



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.01

УДК 539.3

ДИСПЕРСИЯ И ЗАТУХАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В МЕТАМАТЕРИАЛЕ, ЗАДАВАЕМОМ КАК ЦЕПОЧКА «МАССА-В-МАССЕ»

В.И. Ерофеев¹, Д.А. Колесов^{1,2}, В.Л. Крупенин²

¹ Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

² Институт машиноведения им. А.А. Благоданова Российской академии наук, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 09 августа 2019 г.
Принята: 13 ноября 2019 г.
Опубликована: 30 декабря 2019 г.

Ключевые слова:

метаматериал, цепочка «масса-в-массе», продольная волна, дисперсия, затухание, эффект «обратной волны».

АННОТАЦИЯ

Изучаются особенности распространения продольной волны в акустическом (механическом) метаматериале, моделируемом как одномерная цепочка, содержащая одинаковые массы, связанные упругими элементами (пружинами), обладающими одинаковой жесткостью, при этом каждая масса содержит внутри себя последовательное соединение еще одной массы и вязкого элемента (демпфера). Модель «масса-в-массе» свободна от недостатков, присущих ряду других механических моделей метаматериалов: она освобождает от необходимости наделять деформируемые тела свойством иметь отрицательную массу, плотность и (или) отрицательный модуль упругости. Показано, что рассматриваемая модель позволяет описать дисперсию и частотно-зависимое затухание продольной волны, характер которых существенно зависит от соотношения внешней и внутренней масс метаматериала. Изучается поведение фазовой и групповой скоростей волны, а также эволюция ее профиля как в низкочастотном, так и в высокочастотном диапазонах. Найдены такие соотношения масс, при которых фазовая скорость превосходит по своей величине групповую скорость (нормальная дисперсия), и такие – при которых групповая скорость превосходит фазовую (аномальная дисперсия) в широком частотном диапазоне. Обладая одинаковыми асимптотическими значениями при стремлении частоты к бесконечности, фазовая и групповая скорости имеют существенные различия в поведении, заключающиеся в том, что фазовая скорость является монотонной функцией частоты, а групповая скорость имеет максимум. Кроме того, в области нормальной дисперсии групповая скорость может иметь отрицательное значение, т.е. справедлив так называемый эффект «обратной волны», когда, несмотря на то, что фазовая скорость направлена в положительном направлении пространственной оси, энергия в такой волне переносится в отрицательном направлении.

© ПНИПУ

© Ерофеев Владимир Иванович – д.ф.-м.н., проф, дир., e-mail: erof.vi@yandex.ru, ID: [0000-0002-6637-5564](https://orcid.org/0000-0002-6637-5564)

Колесов Даниил Александрович – м.н.с., e-mail: alandess@yandex.ru, ID: [0000-0003-1112-0684](https://orcid.org/0000-0003-1112-0684)

Крупенин Виталий Львович – д.т.н., проф., г.н.с., e-mail: krupeninster@gmail.com, ID: [0000-0003-3126-9718](https://orcid.org/0000-0003-3126-9718)

Vladimir I. Erofeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director, e-mail: erof.vi@yandex.ru, ID: [0000-0002-6637-5564](https://orcid.org/0000-0002-6637-5564)

Daniil A. Kolesov – Junior Researcher, e-mail: alandess@yandex.ru, ID: [0000-0003-1112-0684](https://orcid.org/0000-0003-1112-0684)

Vitali L. Krupenin – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher,

e-mail: krupeninster@gmail.com, ID: [0000-0003-3126-9718](https://orcid.org/0000-0003-3126-9718)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

DISPERSION AND ATTENUATION OF A LONGITUDINAL WAVE PROPAGATING IN A METAMATERIAL DEFINED AS A MASS-TO-MASS CHAIN

V.I. Erofeev¹, D.A. Kolesov^{1,2}, V.L. Krupenin²

¹Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation

²Blagonravov Institute of Machine Science of RAS, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 09 August 2018
Accepted: 13 November 2019
Published: 30 December 2019

Keywords:

metamaterial, mass-to-mass chain, longitudinal wave, dispersion, attenuation, "reverse wave" effect.

ABSTRACT

We study the features of propagation of a longitudinal wave in an acoustic (mechanical) metamaterial, modeled as a one-dimensional chain, containing equal masses, connected by elastic elements (springs), and having the same rigidity. Each mass contains within itself a series connection of another mass and viscous element (damper). The mass-to-mass model is free from the drawbacks of a number of other mechanical models of metamaterials: i.e. it eliminates the need to have the property of a deformable body to possess a negative mass, density, and (or) a negative elastic modulus. It is shown that the model under consideration makes it possible to describe the dispersion and frequency-dependent attenuation of a longitudinal wave, the character of which essentially depends on the ratio of the external and internal mass of the metamaterial. The behavior of the phase and group velocities of the wave is studied, as well as the evolution of its profile, both in the low-frequency and high-frequency ranges. The mass ratios were found at which the phase velocity exceeds the group velocity (normal dispersion) in magnitude and those at which the group velocity exceeds the phase velocity (anomalous dispersion) in a wide frequency range. Having the same asymptotic values when the frequency tends to infinity, the phase and group velocities have significant differences in behavior, namely, that the phase velocity is a monotonic function of frequency, and the group velocity has a maximum. In addition, in the region of normal dispersion, the group velocity may be negative, i.e. the so-called "reverse wave" effect is true, when, despite the fact that the phase velocity is directed in the positive direction of the spatial axis, the energy in such a wave is transferred in the negative direction.

© PNRPU

Введение

Развитие современных технологий невозможно без создания новых перспективных материалов с необычными свойствами. Например, бездефектные углеродные нанотрубки на два порядка прочнее стали и в четыре раза легче ее. В настоящее время новый класс веществ со сложно организованной внутренней структурой (микроструктурой) и обладающих уникальными физико-механическими свойствами принято называть метаматериалами. Впервые они появились в области оптики и фотоники [1, 2], но сейчас все чаще встречаются и в других областях. К примеру, широко применяются акустические (или механические) метаматериалы [3–21], используемые, в частности, как поглотители звука и вибрации [8–13]. Еще одним примером материалов с необычными свойствами являются фуллериты – твердотельные структуры, образованные на основе фуллеренов [22]. Сверх- и ультратвердые фуллериты характеризуются уникально высокими значениями скоростей продольных упругих волн и широким диапазоном этих значений в пределах от 11 до 26 км/с в зависимости от их структуры, определяемой условиями синтеза [23]. Измеренное в одной из фуллеритовых фаз значение 26 км/с является рекордным – оно почти на 20 % больше скорости продольных волн в графите вдоль атомных слоев, равной 21,6 км/с (до последнего времени это значение было наибольшим для всех известных веществ) и на 40 % больше соответствующей скорости в алмазе

(18,6 км/с). Скорости поперечных волн в твердых фуллеритовых фазах также высоки (их значения лежат в пределах от 7 до 9,7 км/с), но все же они меньше, чем в алмазе (11,6–12,8 км/с), которые по-прежнему остаются рекордными среди известных в настоящее время веществ.

Акустические (или механические) метаматериалы, являясь по сути дела не материалами, а ячеистыми периодическими конструкциями, в длинноволновом диапазоне ведут себя подобно непрерывным материалам. Изучение особенностей дисперсии, диссипации и проявления нелинейности акустических волн в метаматериалах представляет интерес [3–13], [24–29].

Руководствуясь математической аналогией между акустическими и электромагнитными волнами, многие исследователи пытались построить континуальные модели механических метаматериалов. Однако большого успеха на этом пути добиться не удалось, поскольку механические аналоги реально существующих материалов с отрицательной диэлектрической проницаемостью представляют собой деформируемые твердые тела, обладающие отрицательной массой, плотностью или отрицательным модулем упругости [30–34]. А таких материалов в природе не существует.

Очевидно, что адекватное описание физико-механических свойств метаматериалов в рамках классической теории упругости невозможно. В последнее время для моделирования структурно-неоднородных материалов широкое распространение получили обобщенные мик-

рополярные теории типа континуума Коссера [35]. Однако в эти теории входит большое число материальных констант, требующих экспериментального определения и связь которых со структурой материала не ясна. Такого недостатка лишено альтернативное направление – структурное моделирование [36, 37].

1. Уравнения динамики

В работе [38] рассматривалась одномерная цепочка, содержащая одинаковые массы m_1 , связанные упругими элементами (пружинами), обладающими одинаковой жесткостью k_1 , при этом каждая масса внутри себя содержала еще одну массу m_2 и еще один упругий элемент – пружину с жесткостью k_2 (рис. 1). Такая модель, названная цепочкой «масса-в-массе», не дает упомянутых абсурдных результатов.

