неупругих деформаций на стадии приработки ведет к большему повышению параметров предельного цикла, чем допущение непрекращающегося неупругого деформирования на стадии стабильной работы. Исключением являются конструкции с существенной локализацией зон неупругого деформирования. Допущение комбинированного деформирования при нормальных условиях эксплуатации могло бы привести к дальнейшему росту допустимых внешних воздействий за счет снижения долговечности, но деформационные свойства материалов в таких условиях изучены пока совершенно недостаточно для оценки накапливаемых повреждений.

В настоящее время комбинированное деформирование нередко фактически реализуется в работающих конструкциях на стадии предразрушения (при разупроч-

нении материала), когда эта стадия составляет существенную часть ресурса. При прогнозировании остаточного ресурса разупрочнение материала часто учитывается корректировкой деформационных свойств (определявшихся в других условиях) в зависимости от поведения конструкции. Очевидно, что такой подход недостаточен для качественного прогнозирования механизма разрушения, без знания которого невозможно оценить его последствия, т.е. выполнить анализ безопасности с оценкой риска [35]. В рамках этой проблемы необходимы дальнейшие исследования деформационных и прочностных свойств материалов при комбинированном деформировании.

## Заключение

Современные методы расчета напряженно-деформированного состояния конструкций, прежде всего МКЭ в физически и геометрически нелинейной постановке, позволяют определять размахи и приращения деформаций в цикле и, таким образом, оценивать запас по долговечности – при заданных нагрузках и поведении материала. Нужно учитывать – что, к сожалению, делается далеко не всегда – что поведение материала при различных типах деформирования (знакопеременное течение, одностороннее накопление) различно, а универсальной модели материала пока нет.

Вычисление запаса по нагрузке оказывается существенно более сложной задачей, поскольку включает анализ возможности качественного изменения механизма деформирования. При применении МКЭ это требует серии расчетов кинетики неупругого деформирования, где каждый расчет должен рассматривать достаточное количество циклов для достижения стабилизации процесса – с учетом выбора модели материала, соответствующей этому процессу.

Запасы по долговечности и по нагрузке, вообще говоря, не взаимосвязаны – прежде всего из-за возможности изменения механизма деформирования при изменении нагрузки. В практических расчетах, чтобы ограничиться моделями материала для одного типа деформирования, смену типа можно считать предельным состоянием – с требованием соответствующего коэффициента запаса, исключающего достижение этого предельного состояния.

## Благодарность

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

## Acknowledgments

The work was supported by the Russian Federation Government (Decree No. 211 of March 16, 2013), Agreement No. 02.A03.21.0011.

