



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.10

УДК 539.3

МЕТОД ПЕРЕСЧЕТА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ДИАГРАММЫ КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА НА ДИАГРАММУ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

В.В. Стружанов, Д.И. Вичужанин

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 21 марта 2018 г.
Принята: 04 июня 2018 г.
Опубликована: 29 июня 2018 г.

Ключевые слова:

некорректная задача, регуляризация, кручение, цилиндрический образец, уравнение Вольтерра, диаграмма с падающей ветвью.

АННОТАЦИЯ

Основная проблема при диагностике и контроле заключается в том, что подавляющее число физических величин не может быть измерено непосредственно. Непосредственному измерению поддается лишь ограниченный набор физических параметров, на величину которых остальные (неизмеряемые) параметры оказывают лишь опосредованное влияние. Отсюда возникает задача определения физических величин по результатам их проявлений. К этой же проблеме относится и определение свойств материалов на всех этапах деформирования, включая и стадию разупрочнения, что является достаточно трудоемкой задачей. Сложность проблемы состоит в том, что на закритической стадии материал физически неустойчив. Поэтому требуются специальные устройства для получения характеристик материала, причем зачастую их не удается получить даже при помощи отнюдь не тривиальных технических приспособлений. Одним из реальных путей решения данной проблемы является проведение испытаний особых конструктивных элементов с последующим пересчетом полученных данных на свойства материала. В данной работе излагается известная методология решения обратных некорректных задач, разработанная А.Н. Тихоновым и В.К. Ивановым, которая основывается на методе подбора и понятии квазирешения. В качестве примера рассматривается задача об определении диаграммы деформирования материала с падающей ветвью в координатах «главные касательные напряжения – сдвиги» по диаграмме кручения цилиндрического образца. Показано, что эта задача требует решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода и, следовательно, является некорректной задачей. После сведения к системе алгебраических уравнений с использованием метода трапеций вычисления определенных интегралов при неточной правой части эта система дает характерное пилообразное решение. Регуляризация решения осуществляется методом подбора в специальной интерпретации. В работе приведены экспериментальные данные, полученные при кручении цилиндрических образцов из стали СтЗсп. Изложенная методика применена для пересчета диаграммы кручения образца на диаграмму деформирования материала с падающей ветвью при чистом сдвиге.

© ПНИПУ

© Стружанов Валерий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: stru@imach.uran.ru
Вичужанин Дмитрий Иванович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: mmm@imach.uran.ru

Valerii V. Struzhanov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: stru@imach.uran.ru
Dmitrii I. Vichuzhanin – CSc in Technical Sciences, Senior Researcher, e-mail: mmm@imach.uran.ru



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

A METHOD FOR CONVERTING AN EXPERIMENTAL TORSION DIAGRAM FOR A CYLINDRICAL SPECIMEN TO THE STRESS-STRAIN DIAGRAM OF THE MATERIAL

V.V. Struzhanov, D.I. Vichuzhanin

Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 21 March 2018

Accepted: 04 June 2018

Published: 29 June 2018

Keywords:

ill-posed problem, regularization, torsion, cylindrical specimen, Volterra equation, diagram with a negative slope.

ABSTRACT

The main problem with diagnostics and testing is that the overwhelming number of physical quantities cannot be measured directly. Only a limited number of physical quantities can be measured directly, the values of these physical quantities being indirectly influenced by the other (unmeasurable) parameters. Hence the problem arises to determine physical quantities by the results of their manifestations. The same problem concerns the determination of material properties in all the stages of deformation, including the softening stage. This problem is rather laborious. The complexity of the problem is that the material is physically unstable at the stage of strain softening. Thus, special devices are needed to obtain material characteristics. Often, they cannot be obtained even by means of non-trivial technical tools. One of the real ways to solve the problem is the testing of special structural components followed by the conversion of obtained data into material properties. The article deals with a well-known methodology of solving inverse ill-posed problems, which was developed by A.N. Tikhonov and V.K. Ivanov. The method is based on the trial-and-error method and the concept of quasi-solution. The problem of determining the stress-strain diagram with a negative slope in the "principal shear stress – shear strain" coordinates by the diagram of torsion of a cylindrical specimen is discussed as an example. It is shown that the problem requires the solution of the first-kind Volterra integral equation. Therefore, the problem is ill-posed. The problem is reduced to a system of linear algebraic equations with an inaccurate right-hand side. After solving the system by the trapezium method, we obtain a particular sawtooth solution. The solution is regularized by a special interpretation of the trial-and-error method. Experimental data obtained from torsion of cylindrical specimens made of steel St3sp is shown in the article. The stated method is used to convert the diagram of torsion of a cylindrical specimen to the material stress-strain diagram with a negative slope.

