Мелюков В.В., Максимов А.Е. Применение методов оптимизации при определении режима сварки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2019. – Т. 21, № 1. – С. 36–42. DOI: 10.15593/2224-9877/2019.1.05

Melyukov V.V., Maksimov A.E. The optimal control application for welding mode determination. *Bulletin PNRPU. Mechanical engineering, materials science*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 36–42. DOI: 10.15593/2224-9877/2019.1.05

ВЕСТНИК ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение
Т. 21, № 1, 2019
Bulletin PNRPU. Mechanical engineering, materials science
http://vestnik.pstu.ru/mm/about/inf/

DOI: 10.15593/2224-9877/2019.1.05
УДК 621.791.011

Памяти академика Н.Н. Рыкалина
к 115-летию со дня его рождения

В.В. Мелюков[1], А.Е. Максимов[2]

[1] ООО «Вятский аттестационный центр», Киров, Россия
[2] Вятский государственный университет, Киров, Россия

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РЕЖИМА СВАРКИ

Методы теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина, метод моментов) позволяют ставить и решать задачи оптимального управления техническими и технологическими процессами с ограничениями на управление. Это дает возможность применять методы теории оптимального управления для оптимизации процессов сварки с ограничениями на концентрированные сварочные источники.

Моделирование сварочных источников в более широком классе кусочно-непрерывных и кусочно-постоянных функций позволяет описывать с большей точностью целый ряд высококонцентрированных источников, которые генерируются современным сварочным оборудованием и применяются в технологиях сварки.

В современной теории сварочных процессов и технологии сварочного производства применяются такие источники нагрева, у которых параметры могут изменяться безынерционно. Так, например, у многих сварочных источников (излучения лазера, пучка электронов, электрической дуги) мощность в импульсном режиме изменяется мгновенно, практически безынерционно. А источники нагрева, формируемые пучком электронов, являются безынерционными при управлении их перемещением, мощностью и фокусировкой.

Исходя из этого, учитывая свойство безынерционного (скачкообразного) изменения основных параметров (формы пятна нагрева, мощности, распределения плотности мощности по пятну и др.), модель источника необходимо строить в классе разрывных функций. Это, в свою очередь, позволяет ставить и решать задачи поиска оптимальных режимов сварки с применением новейших методов теории оптимального управления.

Одним из основных технологических приемов формирования сварочных источников с необходимой формой пятна нагрева и соответствующим распределением плотности мощности являются колебательные движения нормально-кругового источника по схеме строчной развертки.

В случае строчной развертки нормально-полосовой источник наиболее точно описывает равномерное распределение плотности мощности по длине пятна нагрева и в поперечном сечении.

Разрывы первого рода на границе пятна нагрева можно обеспечить с допустимой погрешностью.

Ключевые слова: методы оптимального управления, ограничение на управление, кусочно-постоянная функция, обратная задача, функционал, метод моментов, принцип максимума, экстремум, сварочный источник, строчная развертка.

V.V. Melyukov[1], A.E. Maksimov[2]

[1] Vyatka Center of Attestation, Kirov, Russian Federation
[2] Vyatka State University, Kirov, Russian Federation

THE OPTIMAL CONTROL APPLICATION FOR WELDING MODE DETERMINATION

The methods of the theory of optimal control (Pontryagin's maximum principle, the method of moments) make it possible to set and solve problems of optimal control of technical and technological processes with constraints on control. This makes it possible to apply the methods of optimal control theory to optimize welding processes with restrictions on concentrated welding sources.

Modeling of welding sources in a wider class of piecewise-continuous and piecewise-constant functions allows to describe with greater accuracy a whole range of high-concentrated sources that are generated by modern welding equipment and are used in welding technologies.

In the modern theory of welding processes and technology of welding production, such heat sources are used for which the parameters can change without inertia. For example, in many welding sources (laser radiation, electron beam, electric arc), the power in a pulsed mode changes instantaneous, almost inertialess. And the heat sources generated by the electron beam are inertialess in controlling their movement, power, and focus.

Therefore, taking into account the property of inertialess changes in the basic parameters (shape of the heating spot, power, power density distribution over the spot, etc.), the source model must be built in the class of discontinuous functions. This, in turn, allows us to formulate and solve problems of determination of optimal welding modes using the latest methods of the theory of optimal control.

One of the main technological methods of forming welding sources with the required shape of the heating spot and the corresponding power density distribution is the oscillatory movement of a normal-circular source according to the line scan.