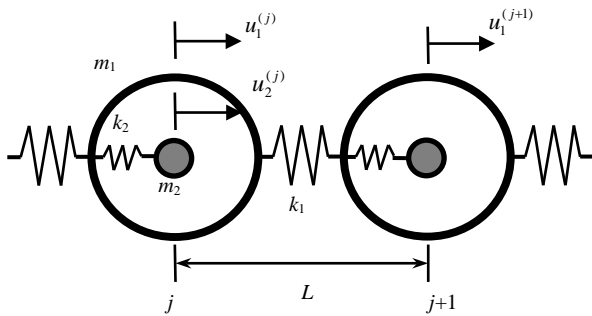


Рис. 1. Механическая модель упругого метаматериала

Fig. 1. The mechanical model of an elastic metamaterial

В работах [39–41] эта модель была обобщена путем учета квадратичной нелинейности внешнего и внутреннего упругих элементов. Было показано, что в метаматериале при динамическом воздействии на него могут формироваться пространственно-локализованные нелинейные волны деформации (солитоны), определяться зависимости, связывающие параметры локализованной волны: амплитуду, скорость и ширину с инерционными и упругими характеристиками метаматериала.

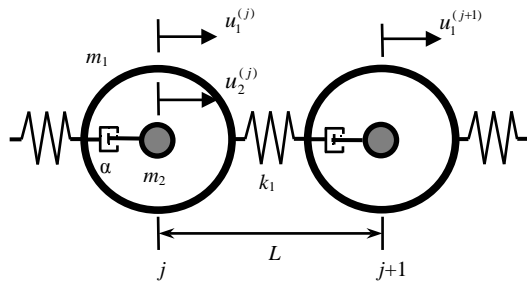


Рис. 2. Механическая модель вязкоупругого метаматериала

Fig. 2. The mechanical model of a viscoelastic metamaterial

Однако в рамках чисто упругой постановки задачи исследовать диссипативные свойства метаматериала не представляется возможным. Для решения такой задачи заменим упругий элемент с жесткостью k_2 на вязкий

элемент (рис. 2). Уравнения динамики модифицированной цепочки «масса-в-массе» в длинноволновом диапазоне будут иметь вид

$$\frac{m_1}{L} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - k_1 L \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{L} \frac{\partial}{\partial t} (u_2 - u_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{m_2}{L} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{L} \frac{\partial}{\partial t} (u_2 - u_1) = 0. \quad (2)$$

Заметим, что система (1), (2) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{m_1 m_2}{L \alpha (m_1 + m_2)} \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - \frac{C_0^2 m_2}{L \alpha} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (3)$$

Если ввести в (3) безразмерные перемещения $U = \frac{u_1}{u_0}$, координату $X = \frac{x}{a}$ и время $T = \frac{t}{b}$, где $b = \frac{m_2}{L \alpha}$, $a = C_0 b$, то это уравнение переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \delta \frac{\partial^3 U}{\partial T^3} - \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial T} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\delta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$. Этот параметр принадлежит интервалу $\delta = [0, 1]$, включающему в себя два предельных случая: $\delta \rightarrow 1$, если $m_1 \gg m_2$, и $\delta \rightarrow 0$, если $m_2 \gg m_1$.

2. Дисперсионный анализ при комплексных волновых числах

Фундаментальное решение этого уравнения имеет вид бегущей волны:

$$U(X, T) = U_0 e^{ikX - i\omega T}, \quad (5)$$

где i – мнимая единица; k – волновое число; ω – круговая частота; U_0 – амплитуда.

Закон дисперсии $\Phi(k, \omega) = 0$ уравнения (4) определяется из соотношения

$$i\delta\omega^3 - \omega^2 - ik^2\omega + \kappa^2 = 0. \quad (6)$$

В случае краевой задачи общее решение уравнения (4) имеет следующие формы:

$$U(X, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\omega) e^{ik(\omega)X - i\omega T} d\omega, \quad (7)$$

где $\Theta(\omega)$ – преобразование Фурье начального возмущения,

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(0, T) e^{i\omega T} dT. \quad (8)$$

В случае задачи Коши общее решение уравнения (4) имеет следующие формы:

$$U(X, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\kappa) e^{i\kappa X - i\omega(\kappa)T} d\kappa, \quad (9)$$

где $\chi(\kappa)$ – преобразование Фурье начального возмущения,

$$\chi(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(X, 0) e^{i\kappa X} dX. \quad (10)$$

В общем случае κ и ω являются комплексными величинами. Для анализа дисперсии и затухания волны при рассмотрении краевой задачи перепишем волновое число $\kappa(\omega)$ в виде

$$\kappa(\omega) = k(\omega) + i\lambda(\omega), \quad (11)$$

где $k = \text{Re}(\kappa)$ и $\lambda = \text{Im}(\kappa)$.

Используя эти обозначения, выражение (5) можно переписать следующим образом:

$$U(X, T) = U_0 e^{i(k+i\lambda)X - i\omega T} = e^{-\lambda X} U_0 e^{i\kappa X - i\omega T}. \quad (12)$$

Очевидно, что при положительных значениях λ получаем экспоненциально убывающую волну, распространяющуюся вдоль положительного направления пространственной оси. Другими словами, спектральные компоненты $k(\omega) = \text{Re}(\kappa)$ экспоненциально убывают при $X, T \rightarrow \infty$ при $\lambda(\omega) > 0$. С другой стороны, если $\lambda(\omega) < 0$, то амплитуды спектральных компонент будут возрастать в геометрической прогрессии. В последнем случае решение линейного уравнения (4) становится неустойчивым при $T \gg 0$.

Как обсуждалось выше, в целях изучения распространения волн вдоль оси X необходимо решить дисперсионное соотношение (6) относительно волновых чисел κ . Решение находится в следующей форме:

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega \sqrt{1 - i\delta\omega}}{\sqrt{1 - i\omega}}. \quad (13)$$

Для действительных значений κ и λ дисперсионное соотношение (6) принимает следующий вид:

$$k^2 + 2ik\lambda - \lambda^2 - ik^2\omega + 2k\lambda\omega + i\lambda^2\omega - \omega^2 + i\delta\omega^3 = 0. \quad (14)$$

С целью раздельного изучения действительной и мнимой частей уравнения (15) перепишем его в виде системы

$$\begin{cases} k^2 - \lambda^2 + 2k\lambda\omega - \omega^2 = 0, \\ 2k\lambda - \omega(k^2 - \lambda^2) + \delta\omega^3 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Ее решения относительно k и λ имеют вид

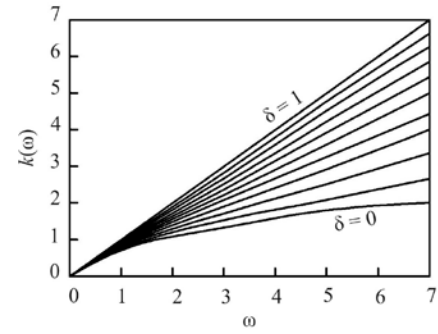
$$k(\omega) = LM \left(\sqrt{1 + M^2} - 1 \right)^{-1/2}, \quad (16)$$

$$\lambda(\omega) = L \left(\sqrt{1 + M^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (17)$$

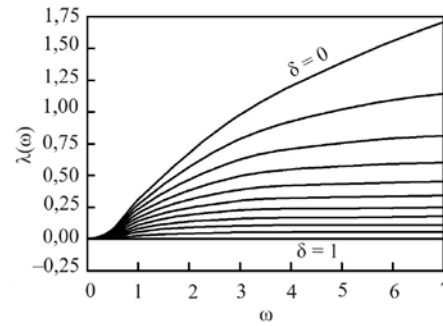
где

$$L = \omega \sqrt{\frac{1 + \delta\omega^2}{2(1 + \omega^2)}}, \quad M = \frac{(1 - \delta)\omega}{1 + \delta\omega^2}. \quad (18)$$

Частотные зависимости $k(\omega) = \text{Re}(\kappa)$ и $\lambda(\omega) = \text{Im}(\kappa)$ представлены на рис. 3 для различных значений параметра δ .



a



b

Рис. 3. Частотные зависимости $k(\omega) = \text{Re}(\kappa)$ (a) и $\lambda(\omega) = \text{Im}(\kappa)$ (б) при значениях параметра δ , лежащих в интервале $\delta = [0, 1]$

Fig. 3. The frequency dependences $k(\omega) = \text{Re}(\kappa)$ (a) and $\lambda(\omega) = \text{Im}(\kappa)$ (b) for the values of the parameter δ lying in the interval $\delta = [0, 1]$

Если $\delta = 1$, то из (16) и (17) можно найти

$$k(\omega) = \omega, \quad \lambda(\omega) = 0. \quad (19)$$

Это соответствует идеально упругому материалу, в котором отсутствует диссипация и волна распространяется без затухания.

В случае когда $\omega \rightarrow \infty$, легко видеть, что $k(\omega) \rightarrow \omega\sqrt{\delta}$, а также

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \lambda(\omega) = \frac{1 - \delta}{2\sqrt{\delta}}. \quad (20)$$

Для больших частот экспоненциальная постоянная λ зависит только от параметра δ .