© PNRPU

Введение

В ходе эксперимента измерению поддаются лишь внешние силы, действующие на тело, а также перемещения точек его границы. Их величины зависят от свойств материала, то есть являются их отражением.

Таким образом, возникает задача определения неизмеряемых величин по результатам их проявлений [1–2], в которых измеряемые и неизмеряемые величины связаны некоторой системой уравнений. Известно [3–10], что задачи определения количественных характеристик по результатам их косвенных проявлений относятся к классу некорректных задач, требующих специальных методов решения.

В механике деформируемого твердого тела некорректные задачи возникают в частности при попытках идентификации свойств материалов [11–16], когда необходимо определить свойства материала (диаграмму его деформирования) по экспериментальным данным, полученным при деформировании некоторого элемента конструкции. Особенно актуальна проблема идентификации свойств материала на стадии критического деформирования, которая наступает после достижения предела прочности [17–23]. Критическое реологически неустойчивое деформирование может быть реализовано только тогда, когда элемент материала находится в составе устойчиво деформируемой механической системы (элемента конструкции). В данной работе приведена методика расчета

полной диаграммы деформирования, включающей и закритическую стадию (разупрочнение), в координатах «касательные напряжения – сдвиги» по результатам, полученным при кручении кругового цилиндра. Проведены эксперименты по кручению цилиндрических образцов и реализован пересчет зависимости «крутящий момент – абсолютный угол закручивания» на диаграмму деформирования материала при чистом сдвиге.

1. Уравнение Вольтерра в задаче о кручении цилиндрического образца

Рассмотрим кручение цилиндрического образца длиной L и радиусом поперечного сечения R . Если φ – абсолютный угол закручивания, то $\vartheta = \varphi/L$ – относительный угол закручивания и $\gamma^m = R\varphi/L$ – максимальный сдвиг [24]. Распределение деформаций сдвига по радиусу линейно (гипотеза плоских сечений [25–26]), поэтому уравнение, связывающее крутящий момент M и зависимость $\tau(\gamma)$, имеет вид [25–26]

$$\frac{2\pi L^3}{\varphi^3} \int_0^{\alpha\varphi} \tau(\gamma) \gamma^2 d\gamma = M(\varphi),$$

где $\alpha\varphi = R\varphi/L$, $\tau(\gamma)$ – функция, определяющая свойства материала при чистом сдвиге. Запишем данное уравнение в виде

$$\int_0^{\alpha\varphi} K(\varphi, \gamma) \tau(\gamma) d\gamma = F(\varphi), \quad (1)$$

где $F(\varphi) = M(\varphi) / 2\pi L$, $K(\varphi, \gamma) = K_1(\varphi) K_2(\gamma)$, $K_1(\varphi) = \varphi^{-3}$, $K_2(\varphi) = \gamma^2$. Если известна зависимость $\tau(\gamma)$, то выражение (1) определяет зависимость $M(\varphi)$ (прямая задача). Когда по известной функции $M(\varphi)$ необходимо найти функцию $\tau(\gamma)$ (обратная задача), то уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра первого рода и обратная задача является некорректной [27–30].

2. Некорректная задача и метод подбора

Приведем необходимые элементы теории некорректных задач, на основании которых будем искать решение интегрального уравнения (1). Пусть изучаемый объект (физическая величина) характеризуется элементом x_T (скаляр, функция, вектор и т.п.), принадлежащим множеству X . Элемент x_T недоступен для прямого измерения и известно лишь его проявление u_T , принадлежащее множеству U [1–3]. Полагаем, что известно отображение $F: X \rightarrow U$, которое каждому элементу из X ставит в соответствие элемент из U . Это отображение устанавливает связь между неизмеримыми параметрами и параметрами, которые поддаются измерению [1–3]. Таким образом, данное отображение определяет операторное уравнение

$$Fx = u. \quad (2)$$

Очевидно, что уравнение (2) имеет решение, принадлежащее X , только для таких элементов $u \in U$, которые принадлежат множеству FX .