In the case of line scanning, a normal-line source most accurately describes the uniform distribution of power density along the length of the heating spot and cross section.

Discontinuity of the first kind at the boundary of the heating spot can be provided with an admissible error.

Keywords: methods of optimal control, restriction of control, piecewise-constant function, inverse problem, functional, method of moments, maximum principle, extremum, welding source, line scan.

Введение

Оптимальное управление технологическими процессами связано с определением экстремальных условий и режимов управления исследуемого процесса или объекта. Цель оптимального управления закладывается в выражение функционала. Функционал – обобщенное понятие функции, аргументом (независимой переменной) которой является другая функция. Примером простейшего функционала является определенный интеграл

$$J\left(y(z)\right)=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x)\right)dx, \tag{1}$$

в котором вид функции $y(x)$ определяет величину (число) этого интеграла. Итак, функционал J – это число, величина которого зависит от вида функции $y(x)$.

В основе оптимального управления лежит вариационное исчисление, которое до создания теории оптимального управления прошло многовековой путь становления и развития. Основные понятия и первая задача классического вариационного исчисления были сформулированы в конце XVII в.

Первую задачу оптимального управления сформулировал И. Бернулли в 1696 г. [1] – задачу о линии быстрейшего ската, которая называется задачей о брахистохроне (brachistos – кратчайший, chronos – время), т.е. задачей на быстродействие. Формулировка и решение этой задачи стали основой и началом вариационного исчисления. Далее в XVIII–XIX вв. вариационное исчисление развивалось в научных трудах Эйлера, Лагранжа, Остроградского, Вейерштрасса и многих других ученых [2–5].

В вариационном исчислении функция $y(x)$ в функционале (1) является непрерывной, гладкой (т.е. имеет непрерывную первую производную) и на нее не наложено ограничений. Она должна удовлетворять только граничным условиям: проходить через точки $y(x_0)$ и $y(x_1)$.

Большинство современных технических и технологических задач оптимизации, имеющих практическое значение, связаны с отысканием экстремума функционала при определенных условиях и ограничениях на функции, допускаемых при решении задач. В реальных условиях необходимо учитывать ограниченность силовых факторов, действующих на объект управления, или накладывать ограничения на мощность управляющих воздействий и источников нагрева либо вводить допускаемые значения напряжения и деформации в элементах конструкций и т.п. Функции, описывающие состояние объекта управления, должны удовлетворять уравнениям связи.

При постановке и решении задач оптимального управления процессами сварки уравнениями связи являются уравнения теплопроводности, диффузии, напряжений, деформации и тому подобные, а ограничение накладывается на мощность или плотность мощности реального сварочного источника, напряженно-деформационное состояние и др.

Поскольку вариационное исчисление применяется для решения задач оптимального управления без ограничений на состояние объекта и при отсутствии управляющих воздействий, в связи с потребностью оптимизации состояния (движения) технических и технологических систем возникла необходимость в создании теории оптимального управления с учетом ограничений на управляющее воздействие.

Теория решения задач оптимального управления с ограничениями была создана в середине прошлого столетия академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками. Они разработали принцип максимума для непрерывных систем с сосредоточенными параметрами, который дает необходимые условия оптимальности для задач с ограничениями на управление [6–8]. Системы с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В начале 60-х гг. А.Г. Бутковский обобщил принцип максимума в определенный класс систем, состояние которых описывается параметрами, распределенными не только во времени, но и в пространстве [9–11]. Математическими моделями систем с распределенными параметрами являются уравнения в частных производных и интегральные уравнения.

К системам с распределенными параметрами относятся тепловые процессы в металлах, процессы диффузии, температурные поля и т.д.

При постановке задач оптимизации важным является выделение класса функций, на котором будет определяться экстремум функционала. Для большинства задач оптимизации в качестве аргумента (вида независимой функции) функционала принимают класс кусочно-непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода на заданном интервале (в допустимом множестве) аргумента этих функций [12].