Фазовая скорость определяется как $v_{ph}(\omega) = \frac{\omega}{k}$,

откуда

$$v_{ph} = \frac{\sqrt{2(1 + \omega^2)(N - \delta\omega^2 - 1)}}{(1 - \delta)\omega}, \quad (21)$$

где

$$N = \sqrt{(1 + \omega^2)(1 + \delta^2\omega^2)}. \quad (22)$$

Частотная зависимость $v_{ph}(\omega)$ для различных значений параметра δ показана на рис. 4. В случае $\delta = 1$ фазовая скорость $v_{ph}(\omega) = 1$ (см. соотношение (19)). Для больших частот фазовая скорость является пределом:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} v_{ph}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \quad (23)$$

Групповая скорость, которая определяется с использованием соотношения $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}$, принимает в этом случае следующий вид:

$$v_{gr} = \frac{2(1+\omega^2)^2 \sqrt{2(1+\delta^2\omega^2)} (N - \delta\omega^2 - 1)^{3/2}}{\omega(1-\delta) [(1+3\delta^2)\omega^4 - (2N+2\delta N - 3\delta^2 - 5)\omega^2 - 4(N-1)]}, \quad (24)$$

где N определяется из соотношения (22).

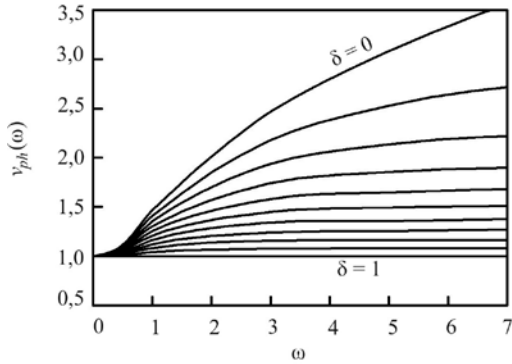


Рис. 4. Частотная зависимость $v_{ph}(\omega)$ для различных значений параметра δ

Fig. 4. Frequency dependence $v_{ph}(\omega)$ for various values of the parameter δ

Частотная зависимость $v_{gr}(\omega)$ для различных значений параметра δ представлена на рис. 5. В случае $\delta = 1$, $v_{ph}(\omega) = 1$ (см. соотношение (19)). Для больших частот групповая скорость имеет тот же предел, что и фазовая скорость:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} v_{gr}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \quad (25)$$

Существенное различие между поведением фазовой и групповой скоростей заключается в том, что фазовая скорость является монотонной функцией частоты, а групповая скорость имеет максимум, показанный на рис. 5 пунктирной линией. Сравнение двух скоростей для одного значения δ представлено на рис. 6. Групповая скорость больше фазовой скорости при любой частоте. Это означает, что материал обладает аномальной дисперсией. Этот факт справедлив и для $\delta < 1$, поскольку, как упоминалось выше, если $\delta = 1$, то $v_{gr} = v_{ph} = 1$, то есть имеет место недисперсионная модель.

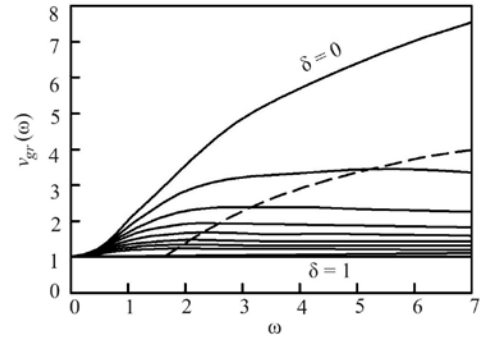


Рис. 5. Частотная зависимость $v_{gr}(\omega)$ для различных значений параметра δ

Fig. 5. Frequency dependence $v_{gr}(\omega)$ for various values of the parameter δ

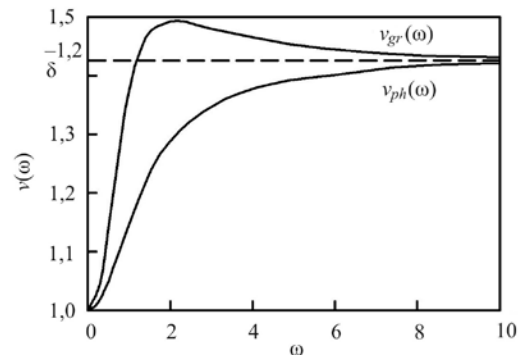


Рис. 6. Графическое сравнение фазовой и групповой скоростей при фиксированном значении δ

Fig. 6. Graphic comparison of phase and group velocities at a fixed value of δ

3. Дисперсионный анализ при комплексных частотах

Фундаментальное решение уравнения (4) имеет вид уравнения бегущей волны

$$U(X, T) = U_0 e^{ikX - i\Omega T}, \quad (26)$$

где i – мнимая единица; k – волновое число; Ω – угловая частота и U_0 – амплитуда. Закон дисперсии $\Phi(k, \Omega) = 0$, полученный подстановкой выражения (26) в уравнение (4), определяется соотношением

$$k^2 - \Omega^2 - ik^2\Omega + i\delta\Omega^3 = 0. \quad (27)$$

В случае задачи Коши общее решение уравнения (4) имеет следующий вид:

$$U(X, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(k) e^{ikX - i\Omega k} dk, \quad (28)$$

где $\chi(k)$ – это преобразование Фурье начального возмущения в момент времени $T = 0$,

$$\chi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} U(X, T) e^{ikX - i\Omega T} dX. \quad (29)$$

Зависимость $\Omega = \Omega(k)$ может быть получена из дисперсионного соотношения (27). В общем случае $\Omega(k)$ является комплексной величиной. В целях обеспечения дисперсионного анализа задачи Коши, перепишем частоту $\Omega(k)$ в виде

$$\Omega(k) = \omega(k) + i\mu(k), \quad (30)$$

где $\omega = Re(\Omega)$, $\mu = Im(\Omega)$.

Используя эти обозначения, выражение (26) можно переписать следующим образом:

$$U(X, T) = U_0 e^{ikX - i\omega T + \mu T} = e^{\mu T} U_0 e^{ikX - i\omega T}. \quad (31)$$

Очевидно, что при отрицательных значениях $\mu(k)$ функция является экспоненциально-затухающей. Другими словами, условия экспоненциального затухания $\mu(k) < 0$ при $T \rightarrow \infty$. С другой стороны, если $\mu(k) > 0$, то амплитуда соответствующей спектральной составляющей растет экспоненциально с течением времени и решение уравнения (4) становится неустойчивым.

Для исследования начальной задачи нужно решить дисперсионное соотношение (27) относительно волнового числа k . Учитывая выражение (30), закон дисперсии (27) принимает следующий вид:

$$k^2 - ik^2\omega - \omega^2 + i\delta\omega^3 + k^2\mu - 2i\omega\mu - 3\delta\omega^2\mu + \mu^2 - 3i\delta\omega\mu^2 + \delta\mu^3 = 0. \quad (32)$$

Разделяя в выражении (32) действительную и мнимую части, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} k^2(1 + \mu) - 3\delta\omega^2\mu + \delta\mu^3 - \omega^2 + \mu^2, \\ \delta\omega^3 - 3\delta\omega\mu^2 - 2\omega\mu - k^2\omega = 0, \end{cases} \quad (33)$$

Относительно ω и μ система (33) в общем виде имеет девять возможных решений. Среди этого множества решений только одно является физически обоснованным, а именно: при $\omega \in R$, $\mu \in R$, $\mu \leq 0$

$$\begin{cases} \omega = \frac{\sqrt{6}}{12\delta S} \sqrt{\sqrt[3]{2}S^4(1 - 3k^2\delta) + 2\sqrt[3]{4}(1 - 3k^2\delta)^2}, \\ \mu = \frac{1}{12\delta S} [\sqrt[3]{4}S^2 - 4S + 2\sqrt[3]{2}(103k^3\delta)], \end{cases} \quad (34)$$

где

$$S = \sqrt[3]{2 - 9k^2\delta(1 - 3\delta) + 3k\delta\sqrt{3Q}}, \quad (35)$$

$$Q = 4k^4\delta - k^2(1 + 18\delta - 27\delta^2) + 4. \quad (36)$$

Можно показать, что три различных решения этого дисперсионного соотношения по отношению к ω и μ зависят от значения параметра δ . Эти решения соответствуют следующим значениям δ : (а) $0 < \delta \leq 1/9$; (б) $1/9 < \delta < 1$; (в) $\delta = 1$.