Задача определения x (решения уравнения (2)) из множества X по данным $u \in U$ называется корректной если [1]:

- 1) для всякого элемента $u \in U$ существует решение $x \in X$;
- 2) решение определяется однозначно;
- 3) решение должно непрерывно зависеть от входных данных (устойчивость задачи).

Элемент u_T обычно получается путем измерений и поэтому известен приближенно. Поэтому u_T , вообще говоря, не принадлежит множеству FX . Отображение F во многих случаях является таким, что обратное отображение F^{-1} не является непрерывным [1]. Тогда в качестве приближенного решения нельзя брать точное решение уравнения (2) с приближенной правой частью так как:

- 1) такого решения может не существовать, поскольку u может не принадлежать множеству FX (не выполняется первое условие корректности);

2) такое решение, даже если оно и существует, не будет обладать свойством устойчивости, поскольку обратное отображение не является непрерывным (не выполняется третье условие корректности).

Отсутствие устойчивости во многих случаях делает невозможной физическую интерпретацию результатов измерений. Таким образом, для некорректных задач возникает вопрос: что надо понимать под приближенным решением таких задач [2, 3]?

Одним из основных методов построения решений некорректных задач является метод подбора [1–3]. Он состоит в том, что вычисляется левая часть уравнения (2) Fx для некоторого подмножества X_1 элементов x , принадлежащих X , т.е. решается прямая задача. В качестве искомого приближенного решения выбирается такой элемент $x \in X_1$, для которого невязка $\rho(Fx, u)$ минимальна на X_1 . Здесь $\rho(Fx, u)$ – расстояние в некоторой метрике между элементами Fx и элементом u . Обычно в качестве X_1 выбирается семейство элементов x , зависящих от конечного числа числовых параметров так, что X_1 является замкнутым множеством конечномерного пространства. Таким образом, находится так называемое квазирешение [4] уравнения (2).

3. Решение уравнения Вольтерра

Применим метод подбора для решения уравнения Вольтерра первого рода (1). Перейдем от уравнения (1) к системе алгебраических уравнений. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\int_0^{\alpha\varphi} \tau(\gamma) \gamma^2 d\gamma = f(\varphi), \quad (3)$$

где $f(\varphi) = F(\varphi) K_1^{-1}(\varphi)$. Введем на отрезке $[0, \varphi_z]$ сетку узлов $\varphi_i = ih$, $i = 1, \dots, n$, $nh = \varphi_z$. Здесь φ_z – предельное значение угла закручивания цилиндра, h – шаг разбиения. Представим теперь уравнение (3) в виде системы уравнений

$$\sum_{i=1}^j \int_{\alpha\varphi_{i-1}}^{\alpha\varphi_i} \gamma^2 \tau(\gamma) d\gamma = f_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда находим, что

$$\int_{\alpha\varphi_{i-1}}^{\alpha\varphi_i} \tau(\gamma) \gamma^2 d\gamma = f_i - f_{i-1}. \quad (4)$$

Здесь $\alpha\varphi_i = \gamma_i^m$, $f_i = f(\varphi_i)$, $\varphi_0 = 0$, $f_0 = 0$. Аппроксимируя теперь функцию $\tau(\gamma)$ на отрезках $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ линейной функцией $\tau = \tau_{i-1} + \alpha_{i-1}(\gamma - \gamma_{i-1})$, где $\tau_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, получаем из (4) после интегрирования и некоторых преобразований треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_0 \frac{\alpha^4 \varphi_1^4}{4} = f_1, \tag{5}$$

$$\frac{\alpha_{i-1} \alpha^4}{12} (3\varphi_i^4 - 4\varphi_{i-1}\varphi_i^3 + \varphi_{i-1}^4) + \frac{\alpha^4}{3} (\varphi_i^3 - \varphi_{i-1}^3) \sum_{j=0}^{i-2} \alpha_j (\varphi_{j+1} - \varphi_j) = f_i - f_{i-1}, \quad i \geq 2. \tag{6}$$

Сначала из уравнения (5) находим величину α_0 и подставляем ее в уравнение (6) при $i = 2$. Из данного уравнения вычисляем величину α_1 и подставляем ее в уравнение (6) при $i = 3$ и т.д. Очевидно, что система уравнений (5), (6) однозначно разрешима при любой правой части. После определения коэффициентов α_i напряжения на концах отрезков вычисляем исходя из вида линейной аппроксимации. Таким образом, восстанавливается диаграмма $\tau(\gamma)$.