На рис. 1 представлен пример кусочно-непрерывной функции $y(x)$, заданной на интервале (x_0, x_4). Каждому значению аргумента x в заданном интервале соответствует определенное (однозначное) значение функции $y(x)$, за исключением точек x_1, x_2, x_3. В точках x_1, x_2, x_3 функция $y(x)$ имеет разрыв первого рода, характерным для которого является то, что слева и справа от точки разрыва функция принимает различные значения конечной величины, т.е. в точках разрыва функция неоднозначна. Так, например, в точке x_1 ордината y принимает значения

$$y(x_1-0)=y_1,\ y(x_1+0)=y_2.$$

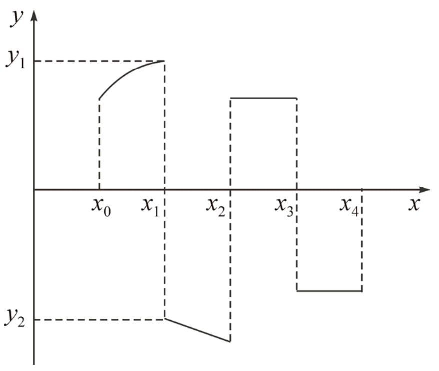


Рис. 1. Кусочно-непрерывная функция $y(x)$

Класс кусочно-непрерывных функций является достаточно широким, он включает много видов различных функций. Частными случаями кусочно-непрерывных функций являются непрерывные функции.

Применение принципа максимума в задаче управления тепловым процессом

В качестве примера применения принципа максимума рассмотрим решение задачи оптимального управления одномерным тепловым процессом сварки при ограничении на плотность мощности q сварочного источника. Пусть в стержне длиной l действует объемный источник энергии, плотность мощности которого определяется функцией $q(x, t)$, где x – ось стержня. Тепловой процесс описывается неоднородным, нестационарным, одномерным уравнением теплопроводности [13, 14]

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q(x,t)}{c_v}, \tag{2}$$

где T – функция распределения температуры по длине стержня с течением времени, $T = T(x, t)$.

При нулевых начальных и граничных условиях решение уравнения имеет вид [15]

$$T(x,t)=\int_0^l\int_0^{t'}K(x,\xi,t,\tau)q(\xi,\tau)d\tau d\xi, \tag{3}$$

где функция $K(x,\xi,t,\tau)$ – известная функция, которая выводится при решении уравнения (2) и может быть функцией влияния, импульсной переходной функцией или функцией Грина. Аргументы функции K изменяются в пределах: $0\le x\le l$, $0\le\xi\le l$, $0\le\tau\le t\le t'$, где t' – время, в течение которого действует управление $q(x,t)$, т.е. время действия сварного источника.

На управляющее воздействие $q(x,t)$ наложим ограничение

$$0\le q(x,t)\le q_{\max} \tag{4}$$

в соответствии с реальными параметрами сварочных источников. Это ограничение определяет класс допустимых кусочно-постоянных функций в решении задачи оптимального управления.

Сформулируем задачу оптимального управления: *пусть задана функция $T'(x)$, $x\in(0,l)$, которая характеризует некоторое идеальное, желаемое распределение температуры и при котором обеспечиваются наилучшие свойства материала в зоне воздействия источника. Найти такое допустимое управление, удовлетворяющее ограничению (4), чтобы в момент времени t' уклонение истинной температуры $T(x,t')$ от заданной $T'(x)$ было минимальным.*

За меру уклонения примем функционал вида [16]

$$J=\int_0^l\left[T'(x)-T(x,t')\right]^\gamma dx,\ \gamma\ge 1, \tag{5}$$

где разность $T'(x)-T(x,t')$ есть невязка уравнения (3), если в левую часть вместо $T(x,t')$ поставить $T'(x)$.

Предположим, что заданная функция $T'(x)$ и время процесса нагрева t' таковы, что ни при каком допустимом управлении, удовлетворяющем ограничению (4), не выполняется тождество

$$T'(x)\equiv T(x,t'),$$

т.е. предполагаем, что невязка $T'(x)-T(x,t')$ не равняется тождественно нулю, за исключением отдельных точек $x\in(0,l)$, и, соответственно, распределение температуры $T(x,t')$ не совпадает с заданным распределением $T'(x)$. Кривые распределения этих значений температуры могут только пересекаться в отдельных точках.

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [9, 16] оптимальное управление определяется интегральным уравнением, выражение которого составляется в зависимости от показателя степени γ в функционале (5).

Будем рассматривать критерии оптимальности (5) при γ = 2, т.е. квадратичные функционалы. Квадрат невязки позволяет устранить отрицательные значения подынтегральной функции.

Доказательство принципа максимума для систем с распределенными параметрами не является существенным при решении задач с его применением. Вывод принципа максимума основан на понятии игольчатой вариации, которая строится на границе области управления. Доказательство не является сложным, и читателю предлагается самостоятельно ознакомиться с работами [9, 16], где оно рассмотрено достаточно подробно и вполне доступно.