Решение соотношения (34), удовлетворяющее вышеупомянутым условиям $\omega \in R$, $\mu \in R$, $\mu \leq 0$, в случае $0 < \delta \leq 1/9$ справедливо только для некоторого набора волновых чисел. Этот набор определяется условием

$k \in \{k \mid 0 < k \leq k_\alpha \wedge k_\beta \leq k < 0\}$, где значения волновых чисел k_α и k_β могут быть определены следующим образом:

$$k_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}\delta} \sqrt{1 + 18 - 27\delta^2 - \sqrt{(1 - \delta)(1 - 9\delta)^3}}, \quad (37)$$

$$k_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}\delta}. \quad (38)$$

Значения k_α и k_β являются границами зоны разрыва, при этом $k_\alpha \leq k_\beta$. Волны, волновые числа которых расположены между k_α и k_β , не распространяются. При малых значениях δ величины k_α и k_β ограничиваются следующим образом:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} k_\alpha = 2, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} k_\beta = \infty, \quad (39)$$

и при $\delta = 1/9$ имеем $k_\alpha = k_\beta = \sqrt{3}$.

На рис. 7 показаны дисперсионные кривые для значений $0 < \delta \leq 1/9$. Функция $\mu(k) = Im(k)$ является отрицательной для всех k , что в сочетании с выражением (26) означает, что волновой процесс экспоненциально убывает с течением времени.

С увеличением значения параметра δ ширина области разрыва становится меньше, и в конечном счете для $\delta = 1/9$ зона разрыва полностью исчезает. Кроме того, значение экспоненциально затухающей функции $\mu(k)$ становится меньше с увеличением δ , особенно при высокочастотных случаях (при больших значениях k). Кроме того, на рис. 7 видно, что значения затухающей функции $\mu(k)$ являются более или менее постоянными справа от области разрыва ($k > k_\beta$). Пределы соотношений $\omega(k)$ и $\mu(k)$ при больших k находятся из соотношений

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(k) = -\frac{1 - \delta}{2\delta} = \mu_\alpha. \quad (40)$$

Фазовая скорость, которая определяется как $v_{ph}(k) = \omega/k$, может быть получена из (34):

$$v_{ph} = \frac{\sqrt{6}}{12\delta k S} \sqrt{\sqrt[3]{2}S^4 - 4S^2(1 - 3k^2\delta) + 2\sqrt[3]{4}(1 - 3k^2\delta)^2}. \quad (41)$$

Групповая скорость может быть рассчитана путем дифференцирования: $v_{gr}(k) = d\omega/dk$. Очевидно, что границы зоны разрыва, определенные для дисперсионного соотношения, справедливы также для фазовой и групповой скоростей. Это означает, что

$$\exists v_{ph}(k) \wedge \exists v_{gr}(k), \quad \forall k \in \{k \mid 0 < k_\alpha \wedge k_\beta \leq k < \infty\}. \quad (42)$$

На рис. 8 показаны зависимости фазовой и групповой скоростей от волнового числа k . Как фазовая, так и групповая скорости имеют значения $v_{gr} = v_{ph} = 1$ в начальный момент при $k = 0$. Пределы этих скоростей для больших значений k находятся из уравнений

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_{ph} = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{gr} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} = v_\alpha. \quad (43)$$

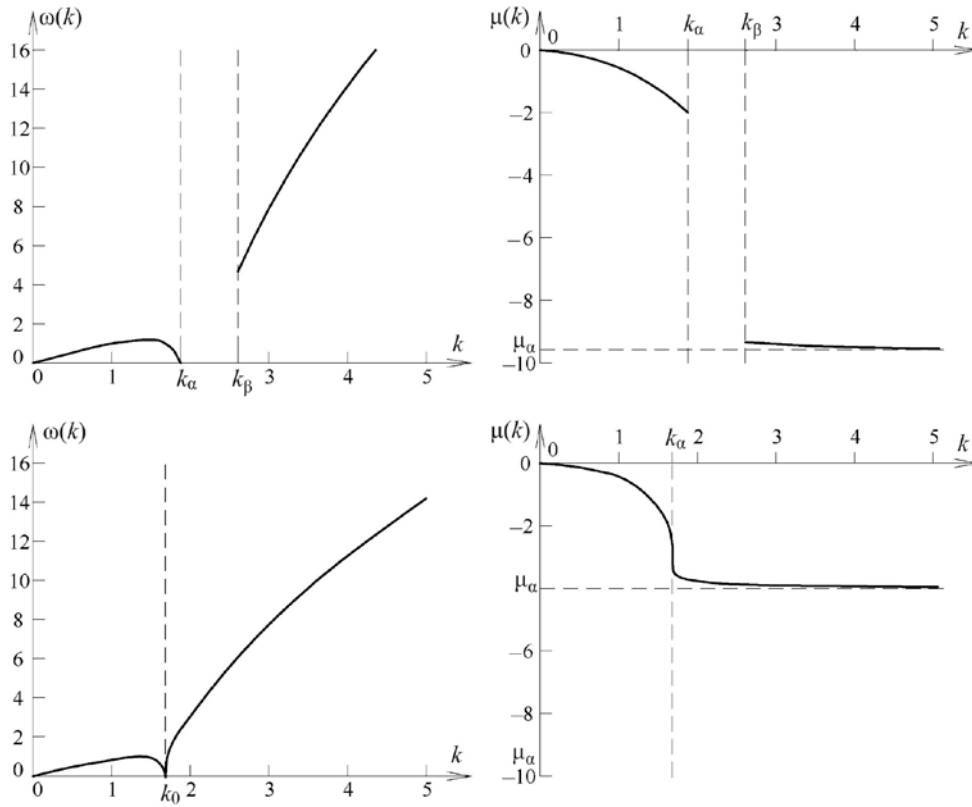


Рис. 7. Дисперсионные соотношения $\omega(k)$ и $\mu(k)$, вычисленные при $\delta = 0,05$ (верхний ряд) и $\delta = 1/9$ (нижний ряд)

Fig. 7. The dispersion relations $\omega(k)$ and $\mu(k)$ calculated at $\delta = 0,05$ (upper row) and $\delta = 1/9$ (lower row)

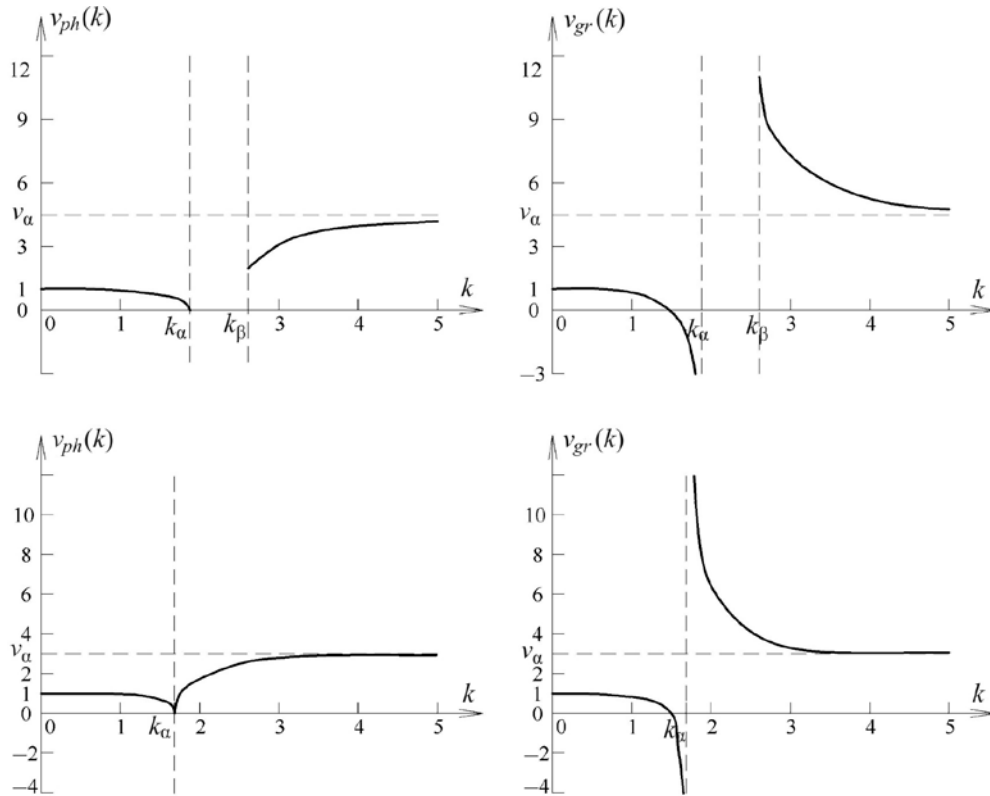


Рис. 8. Фазовая и групповая скорости, вычисленные при $\delta = 0,05$ (верхний ряд) и $\delta = 1/9$ (нижний ряд)

Fig. 8. Phase and group velocities calculated at $\delta = 0,05$ (upper row) and $\delta = 1/9$ (lower row)

При волновых числах, лежащих в диапазоне $0 < k < k_a$, имеет место соотношение $v_{ph} > v_{gr}$, а это означает, что тип дисперсии на этом участке является нормальным. При значениях $k > k_\beta$ имеем $v_{ph} < v_{gr}$, это означает, что на этом участке имеет место аномальная дисперсия. Численный анализ показывает, что отрицательная групповая скорость имеет место только в области нормальной дисперсии, если $0 < \delta < 0,1345$, т.е. справедлив так называемый «эффект обратной волны», когда, несмотря на то, что фазовая скорость направлена в положительном направлении оси X , энергия в такой волне переносится в отрицательном направлении. На возможность такой ситуации впервые указал Лэмб [42], построивший ряд моделей искусственных типов сред, обладающих данным свойством. Существенное внимание таким случаям уделял Л.И. Мандельштам [43, 44]. Возможность противоположного направления фазовой и групповой скоростей в идеально упругом изотропном теле впервые продемонстрирована в [45]. В случае упругих волноводов «обратная волна» описана в книге [46]. Появление отрицательной групповой скорости в микроструктурированных твердых материалах было рассмотрено в [47, 48], в поврежденных материалах – в [49, 50].