Однако значения функции $M(\varphi)$ определяются путем измерений в экспериментах на кручение цилиндрических образцов и поэтому известны с определенной степенью погрешности (приближенно). Пусть M_Δ такая приближенная функция. В этом случае может идти речь лишь о нахождении приближенного решения уравнения (1). При этом M_Δ , вообще говоря, может быть такова, что не является правой частью уравнения (1) ни при каких $\tau(\gamma)$, и приближенного решения $f = f_\Delta$ может не существовать. Если же такое решение и существует, то оно может не обладать свойством устойчивости. Тогда в результате применения формул (5) и (6) получаем для $\tau(\gamma)$ характерную пилообразную ломаную [3–4]. Причина появления такого решения заключается в том, что для некорректных задач не выполняется третье условие корректности по Адамару, а именно: сколь угодно малым возмущениям исходных данных соответствуют большие изменения решения. Поэтому и возникают решения в виде пилообразных функций.

Применяя метод подбора [3], приближенное решение будем искать среди функций $\tau_k(\gamma)$, графики которых расположены между верхними и нижними точками пилообразной ломаной. Решая прямую задачу для всевозможных таких функций, получаем зависимости $F_k(\varphi)$. В качестве приближенного решения следует взять элемент τ_* такой, что отвечающее ему решение прямой задачи $F_*(\varphi)$ для каждого φ удовлетворяет неравенству

$$|F_*(\varphi) - F_\Delta(\varphi)| < \delta.$$

Здесь δ – наперед заданная малая величина; $F_\Delta = M_\Delta / 2\pi L$.

4. Пересчет экспериментальной диаграммы кручения

Проведем испытание образца из стали СтЗсп с размерами рабочей части $L = 113$ мм, $R = 5$ мм на машине для кручения образцов из металла (модель 2014 МК-50). Кручение осуществляем, задавая абсолютный угол закручивания φ . Скорость нагружения выбираем минимальной для данной машины (0,15 об/мин). Кручение проводим с остановками, в результате которых величина крутящего момента падает (рис. 1). Это объясняется тем, что релаксационные процессы в зоне концентрации напряжений проходят медленнее, чем скорость нагружения образца. Свойства материала в данном конкретном образце неизвестны.

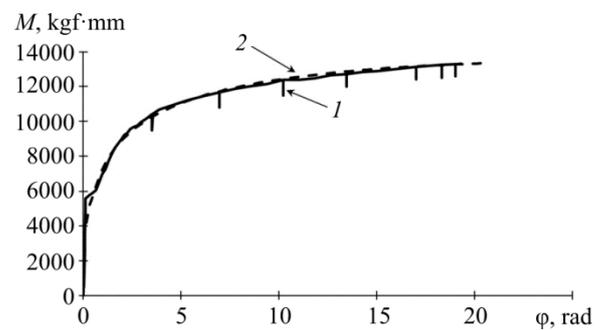


Рис. 1. Экспериментальная диаграмма кручения образца $M(\varphi)$ (сплошная линия 1) и расчетная зависимость $M_1(\varphi)$ для квазирешения $\tau_1(\gamma)$ (пунктирная линия 2)

Fig. 1. The experimental specimen torsion diagram $M(\varphi)$ (solid line 1) and the calculated dependence $M_1(\varphi)$ for the quasi-solution $\tau_1(\gamma)$ (dashed line 2)

Используя сетку узлов $\varphi_i = 0,02i$ ($i = 0, \dots, 1250$) по оси 0φ и значения экспериментальной функции $M(\varphi)$ в этих точках $M(\varphi_i)$, по формулам (5) и (6) рассчитываем функцию $\tau(\gamma)$. В результате пересчета получаем пилообразную ломаную (рис. 2, ломаная 1).