Решение сформулированной выше задачи оптимального управления сводится к поиску минимума функционала (5). Оптимальное управление $q(x, t)$, которое доставляет функционалу минимальное значение, по принципу максимума в случае $\gamma = 2$ определяется выражением

$$q(x,t) = \frac{1}{2}q_{\max} + \frac{1}{2}q_{\max} \times$$

$$\times \operatorname{sign}\left\{\int_{0}\left[T'(\xi) - T(\xi,t')\right]K(x,\xi,t',t)\,d\xi\right\}, \quad (6)$$

где sign – функция Кронекера [17], которая определяется выражениями

$$\begin{cases} \operatorname{sign} = 1, \text{ если интеграл } > 0; \\ \operatorname{sign} = -1, \text{ если интеграл } < 0; \\ \operatorname{sign} = 0, \text{ если интеграл } = 0. \end{cases}$$

Из этого следует, что оптимальное управление $q(x, t)$ как решение уравнения (6) является кусочно-постоянной функцией координаты x и времени t и принимает поочередно предельно допустимые значения $q_{\max}$ или 0.

Итак, мы рассмотрели структуру выражения для оптимального управления и последовательность преобразования этого выражения к виду нелинейного интегрального уравнения в случае минимизации квадратичного функционала ($\gamma = 2$). Вывод оптимального управления при различных значениях $\gamma \geq 1$ на основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами рассмотрен в монографиях А.Г. Бутковского [9, 16].

Интегральное уравнение (6) является уравнением Фредгольма первого рода [18]. Решение таких уравнений сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

Моделирование сварочных источников в более широком классе кусочно-непрерывных и кусочно-постоянных функций позволяет описывать с большей точностью целый ряд высококонцентрированных источников, которые генерируются современным сварочным оборудованием и применяются в технологиях сварки.

В современной теории сварочных процессов и технологии сварочного производства применяются такие источники нагрева, у которых параметры могут изменяться безынерционно. Так, например, у многих сварочных источников (излучения лазера, пучка электронов, электрической дуги) мощность в импульсном режиме изменяется мгновенно, практически безынерционно. А источники нагрева, формируемые пучком электронов, являются безынерционными при управлении их перемещением, мощностью и фокусировкой.

Ввиду этого, учитывая свойство безынерционного (скачкообразного) изменения основных параметров (формы пятна нагрева, мощности, распределения плотности мощности по пятну и др.), модель источника необходимо строить в классе разрывных функций. Это, в свою очередь, позволяет ставить и решать задачи поиска оптимальных режимов сварки с применением новейших методов теории оптимального управления.

Условия реализации решения задачи оптимального управления процессом сварки

В результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений получаем функцию изменения распределения плотности мощности $q(x, t)$ в стержне вдоль оси x в период времени от 0 до t'. В соответствии с принципом максимума и ограничением на управление (4) функция $q(x, t)$ оптимального сварочного источника определяет пространственно-временную структуру пятна нагрева и распределение плотности мощности по этому пятну в классе кусочно-постоянных функций, т.е. равномерное распределение плотности мощности по пятну нагрева, равное $q_{\max}$, и разрывы первого рода (скачкообразное изменение плотности мощности от 0 до $q_{\max}$) на границах пятна.

Рассмотрим одно из условий реализации оптимального сварочного источника, полученного в классе кусочно-постоянных функций: построение равномерного распределения плотности мощности при моделировании сварочного источника функцией нормального распределения [19].

Одним из основных технологических приемов формирования сварочных источников с необходимой формой пятна нагрева и соответствующим распределением плотности мощности являются колебательные движения нормально-кругового источника по схеме строчной развертки (рис. 2).

Разрывы первого рода на границе пятна нагрева можно обеспечить с допустимой погрешностью.

В случае строчной развертки нормально-полосовой источник наиболее точно описывает равномерное распределение плотности мощности q_{max} по длине пятна нагрева и в поперечном сечении.