Решение уравнения (34), удовлетворяющее условиям $\omega \in R, \mu \in R, \mu \leq 0$, когда $1/9 < \delta < 1$, справедливо для всех значений волнового числа k . В этом случае не существует зоны разрыва, и это главное различие между настоящим и предыдущим случаями.

Фазовая и групповая скорости в этом случае рассчитываются аналогично предыдущему, но без необходимости применения границ зоны разрыва (см. (42)).

На рис. 9 показаны примеры дисперсионных кривых для данного случая. Дисперсионные кривые являются непрерывными функциями, и можно заметить, что с увеличением параметра δ кривая $\omega(k)$ становится близкой к дисперсионной зависимости для недиспергирующей среды ($\omega(k) = k$). Затухание волны менее выражено по сравнению с предыдущим случаем. Так же, как и в предыдущем случае, значение экспоненциально затухающей функции $\mu(k)$ становится меньше при увеличении величины δ , особенно при больших значениях k .

На рис. 10 представлены зависимости фазовой и групповой скоростей от волнового числа k . Как и в предыдущем случае, можно выделить зоны нормальной и аномальной дисперсии. Можно показать, что зоны с различной дисперсией существуют при значениях $\delta < 0,2$. Области нормальной и аномальной дисперсии разделены в точке $k = k_*$. При $k < k_*$ имеет место нормальная дисперсия $v_{ph} > v_{gr}$, при $k > k_*$ имеет место аномальная дисперсия $v_{ph} < v_{gr}$. При этом значения k_* являются функцией параметра δ . Численный анализ показывает, что k_* может изменяться в диапазоне $0 < k_* < \sqrt{3}$. Максимальное значение $k_* = \sqrt{3}$ достигается при $\delta \rightarrow 1/9$.

При значении $\delta > 0,2$ было установлено, что $k_* = 0$ и, следовательно, область нормальной дисперсии полностью отсутствует. Рис. 10 показывает разницу поведения групповой и фазовой скоростей для $\delta < 0,2$ и $\delta > 0,2$.

Ранее было установлено, что отрицательная групповая скорость появляется, если $\delta < 0,1345$. На рис. 11 показаны графики групповой и фазовой скоростей для δ немного меньше 0,1345, а также для случая $\delta = 0,134$.

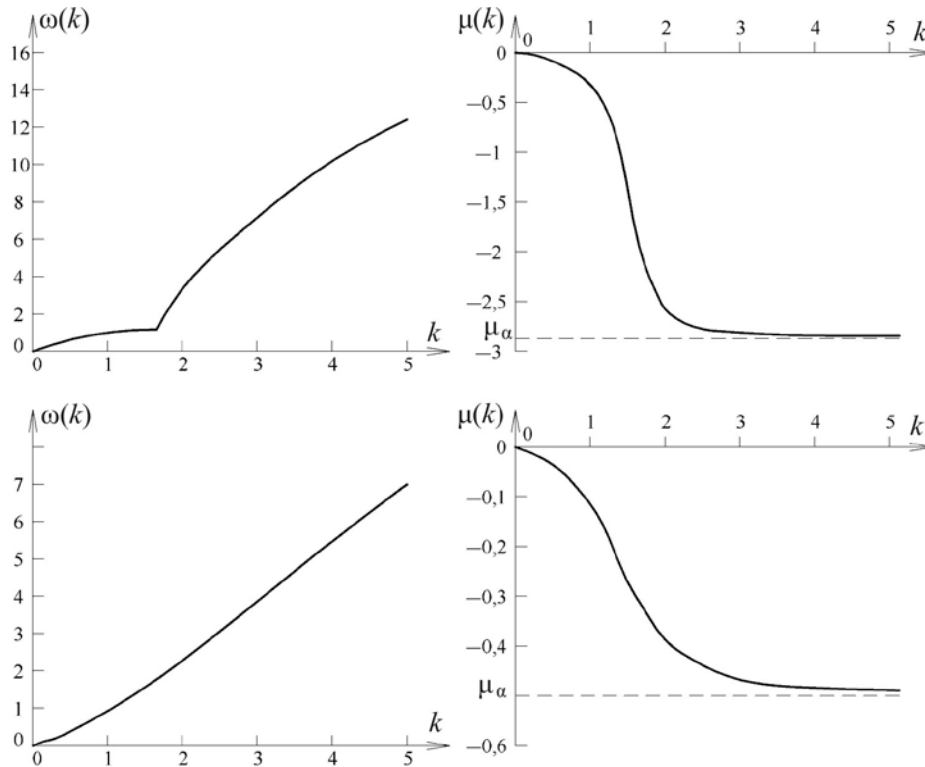


Рис. 9. Дисперсионные соотношения $\omega(k)$ и $\mu(k)$, вычисленные при $\delta = 0,15$ (верхний ряд) и $\delta = 0,5$ (нижний ряд)

Fig. 9. The dispersion relations $\omega(k)$ and $\mu(k)$ calculated at $\delta = 0,15$ (upper row) and $\delta = 0,5$ (lower row)

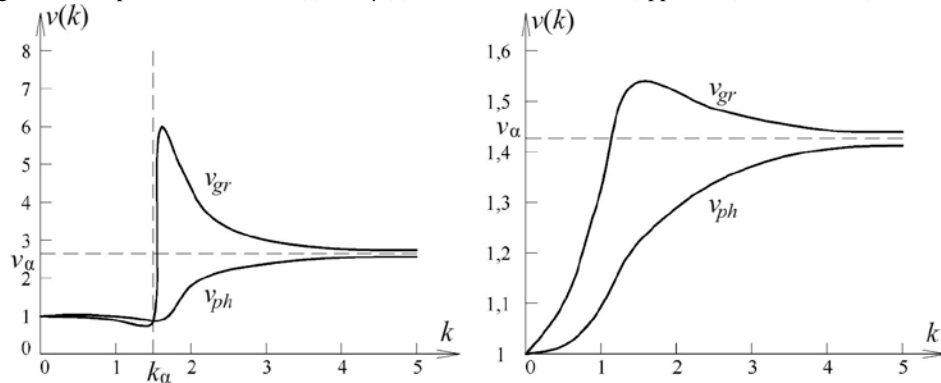


Рис. 10. Кривые фазовой и групповой скоростей при $\delta = 0,15$ (слева) и $\delta = 0,5$ (справа)

Fig. 10. Phase and group velocity curves for $\delta = 0,15$ (left) and $\delta = 0,5$ (right)

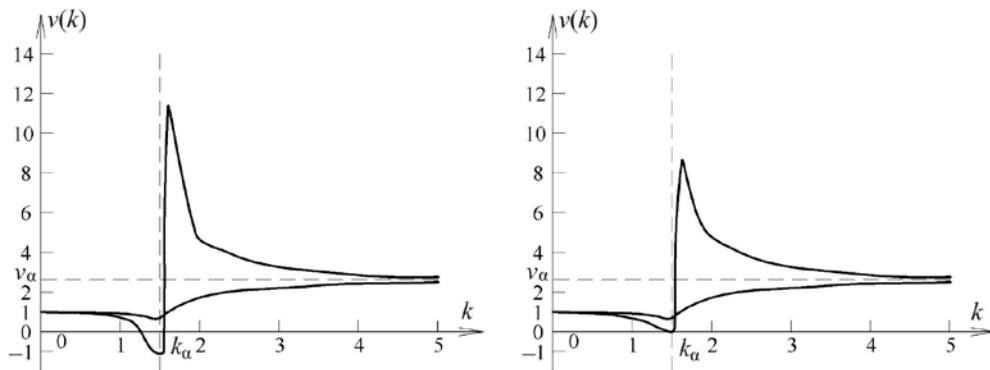


Рис. 11. Кривые фазовой и групповой скоростей при $\delta = 0,128$ (слева) и $\delta = 0,134$ (справа)

Fig. 11. Phase and group velocity curves for $\delta = 0,128$ (left) and $\delta = 0,134$ (right)

Видно, что при $\delta \rightarrow 0,134$ минимум групповой скорости стремится к нулю. Эффекты отрицательной групповой скорости и аномальной дисперсии часто «маскируются» ввиду большого влияния экспоненциального затухания, определяемого величиной $\mu(k)$. Например, волновые компоненты, связанные с сильной аномальной дисперсией ($\delta < 0,2$ и $k > k_*$), также связаны с большими значениями функции экспоненциального затухания $\mu(k)$. Это означает, что для этого конкретного примера аномальная дисперсия может быть выражена только в начале эволюции волны и только в течение короткого промежутка времени. С течением времени эффект аномальной дисперсии будет достаточно быстро исчезать. Скорее всего, аномальная дисперсия будет опережаться режимом нормальной дисперсии, который имеет гораздо меньший эффект затухания (см. рис. 7, 9).