Будем искать приближенное решение уравнения (1) среди функций, графики которых расположены между кривыми 3 и 4 (см. рис. 2). Область, ограниченная этими кривыми, включает в себе пилообразную ломаную 1 (см. рис. 2). Сначала возьмем кривую, проходящую практически посередине между кривыми 3 и 4. Аппроксимируем ее следующим образом:

$$\tau_i \text{ (кг/мм}^2\text{)} = \begin{cases} 7692\gamma, & 0 \leq \gamma \leq 2,47 \cdot 10^{-3}, \\ (\gamma - 2,47 \cdot 10^{-3})110,26 + 19, & 2,47 \cdot 10^{-3} \leq \gamma \leq 0,014, \\ 336,019\gamma^{0,03149} - 11,1\gamma - 273,33, & 0,014 \leq \gamma \leq 0,9. \end{cases} \tag{7}$$

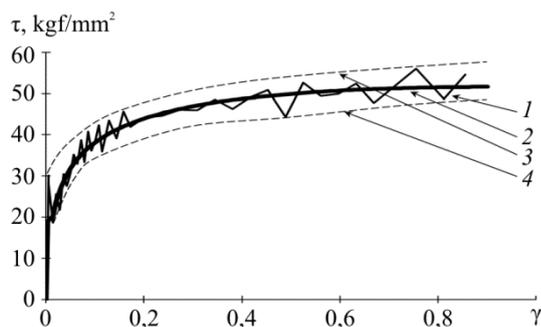


Рис. 2. Результат пересчета экспериментальной диаграммы $M(\varphi)$ (пилообразная ломаная 1); область поиска квази-решения (между пунктирными линиями 3 и 4); квази-решение (кривая 2)

Fig. 2. The result of conversion of the experimental diagram $M(\varphi)$ (sawtooth line 1); the area for searching a quasi-solution (between the dashed lines 3 and 4); quasi-solution (line 2)

Решим теперь прямую задачу, т.е. рассчитаем крутящий момент по формуле (1), где $\tau(\gamma) = \tau_1(\gamma)$. Получаем кривую $M_1(\varphi)$, показанную пунктиром на рис. 1 (кривая 2). Зависимость $M_1(\varphi)$ практически совпадает с экспериментальной зависимостью $M(\varphi)$. Таким образом, диаграмму (7) можно считать квази-решением уравнения (1), т.е. она определяет реальные свойства материала в испытанном образце.

Известно [13], что с ростом запаса упругой энергии разрушение приобретает взрывной характер. Поэтому при достаточно большой длине образца (и, следовательно, большом запасе упругой энергии) не удастся получить экспериментальную диаграмму $M(\varphi)$ с падающим участком. Разрушение происходит при достижении крутящим моментом максимального значения, сразу после зарождения кольцевой трещины.

Для получения полной диаграммы материала $\tau-\gamma$ необходимо, чтобы материал в поверхностном слое прошел все стадии деформирования, включая и критическую, поэтому кручение образца нужно проводить равномерно до появления кольцевой трещины на поверхности. В этом случае материал поверхности пройдет все стадии деформирования, вплоть до полного разрушения.

Поэтому необходимо уменьшать длину образца для получения диаграммы $M(\varphi)$ с падающей ветвью при равновесном деформировании. Возьмем цилиндрический образец диаметром 10 мм и рабочей длиной 10 мм. В результате эксперимента получена зависимость крутящего момента от угла закручивания, изображенная на рис. 3. В точке B зафиксировано образование кольцевой трещины. Отметим, что данная кривая была получена с остановками, в процессе которых происходила релаксация напряжений.

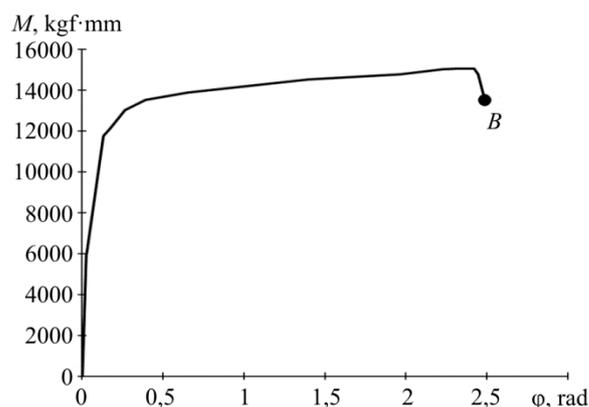


Рис. 3. Зависимость крутящего момента от угла закручивания короткого образца
Fig. 3. The dependence of the torque on the twist angle of the short specimen