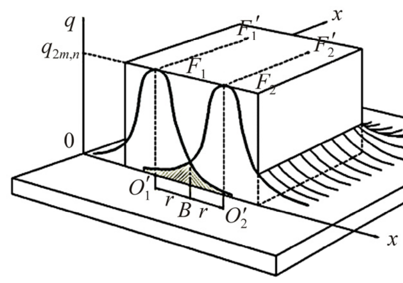
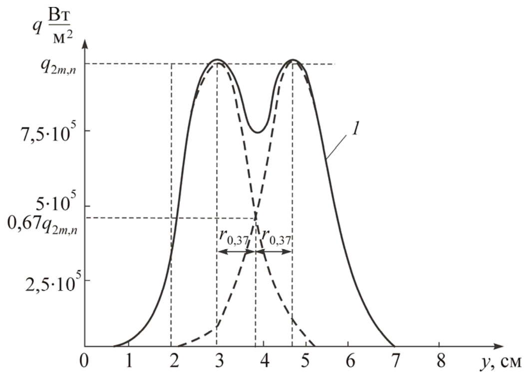
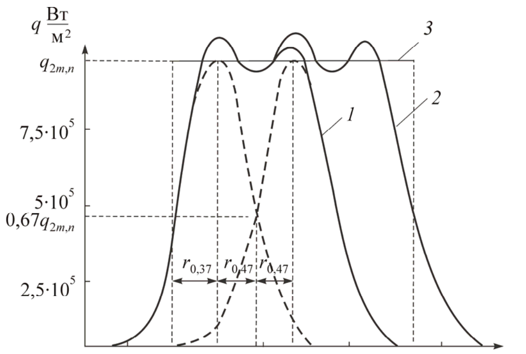


Рис. 2. Формирование источника с равномерным распределением плотности мощности

При сканировании нормально-кругового источника по схеме строчной развертки с определенным шагом $2r$ (разрешающей способностью) происходит наложение тепловых потоков и отклонение суммарного значения $q(x, t)$ от величины q_{max} зависит от шага развертки и числа строк. Подробно эта зависимость рассмотрена в пособии оптимизации режима обработки материалов концентрированными источниками энергии [20], где получены уравнения отклонения $q(x, t)$ от q_{max} в зависимости от шага строчной развертки и количества строк.



а



б

Рис. 3. Распределение суммарного удельного теплового потока $q(x)$ при $k = 10^4$ м$^{-2}$: *а* – для $r_{0,37}$; *б* – для $r_{0,47}$; $p = 2$ (кривая *1*), $p = 3$ (кривая *2*) и равномерное распределение (кривая *3*)

По результатам решений этих уравнений показано (рис. 3), что при количестве строк $p = 2$ и соответственном шаге развертки $2r_{0,47}$ максимальное отклонение $q(x, t)$ не превышает 10 % (см. рис. 3, *а*), а при $p = 3$ (см. рис. 3. *б*) эта погрешность понижается на 1–2 %. Дальнейшее увеличение числа строк не дает существенного уменьшения погрешности.

Выводы

1. Вариационные исчисления не позволяют решать современные технические и технологические задачи управления с ограничениями на управляющее воздействие, характерными для генерирующих устройств.

2. Методы теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина, метод моментов) позволяют ставить и решать задачи оптимального управления техническими и технологическими процессами с ограничениями на управление. Это дает возможность применять методы теории оптимального управления для оптимизации процессов сварки.

3. Моделирование управляющих воздействий в классе кусочно-непрерывных (кусочно-постоянных) функций создает необходимые условия определения оптимального режима сварки концентрированными источниками энергии с ограничениями на энергетические параметры.

Список литературы

1. Бернулли И. Избранные сочинения по математике / ГИТТЛ. – М., 1973. – 100 с.

2. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле: пер. с лат. / ГИТТЛ. – Изд. 1744 г. – М.; Л., 1934. – 600 с.

3. Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика: в 2 т. / пер. В.С. Грохмана; под ред. Л.Г. Лойцянского и А.И. Лурье. – Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 1, 2. – 1030 с.

4. Остроградский М.В. Собрание сочинений. Ч. 2. Лекции по аналитической механике. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – Т. 1. – 288 с.

5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

6. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – 3-е изд. – М.: Наука: Гл. редакция физ.-мат. лит., 1976. – 392 с.

7. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

8. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 488 с.

9. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.

10. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука. 1980. – 384 с.

11. Чубаров Е.П. Управление системами с подвижным источником воздействия. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 288 с.

12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.

13. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

14. Махненко А.Б., Егорова Л.А. Области применения схемы мощного быстродвижущегося источника тепла в расчетах температур при сварке // Автоматическая сварка. – 1975. – № 5. – С. 68–69.

15. Карслоу У., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.

16. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. – 743 с.

17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.

18. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. 2. – 640 с.

19. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. – М.: Машгиз, 1951. – 296 с.

20. Мелюков В.В. Оптимизация режима обработки материалов концентрированными потоками энергии: учеб. пособие. – Киров: Изд-во ВятГУ, 2003. – 212 с.

