

Ольшанская Т.В., Федосеева Е.М. Построение моделей решения тепловых задач электронно-лучевой сварки с колебаниями луча // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2018. – Т. 20, № 3. – С. 45–54. DOI: 10.15593/2224-9877/2018.3.06

Olshanskaya T.V., Fedoseeva E.M. Creation of models of the solution of thermal problems of electron beam welding with fluctuations of the beam. *Bulletin PNRPU. Mechanical engineering, materials science*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 45–54. DOI: 10.15593/2224-9877/2018.3.06

ВЕСТНИК ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение
Т. 20, № 3, 2018
Bulletin PNRPU. Mechanical engineering, materials science
<http://vestnik.pstu.ru/mm/about/inf/>

DOI: 10.15593/2224-9877/2018.3.06
УДК 625.7

Т.В. Ольшанская, Е.М. Федосеева

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

**ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ РЕШЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ СВАРКИ С КОЛЕБАНИЯМИ ЛУЧА**

Представлены математические модели, разработанные для решения тепловых задач при электронно-лучевой сварке с колебаниями луча. Для построения тепловых моделей выбраны колебания луча вдоль стыка, поперек и х-образной траектории. Источник тепла для сварки с колебаниями электронного луча вдоль стыка, поперек и х-образной траектории с заданной амплитудой и с учетом расширения радиуса источника тепла на поверхности может быть представлен как комбинированный, непрерывно действующий в течение определенного отрезка времени. Модели построены аналитическим методом на основе решения задачи теплопроводности с использованием функций Грина – методом источников. В основе построения моделей для сварки с колебаниями электронного луча используется введение комбинированного источника тепла, состоящего из поверхностного и действующего по глубине. Общим подходом при построении моделей является то, что источник, действующий на поверхности, увеличивается на радиус r относительно размеров 2-го источника. Источник, распределенный по глубине, расположен на некотором расстоянии от поверхности по оси Z . Для имитации продольных и поперечных колебаний луча размеры комбинированного источника тепла увеличиваются линейно по соответствующим осям на величину амплитуды колебаний. В модели для х-образной траектории применяется суперпозиция продольных и поперечных колебаний. Разработанную тепловую модель электронно-лучевой сварки с х-образной траекторией можно использовать для решения тепловых задач применительно к круговой и эллиптической развертке. Такое представление формы теплового источника позволяет более точно передавать форму проплавления при электронно-лучевой сварке с колебаниями луча.

Ключевые слова: математические модели, источник тепла, колебания электронного луча, продольные колебания, поперечные колебания, колебания с х-образной траекторией, осцилляция луча, радиус луча, глубина проплавления, электронно-лучевая сварка.

T.V. Olshanskaya, E.M. Fedoseeva

Perm National Research Polytechnical University, Perm, Russian Federation

**CREATION OF MODELS OF THE SOLUTION OF THERMAL PROBLEMS
OF ELECTRON BEAM WELDING WITH FLUCTUATIONS OF THE BEAM**

In operation the mathematical models developed for the solution of thermal problems in case of electron beam bonding with oscillations of a beam are provided. For creation of thermal models oscillations of a beam along a joint, across and x-shaped to paths are selected. Heat source for welding with oscillations of an electron beam along a joint, across and x-shaped with the given amplitude and taking into account extension of radius of a source of heat on a surface can be provided to paths as combined, continuously acting during a certain interval of time. Models are constructed by an analytical method on the basis of the decision of the task of heat conduction with use of Green functions – method of sources. At the heart of creation of models for welding with oscillations of an electron beam introduction of a combined source of heat consisting from surface and operating on depth is used. The general approach in case of creation of models is that the source operating on a surface increases by r radius concerning the sizes of the second source. The source distributed on depth is located at some distance from a surface on axis Z . For simulation of longitudinal and cross oscillations of a beam the sizes of a combined source of heat increase linearly on the appropriate axes by value of a vibration amplitude. In model superposition of longitudinal and cross oscillations is applied to a x-shaped path. The developed thermal model of electron beam bonding with a x-shaped path can be used for the decision of thermal tasks in relation to circle and elliptic scanning. Such submission of the form of a heat source allows to transfer more precisely the form of pro-melt in case of electron beam bonding with oscillations of a beam.

Keywords: mathematical models, a source of heat, fluctuation of an electronic beam, longitudinal fluctuations, cross fluctuations, fluctuations with a x-shaped trajectory, beam oscillation, beam radius, pro-melting depth, electron beam welding.