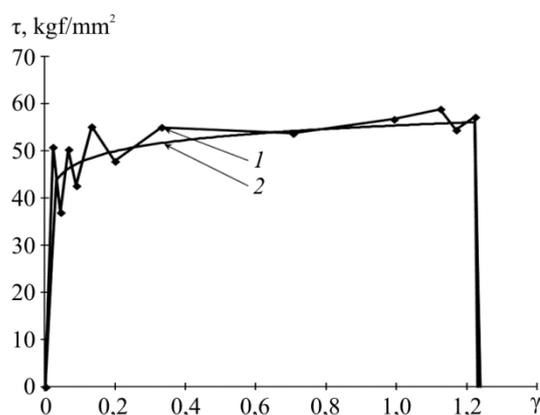


Рис. 4. Зависимость $\tau(\gamma)$ деформирования поверхностного слоя при испытании короткого образца
Fig. 4. The dependence $\tau(\gamma)$ of deformation of the surface layer in the short specimen under testing

Значительное отличие величины угла закручивания φ по сравнению с рис. 1 объясняется тем, что в данном случае испытывался образец рабочей длиной в 10 раз меньшей описанного в п. 1. Поэтому образец разрушился при значительно меньшем угле закручивания.

Небольшое отличие восходящих участков диаграмм, изображенных на рис. 1 и 3, объясняется различием геометрических размеров образцов и естественным разбросом свойств материала.

$$\tau \text{ (кг/мм}^2\text{)} = \begin{cases} 1325,58\gamma, & 0 \leq \gamma \leq 0,033, \\ 3,3758 \cdot \text{Ln}(\gamma) + 55,3, & 0,033 \leq \gamma \leq 1,222, \\ -3723,57(\gamma - 1,222) + 55,98, & 1,222 \leq \gamma \leq 1,297. \end{cases} \quad (8)$$

Используя методику, изложенную выше, пересчитаем диаграмму $M(\varphi)$ в диаграмму $\tau(\gamma)$. Результат пе-

решения показан на рис. 4 (пилообразная ломаная 1). Приближенное решение уравнения (1) определяет функция, описывающая кривую 2 (см. рис. 4), которая аппроксимирована следующими формулами:

После подстановки выражений (8) в уравнение (1) получаем диаграмму $M(\varphi)$, практически полностью совпадающую с экспериментальной (см. рис. 3). Отметим, что кривая 2 обладает падающей до нуля ветвью. Следовательно, материал поверхностного слоя до разрушения проходит все стадии деформирования, включая и разупрочнение.

Таким образом, предложенная методика позволяет получить реальные свойства материала, проявляемые им при работе реального элемента конструкции. При необходимости возможна серия экспериментов для получения средних значений.

Библиографический список

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
2. Лаврентьев М.М. Модели среды и задачи интерпретации геофизических данных // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 411–413.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее применение. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
5. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
6. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1962. – 96 с.
7. Васин В.В., Скурыдина А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризирующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 57–74.
8. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии для трехслойной среды / В.В. Васин [и др.] // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 2. – С. 69–76.
9. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
10. Тихонов А.Н. О задачах с неточно заданной исходной информацией // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 280, № 3. – С. 559–563.
11. Вайтульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.
12. Шваб А.А. Некорректные статические задачи теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 1989. – № 6. – С. 98–106.
13. Богачев И.В., Вайтульян А.О., Явруян О.В. Идентификация свойств неоднородной упругой среды // ПММ – 2012. – Т. 76, № 5. – С. 860–866.
14. Богачев И.В., Вайтульян А.О. Об алгебраизации обратных задач реконструкции характеристик неоднородных твердых тел // Материалы X Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела. Т.1. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2017. – С. 77–90.
15. Вайтульян А.О., Нестеров С.А. Обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Т.1. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2017. – С. 107–110.
16. Вайтульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. – 2010. – Т. 74, № 6. – С. 911–918.

Благодарности

Работа выполнена в рамках темы государственного задания ИМАШ УрО РАН (№ 0391-2016-0004). Испытания проведены с использованием оборудования ЦКП «Пластометрия» Института машиноведения УрО РАН.

Acknowledgements

This work was made as part of the State Assignment of the Institute of Engineering Science, RAS (Nr. 0391-2016-0004). The tests were carried out with the use of the Collective Center “Plastometria” of the Institute of Engineering Science, RAS.

17. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов: в 2 ч. Ч. 1. Деформация и разрушение. – М.: Машиностроение, 1974. – 472 с.
18. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. – 190 с.
19. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.
20. Вильдеман В.Э., Третьяков М.П., Третьякова Т.В. Экспериментальное изучение закрытической стадии деформирования конструкционных материалов в условиях локализации деформаций // Материалы X Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела. Т.1. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2017. – С. 140–143.
21. Горбунов С.В., Радченко В.П. Вариант решения краевой задачи неупругого деформирования разупрочняющейся среды и его экспериментальная проверка // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Т.1. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2017. – С. 179–181.
22. Чаусов Н.Г. Полная диаграмма деформирования как источник информации о кинетике накопления повреждений и трещиностойкости материалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2004. – Т. 70, № 7. – С. 42–59.
23. Вильдеман В.Э., Чаусов Н.Г. Условия разупрочнения материала при растяжении образца специальной конфигурации // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2007. – Т. 73, №10. – С. 55–59.
24. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 670 с.
25. Белл Ф.Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: в 2 ч. Ч. 1. Малые деформации. – М.: Наука, 1984. – 600 с.
26. Радченко В.П. Введение в механику деформируемых систем: учеб. пособие. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2009. – 241 с.
27. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 302 с.
28. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. – Новосибирск: Наука, 1999. – 193 с.
29. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №6. – С. 3–16.
30. Апарцин А.С. К теории интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2016. – Т. 56, № 5. – С. 824–839. DOI: 10.7868/S0044466916050069