## Библиографический список

1. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 1 (BPVC-VIII-1 – 2019). – American Society of Mechanical Engineers, 2019. – 796 p.
2. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 2-Alternative Rules (BPVC-VIII-2 – 2019). – American Society of Mechanical Engineers, 2019. – 872 p.
3. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок ПНАЭ Г-7-002-86 – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
4. Локальные критерии прочности, ресурса и живучести авиационных конструкций / Махутов Н.А. [и др.] – Новосибирск: Наука, 2017. – 600 с.
5. Требования к порядку и процедурам оценки расчетных значений характеристик конструкционной прочности металлических материалов основных и особо ответственных деталей при сертификации авиационных газотурбинных двигателей / Ю.А. Ножницкий, Е.Б. Качанов, Е.Р. Голубовский, В.К. Куевда // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2015. – Т. 14, № 3. – Ч. 1. – С. 37–48.
6. Напряженно-деформированные состояния ЖРД / Н.А. Махутов [и др.] – М.: Наука, 2013. – 646 с.
7. Владимиров С.А., Кондратенко М.А. Сравнительный анализ методологий обработки прочности изделий ракетно-космической и атомной отраслей промышленности // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. – 2015. – Т. 4, № 4(26). – С. 64–74.
8. Махутов Н.А. Обобщенные закономерности повреждаемости и сплошности при оценках долговечности в условиях переменности режимов нагружения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2019. – Т. 85, № 9. – С. 61–65.
9. Гринь Е.А., Чернышев В.В., Бочкарев В.И. Актуальные вопросы надежности и безопасности оборудования ТЭС // Теплоэнергетика. – 2018. – № 8. – С. 29–38.
10. Методы прогнозирования остаточного ресурса опасных производственных объектов / В.М. Кушнаренко [и др.] // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2016. – № 7. – С. 117–123.
11. Малоцикловое деформирование и разрушение конструкций. Приложение к журналу «СПРАВОЧНИК. Инженерный журнал», 11(176) / А.В. Абрамов [и др.] – М.: Спектр, 2011. – 32 с.
12. Cherniavsky O.F., Rebiakov Yu.N., Cherniavsky A.O. Properties of steels and chromium-nickel alloys under low-cycle combined deformation // International Journal of Fatigue. – Vol. 103. – October 2017. – P. 415–418.
13. Takahashi Y. Trial for united representation of monotonic stress-strain relations of various alloys (Conference Paper) // American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication) PVP. – 2018. – Vol. 3В. – #141606. DOI: 10.1115/PVP2018-85041
14. Основные положения механики поврежденной среды и их реализация для обоснования прочности и долговечности ядерных энергетических установок / Ф.М. Митенков, Д.Л. Зверев, В.Б. Кайдалов, А.В. Козин, Ю.Г. Коротких, В.А. Панов, В.А. Пахомов // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 87–93.
15. Оценка ресурсных характеристик конструкционных сталей с использованием моделей деградации, учитывающих усталость и ползучесть материала / И.А. Волков, В.В. Егунов, Л.А. Игумнов, Д.А. Казаков, Ю.Г. Коротких, Ф.М. Митенков // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 6 (334). – С. 70–83.
16. Ranganath S., Palm N.A. Alternative approaches for ASME Code simplified elastic-plastic analysis // American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division PVP. – 2017. – Vol. 1A-2017. – #131595. DOI: 10.1115/PVP2017-66240
17. Hubel H., Vollrath B. Simplified determination of accumulated strains to satisfy design code requirements // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2019. – Vol. 171. – P. 92–103.
18. Performance study of the simplified theory of plastic zones and the Twice-Yield method for the fatigue check / H. Hübel [et al.] // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2014. – Vol. 116 (1). – P. 10–19. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2014.01.003
19. An experimental validation of the guideline for inelastic design analysis through structural model tests / D. Watanabe [et al.] // Nuclear Engineering and Design. – 2008. – Vol. 238, iss. 2. – P. 389–398.
20. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов усталостной долговечности материалов и конструкций при малоцикловом нагружении // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 3. – С. 66–78.
21. Конторович Т.С., Радин Ю.А. Расчет малоциклового усталости по национальному стандарту и нормам прочности // Теплоэнергетика. – 2017. – № 8. – С. 73–80
22. Jaćimović N. Uncertainties in expansion stress evaluation criteria in piping codes // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2019. – Vol. 169. – P. 230–241.
23. Structural analysis approach for risk assessment under BDBE / N. Kasahara [et al.] // American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication) PVP. – 2016. – Vol. 3. – Article number V003T03A086 DOI: 10.1115/PVP2016-63416
24. Ogawa H., Machida H., Kasahara N. Analytical study on failure mode map for lower formed head of reactor pressure vessel under BDBE (Conference Paper) // American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication) PVP. – 2016. – Vol. 3. – Article number V003T03A087 DOI: 10.1115/PVP2016-63487
25. Identification of Failure Modes Under Design Extension Conditions / N. Kasahara [et al.] – ASME, PVP PVP2015-45381
26. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. – М.: Машиностроение, серия «Библиотека расчетчика», 1979. – 263 с.
27. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 301 с.
28. Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures / Editors: Fuschi P., Pisano A.A., Weichert D. – Springer International Publishing, 2015. – 325 p. DOI 10.1007/978-3-319-12928-0
29. Гецов Л.Б., Чернявский О.Ф., Гохфельд Д.А. Приспособляемость дисков судовых ГТД // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – СПб., 2003. – № 3(33). – С. 177–182.
30. Bree J. Elastic-plastic behavior of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements. // J. Strain Anal. – 1967. – № 2 (3). – P. 226–238.
31. Махутов Н.А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Ч. 1. – Новосибирск: Наука, 2005. – 492 с.

32. Гохфельд Д.А., Саадаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. – М.: Машиностроение, серия «Библиотека расчетчика», 1984. – 256 с.

33. Chaboche J.L. Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity // *International Journal of Plasticity*. – 1989. – Vol. 5, no. 3. – P. 247–302.

## References

1. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 1 (BPVC-VIII-1 – 2019) – American Society of Mechanical Engineers, 2019, 796 pp. ISBN 9780791872871.

2. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section VIII – Rules for Construction of Pressure Vessels. Division 2-Alternative Rules (BPVC-VIII-2 – 2019) – American Society of Mechanical Engineers, 2019, 872 pp. ISBN 9780791872888.