Решение уравнения (34), удовлетворяющее условиям $\omega \in R$, $\mu \in R$, $\mu \leq 0$, в случае, когда $\delta = 1$, принимает вид

$$\begin{cases} \omega = k, \\ \mu = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Хорошо известно, что этот случай представляет недиспергирующее решение. Тот факт, что $\mu = 0$, означает, что решение дисперсионного соотношения является действительным, и из уравнения (30) следует, что

$\Omega(k) = \omega(k)$. Кроме того, несложно показать, что в этом случае уравнение (4) может быть сведено к обычному волновому уравнению в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \quad (45)$$

а фазовая и групповая скорости $v_{ph} = v_{gr} = 1$.

4. Эволюция возмущений

Рассмотрим уравнение (4) со следующими начальными условиями:

$$U(X, 0) = A \operatorname{sech}(\gamma X) = \frac{2A}{e^{\gamma X} + e^{-\gamma X}}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial U(X, 0)}{\partial t} = 0, \quad (47)$$

где A – амплитуда; γ – пространственный параметр.

Развитие начального ($T_0 = 0$) возмущения (46), (47) прослеживается в течение трех последующих моментов времени (рис. 12).

Решение задачи симметрично относительно $X = 0$, потому что начальное значение (46) является четной функцией. Решения, полученные при $\delta = 0,05$, отложены слева от оси симметрии (пунктирная линия), а решения, полученные при $\delta = 0,5$, отложены справа от нее.

Сравнение приведенных случаев показывает различие в дисперсии. Характер затухания возмущений может изменяться и зависит от величины δ . В случае с малым значением параметра δ затухание происходит гораздо быстрее, чем в случае, когда δ больше. Этот результат согласуется с различиями в дисперсионных участках графиков $\mu(k)$, представленных на рис. 7 и 10. Начальные участки (при $T = T_0$) в обоих случаях качественно подобны. Это объясняется тем, что в обоих случаях имеет место аномальная дисперсия при больших значениях волнового числа k . Основное различие между представленными случаями возникает при рассмотрении хвостовой части кривых. При малых значениях параметра δ решение ведет себя скорее как решение уравнения диффузии, для больших же значений δ решение ведет себя аналогично решению волнового уравнения. Наличие более громоздкой хвостовой части при малых значениях δ объясняется наложением эффектов нормальной дисперсии, отрицательной групповой скорости и наличием зоны разрыва (см. рис. 8). При больших значениях параметра δ все эти явления отсутствуют (см. рис. 9, 10).

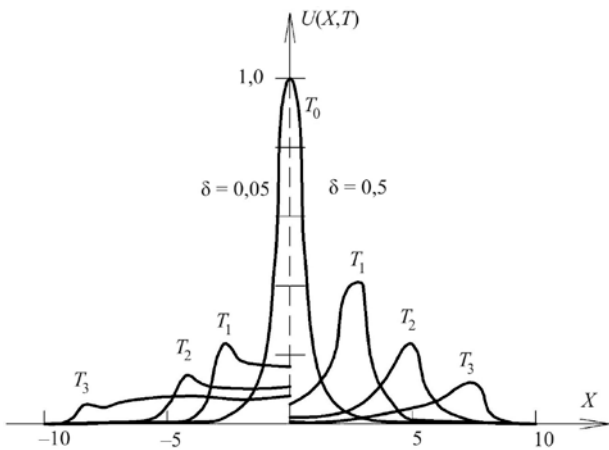


Рис. 12. Мгновенные профили волны при $A = 1$ и $\gamma = 3$, определенные в моменты времени $T_0 = 0, T_1 = 7/3, T_2 = 14/3, T_3 = 21/3$, рассчитанные при двух значениях параметра δ

Fig. 12. Instantaneous wave profiles at $A = 1$ and $\gamma = 3$, determined at time instants $T_0 = 0, T_1 = 7/3, T_2 = 14/3, T_3 = 21/3$, calculated for two values of the parameter δ

На рис. 13 показаны профили волны при асимметричном развитии для четырех последовательных моментов времени. Начальное значение состоит из суммы двух возмущений, которые имеют различные основные частоты. Начальное возмущение имеет вид

$$U(X, 0) = A \operatorname{sech}(\gamma X) + B \operatorname{sech}[g(X + 1)], \quad (48)$$

$$\frac{\partial U(X, 0)}{\partial t} = 0. \quad (49)$$

Здесь основное возмущение, отмеченное на рис. 13 как a , имеет амплитуду $A = 1$ и пространственный параметр $\gamma = 1,6$ (соответствует возмущению с низкой ос-

новной частотой). Вторичное возмущение, которое отмечено на рис. 13 как b , сдвигается влево с определенным шагом по отношению к основному возмущению. Вторичное возмущение имеет амплитуду $B = 0,55$ и пространственный параметр $g = 10$, что соответствует высокой основной частоте.

На рис. 13 видно, что высокочастотное возмущение b распространяется быстрее, чем основное возмущение, которое имеет меньшую частоту. Например, в положении b_2 и в соответствующий момент времени T_2 максимум возмущения b_0 достиг максимума главного возмущения, а в положении b_3 максимум возмущения b_0 опережает максимум главного возмущения. Это явление объясняется аномальной дисперсией, которая выражается в том, что групповая скорость превышает фазовую (см. рис. 10).

По результатам дисперсионного анализа, представленного на рис. 9, волновые компоненты высокой частоты также должны затухать быстрее, чем низкочастотные компоненты. Действительно, это находит подтверждение на рис. 13. Пиковое значение основного возмущения уменьшилось от начальной амплитуды $A = 1$ в момент T_0 до $A \approx 0,2$ в момент T_3 . С другой стороны, амплитуда возмущения b_0 уменьшается более существенно, от $B = 0,55$ в момент T_0 до $B \approx 0$ в момент T_3 .

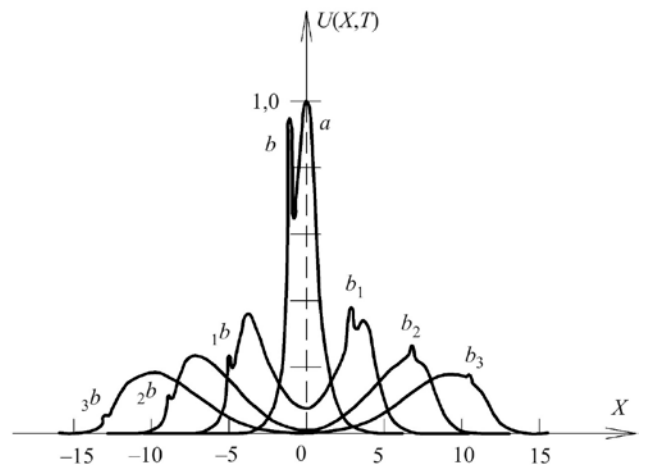


Рис. 13. Мгновенные профили волны при $\delta = 0,5, \gamma = 1,6, g = 10, A = 1, B = 0,55$, в моменты времени $T_0 = 0, T_1 = 15/4, T_2 = 30/4, T_3 = 45/4$. Маркеры b_i указывают положение пика b_0 при распространении возмущения вправо, ${}_i b$ – при распространении возмущения влево

Fig. 13. Instantaneous wave profiles at $\delta = 0.5, \gamma = 1.6, g = 10, A = 1, B = 0.55$, at times $T_0 = 0, T_1 = 15/4, T_2 = 30/4, T_3 = 45/4$. Markers b_i indicate the position of peak b_i when the perturbation propagates to the right, ${}_i b$ – when the perturbation propagates to the left

Заключение

В результате проведения аналитических исследований и численных расчетов показано, что продольная волна в вязкоупругом метаматериале, задаваемом как цепочка «масса-в-массе», обладает дисперсией и час-

точно-зависимым затуханием. Проанализирована эволюция профиля волны как в низкочастотном, так и в высокочастотном диапазонах.