References

1. Bernulli I. Izbrannye sochineniia po matematike [Selected essays in mathematics]. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko teoreticheskoi literatury. Moscow, 1973, 100 p.

2. Eiler L. Metod nakhozhdeniia krivykh linii, obladaiushchikh svoistvami maksimuma libo minimuma, ili reshenie izoperimetricheskoi zadachi, vziatoi v samom shirokom smysle [The method of finding curves with maximum or minimum properties or the solution of an isoperimetric problem taken in the broadest sense]. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko teoreticheskoi literatury, 1744, Moscow; Leningrad, 1934, 600 p.

3. Lagranzh Zh.L. Analiticheskaia mekhanika [Analytical Mechanics]. Ed. L.G. Loitsianskogo i A.I. Lur'e. Leningrad: Gostekhizdat, 1950, vol. 1, 2, 1030 p.

4. Ostrogradskii M.V. Sobranie sochinenii. Ch. 2. Lektsii po analiticheskoi mekhanike [An essay collection. P. 2. lectures on analytical mechanics]. Moscow; Leningrad: Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, 1946, vol. 1, 288 p.

5. El'sgol'ts L.E. Differentsial'nye uravneniia i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969, 424 p.

6. Pontriagin L.S., Boltianskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Matematicheskaia teoriia optimal'nykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes]. 3nd. ed. Moscow: Nauka: Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoi literatury, 1976, 392 p.

7. Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V. Kurs metodov optimizatsii [Course of optimization methods]. Moscow: Nauka, 1986, 328 p.

8. Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie: uchebnoe dlia vuzov [Variable calculation and optimum control]. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta imeni N.E. Baumana, 2001, 488 p.

9. Butkovskii A.G. Teoriia optimal'nogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami [Theory of optimal control of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka, 1965, 474 p.

10. Butkovskii A.G., Pustyl'nikov L.M. Teoriia podvizhnogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami [Theory of mobile control systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka, 1980, 384 p.

11. Chubarov E.P. Upravlenie sistemami s podvizhnym istochnikom vozdeistviia [Management of systems with a mobile source of impact]. Moscow: Energoatomizdat, 1985, 288 p.

12. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia [Differential course and integral calculus.]. Moscow: Nauka, 1970, vol. 1, 608 p.

13. Lykov A.V. Teoriia teploprovodnosti [Theory of thermal conductivity]. Moscow: Vysshaia shkola, 1967, 600 p.

14. Makhnenko A.B., Egorova L.A. Oblasti primeneniia skhemy moshchnogo bystrodvizhushchegosia istochnika tepla v raschetakh temperatur pri svarke [Areas of application of the scheme of a powerful fast-moving heat source in the calculation of welding temperatures]. *Avtomaticheskaia svarka*, 1975, no. 5, pp. 68–69.

15. Karslou U., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel [Thermal conductivity of solids]. Moscow: Nauka, 1964, 487 p.

16. Fel'dbaum A.A., Butkovskii A.G. Metody teorii avtomaticheskogo upravleniia [Methods of automatic control theory]. Moscow: Nauka, 1971, 743 p.

17. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Mathematics handbook for scientists and engineers]. Moscow: Nauka, 1984, 831 p.

18. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychislenii [Calculation methods]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, vol. 2, 640 p.

19. Rykalin N.N. Raschety teplovykh protsessov pri svarke [Calculations of heat processes during welding]. Moscow: Mashgiz, 1951, 296 p.

20. Meliukov V.V. Optimizatsiia rezhima obrabotki materialov kontsentrirovannymi potokami energii: uchebnoe posobie [Optimizing the processing of materials with concentrated energy flows]. Kirov: Izdatel'stvo Viatskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2003, 212 p.

Получено 17.10.18
Опубликовано 21.03.19

Сведения об авторах

Мелюков Валерий Васильевич (Киров, Россия) – доктор технических наук, профессор, директор ООО «Вятский аттестационный центр»; e-mail: rus_melyukov@mail.ru.

Максимов Александр Евгеньевич (Киров, Россия) – аспирант кафедры технологии машиностроения Вятского государственного университета; e-mail: 2m3j.p.m@gmail.com.

About the authors

Valerii V. Melyukov (Kirov, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, the Manager, Vyatka Center of Attestation of Welding Production; e-mail: rus_melyukov@mail.ru.

Alexander E. Maksimov (Kirov, Russian Federation) – Graduate Student, Department of Mechanical Engineering Technology, Vyatka State University; e-mail: 2m3j.p.m@gmail.com.