3. Normy rascheta na prochnost' oborudovaniia i truboprovodov atomnykh energeticheskikh ustanovok PNAE G-7-002-86 [Strength Code for Equipment and Pipelines of Nuclear Power Plants] – М.: Energoatomizdat, 1989. – 525 p.

4. Makhutov N.A. Lokal'nye kriterii prochnosti, resursa i zhivuchesti aviatsionnykh konstruktssii [Local criteria of strength, resource and survivability of aircraft structures]. *Novosibirsk, Nauka publ.*, 2017, 600 p.

5. Nozhnitskii Iu.A., Kachanov E.B., Golubovskii E.R., Kuevda V.K. Trebovaniia k poriadku i protseduram otsenki raschetnykh znachenii kharakteristik konstruktssionnoi prochnosti metallicheskh materialov osnovnykh i osobo otvetstvennykh detalei pri sertifikatsii aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigatelei [Requirements for the procedure and procedures for assessing the estimated values of the structural strength characteristics of metallic materials of the main and critical parts for certification of aviation gas turbine engines]. *Bulletin of the Samara State Aerospace University*, 2015, vol.14, no. 3, part 1, pp.37-48

6. Makhutov N.A. Napriazhenno-deformirovannye sostoianniia ZhRD [Stress-strain states of the rocket engines], *Moscow, Nauka publ.*, 2013, 646 p.

7. Vladimirov S.A., Kondratenko M.A. Sravnitel'nyi analiz metodologii obrabotki prochnosti izdelii raketno-kosmicheskoi i atomnoi otraslei promyshlennosti [Comparative analysis of methodologies for processing the strength of products of the rocket-space and nuclear industries]. *News of Moscow State Technical University MAMI*, 2015, vol. 4, no. 4 (26), pp.64-74

8. Makhutov N.A. Obobshchennye zakonomernosti povrezhdaemosti i sploshnosti pri otsenkakh dolgovechnosti v usloviakh peremennosti rezhimov nagruzheniia [Generalized patterns of damage and continuity in assessing durability under conditions of varying loading conditions]. *Factory Laboratory. Diagnostics of materials*, 2019, vol. 85, no. 9, pp.61-65

9. Grin' E.A., Chernyshev V.V., Bochkarev V.I. Aktual'nye voprosy nadezhnosti i bezopasnosti oborudovaniia TES [Actual issues of reliability and safety of TPP equipment]. *Thermal Engineering*, 2018, no. 8, pp.29-38

10. Kushnarenko V.M. Metody prognozirovaniia ostatochnogo resursa opasnykh proizvodstvennykh ob'ektov [Methods for predicting the residual life of hazardous production facilities]. *Intellect. Innovation Investments*, 2016, no. 7, pp.117-123.

11. Abramov A.V. Malotsiklovoe deformirovanie i razrushenie konstruktssii. Prilozhenie k zhurnalu "SPRAVOChNIK. Inzhenernyi zhurnal" [Low-cycle deformation and structural fail-

34. Gokhfeld D.A., Cherniavsky O.F. Limit analysis of structures at thermal cycling. Suthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn – The Netherlands, Rockville, USA, Maryland. – 1980. – 537 p.

35. Безопасность России. Научные основы техногенной безопасности. Научный руководитель издания Н.А. Махутов. – М.: Знание, 2015. – 936 с.

ure. Appendix to the journal "HANDBOOK. Engineering Journal". *Moscow, LLC "Publishing House" Spectrum*, 2011, 32 p.

12. Cherniavsky O.F., Rebiakov Yu.N., Cherniavsky A.O. Properties of steels and chromium-nickel alloys under low-cycle combined deformation. *International Journal of Fatigue*, 2017, vol. 103, pp.415-418

13. Takahashi Y. Trial for united representation of monotonic stress-strain relations of various alloys (Conference Paper). *American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication) PVP*, 2018, vol. 3B, № 141606. DOI: 10.1115/PVP2018-85041

14. Mitenkov F.M., Zverev D.L., Kaidalov V.B., Kozin A.V., Korotkikh Iu.G., Panov V.A., Pakhomov V.A. Osnovnye polozheniia mekhaniki povrezhdennoi sredy i ikh realizatsiia dlia obosnovaniia prochnosti i dolgovechnosti iadernnykh energeticheskikh ustanovok [The main statements of the mechanics of the damaged materials and their implementation to substantiate the strength and durability of nuclear power plants] *Fizicheskaiia mezomekhanika*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 87-93.