Благодарность

Библиографический список

1. Cummer S.A., Christensen J., Alù A. Controlling sound with acoustic metamaterials // *Nat. Rev. Mater.* – 2016. – No 1. – P. 16001.
2. Shining Zhu, Xiang Zhang. Metamaterials: artificial materials beyond nature // *National Science Review.* – 2018. – Vol. 5. – No. 2. – P.131.
3. Zhang X, Yin L, Fang N. Focusing ultrasound with an acoustic metamaterial network // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol. 102. – No 19. – P. 194301-1-4.
4. Акустические волны в метаматериалах, кристаллах и структурах с аномальным преломлением / В.А. Буров, В.Г. Волошинов, К.В. Дмитриев, Н.В. Поликарпова // *Успехи физических наук.* – 2011. – Т. 181, № 11. – С. 1205–1211.
5. Special issue on acoustic metamaterials // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2012. – Vol. 132. – No. 4. – Pt. 2. – P. 2783–2945.
6. Acoustic metamaterials and phononic crystals. Ed. P.A. Deymier. – Berlin: Springer-Verlag, 2013. – 378 p.
7. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking. Eds. R.V. Craster, S. Guenneau. – Dordrecht: Springer, 2013. – 323 p.
8. Бобровницкий Ю.И. Эффективные параметры и энергия акустических метаматериалов и сред // *Акуст. журн.* – 2014. – Т. 60, № 2. – С. 137–144.
9. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // *Акуст. журн.* – 2015. – Т. 61, № 3. – С. 283–294.
10. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М., Лактионов М.М. Дискретная модель акустических метаматериалов с потерями // *Акуст. журн.* – 2016. – Т. 62, № 1. – С. 3–9.
11. Федотовский В.С. Поперечные волны в дисперсном метаматериале со сферическими включениями // *Акуст. журн.* – 2015. – Т. 61, № 3. – С. 311–316.
12. Федотовский В.С. Пористая среда как акустический метаматериал с отрицательными инерционными и упругими свойствами // *Акуст. журн.* – 2018. – Т. 64, № 5. – С. 547–553.
13. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор) // *Акуст. журн.* – 2018. – Т. 64, № 5. – С. 517–525.
14. Cosmo F. di, Laudato M., Spagnuolo M. Acoustic metamaterials based on local resonances: homogenization, optimization and applications // *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials.* – Springer, 2018. – P. 247–274.
15. Abali E., Müller W., Isola F. dell' Theory and computation of higher gradient elasticity theories based on action principles // *Archive of Applied Mechanics.* – 2017. – Vol. 87. – No. 9. – P. 1495–1510.
16. Giorgio I., Della Corte A., Isola F. dell' Dynamics of 1D nonlinear pantographic continua // *Nonlinear Dynamics.* – 2017. – Vol. 88. – No 1. – P. 21–31.
17. Ming-Hui Lu, Liang Feng, Yan-Feng Chen. Phononic crystals and acoustic metamaterials // *Materials Today.* – 2009. – Vol. 12. – No. 12. – P. 34–42.
18. First evidence of non-locality in real band-gap metamaterials: determining parameters in the relaxed micromorphic model / A. Madeo, G. Barbagallo, M.V. d'Agostino, L. Placidi,

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (код проекта 19-19-00065).

Acknowledgment

The work was supported by the Russian Science Foundation (Project No 19-19-00065).

P. Neff // *Proceedings of the Royal Society of London A.* – 2016. – Vol. 472. – No 2190. – P. 20160169.

19. Designing a light fabric metamaterial being highly macroscopically tough under directional extension: first experimental evidence / F. dell'Isola, T. Lekszycki, M. Pawlikowski, R. Grygoruk, L. Greco // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. ZAMP.* – 2015. – Vol. 66. – No. 6. – P. 3473–3498.

20. Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium / F. dell'Isola, I. Giorgio, M. Pawlikowski, N.L. Rizzi // *Proceedings of the Royal Society of London A.* – 2016. – Vol. 472. – No. 2185.

21. El Sherbiny M.G., Placidi L. Discrete and continuous aspects of some metamaterial elastic structures with band gaps // *Archive of Applied Mechanics.* – 2018. – P. 1–18.

22. Фуллерены: учеб. пособие / Л.Н. Сидоров, М.А. Юровская [и др.]. – М.: Экзамен, 2005. – 688 с.

23. Упругие свойства ультратвердых фуллеритов / В.Д. Бланк, В.М. Левин, В.М. Прохоров, С.Г. Буга, Г.А. Дубицкий, Н.Р. Серебряная // *ЖЭТФ.* – 1998. – Т. 114. – С. 1364–1374.

24. Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media / H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.P. Lebedev [et al.] // *Archive of Applied Mechanics.* – 2010. – Vol. 80. – No. 3. – P. 217–227.

25. Dreyer W., Herrmann M., Mielke A. Micro-macro transition in the atomic chain via Whitham's modulation equation // *Nonlinearity.* – 2005. – Vol. 19. – No 2. – P. 471–500.

26. Linear and nonlinear wave propagation in negative refraction metamaterials / V.M. Agranovich, Y.R. Shen, R.H. Baughman, A.A. Zakhidov // *Phys. Rev.* – 2004. – Vol. B 69. – P. 165112.

27. Berezovski A., Giorgio I., Corte A.D. Interfaces in micromorphic materials: wave transmission and reflection with numerical simulations // *Mathematics and Mechanics of Solids.* – 2016. – Vol. 21. – No 1. – P. 37–51.

28. Engelbrecht J., Berezovski A., Salupere A. Nonlinear deformation waves in solids and dispersion // *Wave Motion.* – 2007. – Vol. 44. – No. 6. – P. 493–500.

29. Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps / A. Madeo, P. Neff, I.D. Ghiba, L. Placidi, G. Rosi // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* – 2015. – Vol. 27. – No. 4–5. – P. 551–570.

30. Li J., Chan C.T. Double-negative acoustic metamaterial // *Phys. Rev. E.* – 2004. – Vol. 70. – P. 055602.

31. Ultrasonic metamaterials with negative modulus / N. Fang, D. Xi, J. Xu, M. Ambati, W. Srituravanich, C. Sun, X. Zhang // *Nat. Mater.* – 2006. – Vol. 5. – P. 452–456.

32. Shi Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density / Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu, J. // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 99. – P.093904.

33. Cheng Y., Xu J.Y., Liu X.J. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic

density and modulus // *Phys. Rev. B.* – 2008. – Vol. 77. – P. 045134.

34. Chan C.T., Li J., Fung K.H. On extending the concept of double negativity to acoustic waves // *JZUS.* – 2006. – Vol. A 7. – P. 24–28.

35. *Mechanics of Generalized Continua.* Eds. H. Altenbach, G.A. Maugin, V.I. Erofeev. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011. – 350 p.

36. Павлов И.С., Потапов А.И. Структурные модели в механике нанокристаллических сред // Докл. акад. наук. – 2008. – Т. 421, № 3. – С. 348–352.

37. Pavlov I.S. Acoustic identification of the anisotropic nanocrystalline medium with non-dense packing of particles // *Acoustical Physics.* – 2010. – Vol. 56. – No. 6. – P. 924–934.

38. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // *Int. J. Eng. Sci.* – 2009. – Vol. 47. – P. 610–617.

39. Ерофеев В.И., Колесов Д.А. Локализованные нелинейные волны деформации в классе метаматериалов, задаваемых как цепочка «масса-в-массе» // Вестник научно-технического развития. – 2018. – № 1 (125). – С. 3–12.

40. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Malkhanov A.O. Nonlinear localized waves of deformation in the class of metamaterials as set as the mass-in-mass chain // *Advanced Structured Materials.* – 2019. – Vol. 108 / *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. A Tribute to Wolfgang H. Muller.* Eds. B.E. Abali, H. Altenbach, F. dell'Isola, V.A. Eremeyev, A. Ochsner. – Springer Nature Switzerland AG. Part of Springer. Cham. Switzerland. – 2019. – P. 105–116.

References

1. Cummer S.A., Christensen J., Alù A. Controlling sound with acoustic metamaterials. *Nat. Rev. Mater.*, 2016, no 1. pp. 16001.

2. Shining Zhu, Xiang Zhang. Metamaterials: artificial materials beyond nature. *National Science Review*, 2018, vol.5, no 2, 131 p.

3. Zhang X, Yin L., Fang N. Focusing ultrasound with an acoustic metamaterial network. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol.102, no. 19, pp.194301-1-4.

4. Burov V.A., Voloshinov V.B., Dmitriev K.V., Polikarpova N.V. Acoustic waves in metamaterials, crystals, and anomalously refracting structures. *Physics Uspekhi*, 2011, vol. 54, no 11, pp. 165-1170.

5. Special issue on acoustic metamaterials. *J. Acoust. Soc. Am.* 2012, vol. 132, no 4, part 2, pp. 2783-2945.

6. Deymier P.A. Acoustic metamaterials and phononic crystals. *Berlin: Springer-Verlag*, 2013, 378 p.

7. Craster R.V., Guenneau S. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking. *Dordrecht: Springer*, 2013, 323 p.