References

1. Arsenin V.Ia. Metody matematicheskoi fiziki i spetsial'nye funktsii [The methods of mathematical physics and special functions]. *Moscow, Nauka*, 1974, 432 p.
2. Lavrent'ev M.M. Modeli srede i zadachi interpretatsii geofizicheskikh dannykh [Models of a medium and problems of geophysical data interpretation]. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki – Siberian journal of numerical mathematics*, 2003, vol. 6, no.4, pp. 411-413.
3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ia. Metody resheniia nekorrektnykh zadach [The methods for solving ill-posed problems]. *Moscow, Nauka*, 1986, 288 p.
4. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Teoriia lineinykh nekorrektnykh zadach I ee primenenie [The theory of linear ill-posed problems and its application]. *Moscow, Nauka*, 1978, 206 p.
5. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. *Moscow, Nauka*, 1980, 286 p.
6. Lavrent'ev M.M. O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki [On some ill-posed problems of mathematical physics]. *Novosibirsk, Nauka. Sibirskoe otdelenie*, 1962, 96 p.
7. Vasin V.V., Skurdyina A.F. Dvukhetapnyi metod postroeniia reguliarizuiushchikh algoritmov dlia nelineinykh nekorrektnykh zadach [A two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no.1, pp. 57-74.
8. Vasin V.V., Perestoronina G.Ia., Prutkin I.L., Timerkhanova L.Iu. Reshenie trekhmernykh obratnykh zadach gravimetrii dlia trekhslonnoi srede [Solution of gravity and magnetic three-dimensional inverse problems for three-layers medium]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2003, vol. 15, no.2, pp. 69-76.
9. Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., et al. Chislennye metody resheniia nekorrektnykh zadach [Numerical methods for solving ill-posed problems]. *Moscow, Nauka*, 1990, 232 p.
10. Tikhonov A.N. O zadachakh s netochno zadannoi iskhodnoi informatsiei [About problems with inaccurately given initial information]. *Doklady AN SSSR*, 1985, vol. 280, no.3, pp. 559-563.
11. Vaitul'ian A.O. Obratnye zadachi v mekhanike deformiruемого tverdogo tela [Ill-posed problems in the mechanics of solids]. *Moscow, Fizmatlit*, 2007, 222 p.
12. Shvab A.A. Nekorrektnye staticheskie zadachi teorii uprugosti [Ill-posed static problems of the theory of elasticity]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 1989, no.6, pp. 98-106.
13. Bogachev I.V., Vaitul'ian A.O., Iavruian O.V. Identifikatsiia svoistv neodnorodnoi uprugoi srede [Identification of the properties of a heterogeneous elastic medium]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2012, vol.76, no.5, pp. 860-866.
14. Bogachev I.V., Vaitul'ian A.O. Ob algebraizatsii obratnykh zadach rekonstruktsii kharakteristik neodnorodnykh tverdykh tel [On the algebraization of inverse problems of reconstructing the characteristics of inhomogeneous solids]. *Samara, Materialy X Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruемого tverdogo tela*, 2017, vol.1, pp. 77-90.
15. Vaitul'ian A.O., Nesterov S.A. Obratnye zadachi termoelektrouprugosti dlia neodnorodnykh tel [Inverse problems of thermoelasticity for inhomogeneous bodies]. *Samara, Materialy X Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruемого tverdogo tela*, 2017, vol.1, pp. 107-110.
16. Vaitul'ian A.O. K teorii obratnykh koeffitsientnykh zadach v lineinoy mekhanike deformiruемого tela [To the theory of inverse coefficient problems in the linear mechanics of solids]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2010, vol.74, no.6, pp. 911-918.
17. Fridman Ia.B. Mekhanicheskie svoistva metallov. V dvukh chastiakh. Chast' pervaya. Deformatsiia i razrushenie [Mechanical properties of metals. In two parts. Part one. Deformation and fracture]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1974, 472 p.
18. Struzhanov V.V., Mironov V.I. Deformatsionnoe razrushenie materiala v elementakh konstruktssii [Strain-induced fracture of materials in structural components]. *Ekaterinburg, Izd-vo UrO RAN*, 1995, 190 p.
19. Vil'deman V.E., Sokolkin Iu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov [Mechanics of inelastic deformation and fracture of composite materials]. *Moscow, Nauka, Fizmatlit*, 1997, 288 p.
20. Vil'deman V.E., Tret'iakov M.P., Tret'iakova T.V. Eksperimental'noe izuchenie zakriticheskoi stadii deformirovaniia konstruktssionnykh materialov v usloviakh lokalizatsii deformatsii [Experimental study of the stage of strain softening of structural components under localization of deformation]. *Samara, Materialy X Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruемого tverdogo tela*, 2017, pp. 140-143.
21. Gorbunov S.V., Radchenko V.P. Variant resheniia kraevoi zadachi neuprugogo deformirovaniia razuprochniushcheisia srede i ego eksperimental'naia proverka [The solution of the boundary value problem of inelastic deformation of a softening medium and its experimental verification]. *Samara, Materialy X Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruемого tverdogo tela*, 2017, vol.1, pp. 179-181.
22. Chausov N.G. Polnaia diagramma deformirovaniia kak istochnik informatsii o kinetike nakopleniia povrezhdenii i treshchinnostoikosti materialov [A full stress-strain diagram as a source of information on the kinetics of damage accumulation and fracture toughness of materials]. *Zavodskaiia laboratoriia. Diagnostika materialov*, 2004, vol.70, no.7, pp. 42-59.
23. Vil'deman V.E., Chausov N.G. Uslovia razuprochneniia materiala pri rastiashenii obraztsa spetsial'noi konfiguratsii [Conditions of strain softening upon stretching of the specimen of special configuration]. *Zavodskaiia laboratoriia. Diagnostika materialov*, 2007, vol.73, no.10, pp. 55-59.
24. Timoshenko S.P., Gere Dzh. Mekhanika materialov [Mechanics of materials]. *Moscow, Mir*, 1976, 670 p.
25. Bell F.Dzh. Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel. V 2kh chastiakh. Chast' 1. Malye deformatsii [The experimental foundations of solid mechanics. In two parts. Part one. Small strains]. *Moscow, Nauka*, 1984, 600 p.
26. Radchenko V.P. Vvedenie v mekhaniku deformiruemykh sistem [Introduction to mechanics of deformable systems: Tutorial]. *Samara, SamGTU*, 2009, 241 p.
27. Vol'terra V. Teoriia funktsionalov, integral'nykh i integrodifferentsial'nykh uravnenii [The theory of functional, integral and integrodifferential equations]. *Moscow, Nauka*, 1982, 302 p.
28. Apartsin A.S. Neklassicheskie uravneniia Vol'terra I roda: teoriia i chislennye metody [Neoclassical first-kind Volterra equations: theory and numerical methods]. *Novosibirsk, Nauka*, 1999, 193 p.
29. Apartsin, A.S. Sidler, I.V. Using the nonclassical Volterra equations of the first kind to model the developing systems. *Automation and Remote Control*, 2013, 74(6), pp. 899-910. doi: 10.1134/S0005117913060015
30. Apartsin, A.S. To the theory of volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, 56(5), pp. 810-825. doi: 10.1134/S0965542516050067