15. Volkov I.A., Egunov V.V., Igumnov L.A., Kazakov D.A., Korotkikh Iu.G., Mitenkov F.M. Otsenka resursnykh kharakteristik konstruktssionnykh stalei s ispol'zovaniem modelei degradatsii, uchityvaiushchikh ustalost' i polzuchest' materiala [Estimation of the resource characteristics of structural steels using degradation models that take into account fatigue and creep]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaiia fizika*, 2015, vol. 56, no. 6 (334), pp. 70-83

16. Ranganath S., Palm N.A. Alternative approaches for ASME Code simplified elastic-plastic analysis. *American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division PVP*, 2017, vol.1A-2017, №131595. DOI: 10.1115/PVP2017-66240

17. Hubel H., Vollrath B. Simplified determination of accumulated strains to satisfy design code requirements. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2019, vol. 171, pp.92-103

18. Hübel H. Performance study of the simplified theory of plastic zones and the Twice-Yield method for the fatigue check. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2014, 116 (1), pp. 10-19. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2014.01.003

19. Watanabe D. An experimental validation of the guideline for inelastic design analysis through structural model tests. *Nuclear Engineering and Design*, 2008, vol. 238, iss. 2, pp 389-398

20. Volkov I.A., Korotkikh Iu.G. Modelirovanie protsessov ustalostnoi dolgo-vechnosti materialov i konstruktssii pri malotsiklovom nagruzhении [Modeling the fatigue life processes of materials and structures under low-cycle loading]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2014, no. 3, pp.66-78

21. Kontorovich T.S., Radin Iu.A. Raschet malotsiklovoi ustalosti po natsional'nomu standartu i normam prochnosti [18. Kontorovich T.S., Radin Yu.A. Calculation of low-cycle fatigue according to the national standard and strength standards]. *Thermal Engineering*, 2017, no. 8, pp.73-80

22. Jaćimović, N. Uncertainties in expansion stress evaluation criteria in piping codes. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2019, vol. 169, pp.230-241
23. Kasahara N. Structural analysis approach for risk assessment under BDBE. *American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication) PVP*, 2016, vol. 3, Article number V003T03A086 DOI: 10.1115/PVP2016-63416
24. Ogawa H., Machida H., Kasahara N. Analytical study on failure mode map for lower formed head of reactor pressure vessel under BDBE (Conference Paper). *American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication) PVP*, 2016, vol. 3. Article number V003T03A087 DOI: 10.1115/PVP2016-63487
25. Kasahara N. Identification of Failure Modes Under Design Extension Conditions. *ASME, PVP*, 2015, 45381
26. Gokhfel'd D.A., Cherniavskii O.F.. Nesushchaia sposobnost' konstruktssii pri povtornykh nagruzheniiakh. [Bearing capacity of structures under repeated loading.]. *Moscow, Mechanical Engineering Publ., series "Library of Strength Engineer"*, 1979, 263 p.
27. Pontriagin L.S. Matematicheskaiia teoriia optimal'nykh protsessov. [The mathematical theory of optimal processes]. *Moscow, Publishing house of physical and mathematical literature*, 1961, 301 p.
28. Editors: Fuschi P., Pisano A.A., Weichert D. Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures. *Springer International Publishing*, 2015, 325 p. DOI 10.1007/978-3-319-12928-0
29. Getsov L.B., Cherniavskii O.F., Gokhfel'd D.A. Prispobliãemost' diskov sudovykh GTD [Shakedown of disks of marine gas turbine engines]. *Saint Petersburg, Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbTGU*, 2003, vol. 3, no.33, pp.177-182
30. Bree J. Elastic-plastic behavior of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements. *J. Strain Anal*, 1967, vol. 2, no. 3, pp.226-238.
31. Makhutov N.A. Konstruktsionnaia prochnost', resurs i tekhnogennaia bezopasnost'. Chast' 1. [Structural strength, resource and technological safety. Part 1]. *Novosibirsk, Nauka publ.*, 2005, 492 p.
32. Gokhfel'd D.A., Saadakov O.S. Plastichnost' i polzuchest' elementov konstruktssii pri povtornykh nagruzheniiakh [Plasticity and creep of structural elements under repeated loading]. *Moscow, Mechanical Engineering Publ., series "Library of Strength Engineer"*, 1984, 256 p.
33. Chaboche J.L. Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 1989, vol. 5, no. 3, p. 247-302.
34. Gokhfeld D.A., Cherniavsky O.F. Limit analysis of structures at thermal cycling. Suthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn. *The Netherlands, Rockville, USA, Maryland*, 1980, 537 p.
35. Makhutov N.A. Bezopasnost' Rossii. Nauchnye osnovy tekhnogennoi bezopasnosti [Safety of Russia. Scientific basis of technological safety]. *Moscow: Znanie publ.*, 2015, 936 p.