8. Bobrovnikskii Yu.I. Effective parameters and energy of acoustic metamaterials and media. *Acoustical Physics*, 2014, vol. 60 (2), pp. 134-141.

9. Bobrovnikskii Yu.I. Models and general wave properties of two-dimensional acoustic metamaterials and media. *Acoustical Physics*, vol. 61 (3), pp. 255-264.

10. Bobrovnikskii Yu.I., Tomilina T.M., Laktionova M.M. A discrete model of damped acoustic metamaterials. *Acoustical Physics*. 2016, vol. 62 (1), pp. 1-7.

41. Erofeev V., Kolesov D., Malkhanov A. Nonlinear strain waves in metamaterial defined a mass-to-mass // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering.* – 2019 (in press).

42. Lamb H. On group velocity // *Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2.* – 1904. – Vol. 1. – No 849. – P. 473–479.

43. Мандельштам Л.И. Групповая скорость в кристаллической решетке // Полн. собр. тр.: в 5 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – Т. 2. – С. 334–338.

44. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. – М.: Наука, 1972. – 437 с.

45. Tolstoy I., Usdin E. Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1957. – Vol. 29. – No. 1. – P. 37–42.

46. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.

47. Waves in microstructured solids and negative group velocity / T. Peets, D. Kartofelev, K.Tamm, J. Engelbrecht // *EPL – A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics.* – 2013. – Vol. 103. – No. 1/16001. – P. 6.

48. Kartofelev D., Stulov A. Propagation of deformation waves in wool felt // *Acta Mech.* – 2014. – Vol. 225. – No. 11. – P. 3103–3113.

49. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages // *Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials.* Eds. H. Altenbach, S. Forest. – Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2016. – P. 413–423.

50. Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Хазов П.А. Влияние поврежденности материала на эволюцию акустической волны // *Приволж. науч. журн.* – 2015. – № 2. – С. 32–41.

11. Fedotovskii V.S. Transverse waves in a dispersive metamaterial with spherical inclusions. *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61 (3), pp. 281-286.

12. Fedotovskii V.S. A porous medium as an acoustic metamaterial with negative inertial and elastic properties. *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64 (5), pp. 548-554.

13. Bobrovnikskii Yu.I., Tomilina T.M. (2018) Sound absorption and metamaterials: a review. *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64 (5), pp. 519-526.

14. di Cosmo F., Laudato M., Spagnuolo M. Acoustic metamaterials based on local resonances: homogenization, optimization and applications. *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials.* Springer, 2018, pp. 247-274.

15. Abali E., Müller W., dell'Isola F. Theory and computation of higher gradient elasticity theories based on action principles. *Archive of Applied Mechanics*, 2017, vol. 87, no 9, pp. 1495-1510.

16. Giorgio I., Della Corte A., dell'Isola F. Dynamics of 1D nonlinear pantographic continua. *Nonlinear Dynamics*. 2017, vol. 88, no 1, pp. 21-31.

17. Ming-Hui Lu, Liang Feng, Yan-Feng Chen. Phononic crystals and acoustic metamaterials. *Materials Today*. 2009, vol. 12, no 12, pp. 34-42.

18. Madeo A., Barbagallo G., d'Agostino M.V., Placidi L., Neff P. First evidence of non-locality in real band-gap metamaterials: determining parameters in the relaxed micromorphic model. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 2016, vol. 472, no 2190, pp. 20160169.

19. dell'Isola F., Lekszycki T., Pawlikowski M., Grygoruk R., Greco L. Designing a light fabric metamaterial being highly macroscopically tough under directional extension: first experimental

evidence. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. ZAMP*, 2015, vol. 66, no 6, pp. 3473-3498.

20. dell'Isola F., Giorgio I., Pawlikowski M., Rizzi N.L. Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 2016, vol. 472, no. 2185.

21. El Sherbiny M.G., Placidi L. Discrete and continuous aspects of some metamaterial elastic structures with band gaps. *Archive of Applied Mechanics*, 2018, pp. 1-18.

22. Sidorov L.N., Yurovskaya M.A., Borschevsky A.Ya., Trushkov I.V., Ioffe I.N. Fullerenes: Tutorial. *Moscow, Publishing Exam*, 2005. 688 p.

23. Blank V.D., Levin V.M., Prokhorov V.M., Buga S.G., Dybitskii G.A., Serebryanaya N.R. Elastic properties of ultrahard fullerenes. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1998, vol.87 (4), pp. 741-746.

24. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. et al. Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, vol. 80, no 3, pp. 217-227.

25. Dreyer W., Herrmann M., Mielke A. Micro-macro transition in the atomic chain via Whitham's modulation equation. *Nonlinearity*, 2005, vol.19, no 2, pp. 471-500.

26. Agranovich V.M., Shen Y.R., Baughman R.H., Zakhidov A.A. Linear and nonlinear wave propagation in negative refraction metamaterials. *Phys. Rev.* 2004, vol. B 69, pp. 165112.

27. Berezovski A., Giorgio I., Corte A.D. Interfaces in micro-morphic materials: wave transmission and reflection with numerical simulations. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016, vol. 21, no 1, pp. 37-51.

28. Engelbrecht J., Berezovski A., Salupere A. Nonlinear deformation waves in solids and dispersion. *Wave Motion*, 2007, vol. 44, no 6, pp. 493-500.

29. Madeo A., Neff P., Ghiba I.D., Placidi L., Rosi G. Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2015, vol. 27, no 4-5, pp. 551-570.

30. Li J., Chan C.T. Double-negative acoustic metamaterial. *Phys. Rev. E*. 2004, vol. 70, pp. 055602.

31. Fang N., Xi D., Xu J., Ambati M., Srituravanich W., Sun C., Zhang X. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nat. Mater*, 2006, vol. 5, pp. 452-456.

32. Ding Y., Liu Z., Qiu C., Shi J. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Phys. Rev. Lett*, 2007, vol. 99, pp. 093904.

33. Cheng Y., Xu J.Y., Liu X.J. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic density and modulus. *Phys. Rev. B*. 2008, vol. 77, pp. 045134.

34. Chan C.T., Li J., Fung K.H. On extending the concept of double negativity to acoustic waves. *JZUS*. 2006, vol. A 7, pp. 24-28.

35. Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V.I. Mechanics of Generalized Continua. *Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag*, 2011, 350 p.

36. Pavlov I.S., Potapov A.I. Structural models in mechanics of nanocrystalline media. *Doklady Physics*, 2008, vol. 53 (7), pp. 408-412.

37. Pavlov I.S. Acoustic identification of the anisotropic nanocrystalline medium with non-dense packing of particles. *Acoustical Physics*, 2010, vol. 56, no 6. pp. 924-934.

38. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *Int. J. Eng. Sci.* 2009, vol. 47, pp. 610-617.

39. Erofeev V.I., Kolesov D.A. Localized non-linear waves of deformation in the class of metamaterials as a chain of "mass-v-mass". *Bulletin of Science and Technical Development*. 2018, no 1 (125), pp. 3-12 (in Russian).

40. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Malkhanov A.O. Nonlinear localized waves of deformation in the class of metamaterials as set as the mass-in-mass chain. *Advanced Structured Materials*. 2019. Vol.108 / New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. A Tribute to Wolfgang H. Müller / Abali B.E., Altenbach H., dell'Isola F., Eremeyev V.A., Ochsner A. (eds). Springer Nature Switzerland AG. Part of Springer. Cham. Switzerland. P.105-116

41. Erofeev V., Kolesov D., Malkhanov A. Nonlinear strain waves in metamaterial defined a mass-to-mass. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2019 (in press).

42. Lamb H. On group velocity. *Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2*. 1904, vol. 1, no 849, pp. 473-479.

43. Mandelstam L.I. Group velocity in the crystal lattice. *Complete collection of materials. Moscow, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR*, 1947, vol. 2, pp. 334-338.

44. Mandelstam L.I. Lectures on optics, theory of relativity and quantum mechanics. *Moscow, Nauka*, 1972, 437 p.

45. Tolstoy I., Usdin E. Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion. *J. Acoust. Soc. Amer*, 1957, vol. 29, no.1, pp. 37-42.

46. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Harmonic vibrations and waves in elastic bodies. *Kiev, Naukova Dumka*, 1981, 284 p. (in Russian).

47. Peets T., Kartofelev D., Tamm K., Engelbrecht J. Waves in microstructured solids and negative group velocity. *EPL – A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics*. 2013, vol. 103, no. 1/16001, p.6.

48. Kartofelev D., Stulov A. Propagation of deformation waves in wool felt. *Acta Mech*. 2014, vol. 225, no. 11, pp. 3103-3113.

49. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages // Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials / Altenbach H., Forest S. (Editors). *Berlin, Heidelberg Springer-Verlag*, 2016, pp.413-423.

50. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Khazov P.A. The effect of material damage on the evolution of an acoustic wave. *The Privolzhsky Scientific Journal*. 2015, no. 2, pp.32-41 (in Russian).