Моделирование тепловых процессов при сварке чаще всего строится на решении задач теплопроводности [1]. С учетом требований к моделям и принятым упрощениям, а также с целью получения простого и быстрого решения поставленной задачи целесообразно использовать аналитический метод. Наиболее приемлемым и универсальным в данном случае будет *метод функций Грина* [2–5]. Данный метод позволяет в общем виде рассматривать характерные закономерности из-

менения температурного поля в материале при решении 3-мерных задач нагрева полуограниченных тел практически при любой продолжительности воздействия источника теплоты, свести многообразие способов нагрева материалов к некоторым схемам, охватывающим основные особенности процессов нагрева [6]. Как отмечалось ранее в работах [7–11], наиболее широко используются следующие траектории колебаний электронного луча: продольная и поперечная, x -образная, а также траектория перемещения луча по эллипсу, дуге и окружности. Амплитуда колебаний луча чаще всего лежит в пределах 1–3 мм, частота – от 50 Гц до 1 кГц и зависит от вида свариваемого материала. При достаточно малых значениях частоты и амплитуды колебаний луча размеры парогазового канала практически не изменяются, при более высоких значениях происходит его расширение. Колебания электронного луча оказывают воздействие на паро- и гидродинамические процессы в канале проплавления, повышая его устойчивость, и, как следствие, приводят к изменению конфигурации сварочной ванны. Однако в форме поперечного сечения сварного шва сохраняется расширение в верхней части, т.е. можно предположить, что при данных режимах колебаний луча процессы, связанные с экранированием электронного луча, сохраняются, хотя и происходят в меньшей степени. Таким образом, при построении тепловых моделей и выборе формы источника тепла для сварки с колебаниями луча необходимо учитывать расширение радиуса источника тепла на поверхности и действие источника тепла по глубине под поверхностью.

Обычно на практике частота колебаний луча для различных видов траекторий выбирается достаточно высокой, в пределах значений частоты автоколебательного процесса (400–800 Гц) [12, 13], поэтому тепловыми возмущениями по времени в зоне действия луча можно пренебречь и рассматривать колебательный процесс как квазистационарный. Исходя из этого форма источников тепла может быть упрощена и источник тепла можно рассматривать как постоянно действующий.

Для построения тепловых моделей выбраны колебания луча вдоль стыка, поперек и x -образной траектории. Если в основе разработки моделей с разверткой луча использовать тот же подход к источнику тепла, что и для сварки статическим лучом, то при сварке с продольными и поперечными колебаниями луча источник тепла должен быть увеличен в размерах вдоль и поперек стыка соответственно с учетом амплитуды колебаний. Для сварки с колебаниями луча по x -образной траекто-

рии источник тепла необходимо увеличить и в продольном и в поперечном направлении относительно стыка, придать прямоугольную форму, так как данная траектория осцилляции представляет собой суперпозицию продольных и поперечных колебаний [14–16]. Круговые и эллиптические колебания луча могут быть представлены как вариация колебаний с x -образной траекторией. Такой подход возможен исходя из следующего. Для описания источника нагрева, у которого увеличивается диаметр, в работе [2] предлагается использовать прямоугольную форму источника и вводить действие фиктивного источника со временем t_0 . Благодаря этому форма пятна нагрева становится близкой к круговой, а распределение мощности по пятну нагрева отличается значительно меньшей кривизной по сравнению с нормально-круговым источником тепла.

Построение модели для решения тепловой задачи электронно-лучевой сварки с продольными колебаниями луча

Источник тепла для сварки с колебаниями электронного луча вдоль стыка с амплитудой B (рис. 1) и с учетом расширения радиуса источника тепла на поверхности может быть представлен как комбинированный, непрерывно действующий в течение определенного отрезка времени t , состоящий из следующего:

- плоского источника, действующего в координатной плоскости X – Y , с длиной $2B_1$ вдоль оси X и шириной r вдоль оси Y , вводимого в начале координат $(0,0,0)$, где $B_1 = B + r$;
- плоского источника длиной $2h$ (по оси Z) и шириной $2B$ (по оси X), действующего под поверхностью на расстоянии h_1 в плоскости X – Z , вводимого в координате $(0, 0, S)$.

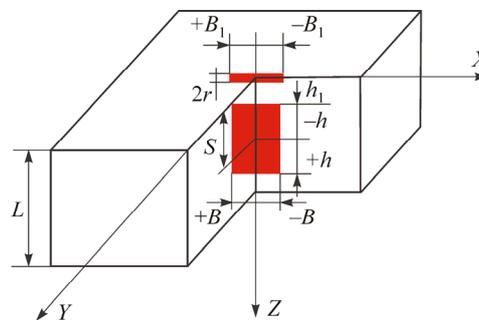


Рис. 1. Схема источника тепла при сварке с колебаниями луча вдоль стыка: B – амплитуда колебаний источника вдоль оси X , действующего на глубине; B_1 – амплитуда колебаний поверхностного источника ($B_1 = B + r$);

$2r$ – ширина поверхностного источника

Математическое описание функции источника тепла (см. рис. 1) будет иметь следующий вид:

$$F(x, y, z, t) = \frac{q\eta}{c\rho} \left(\frac{k_1}{4rB_1} E_1(x') E(y') \delta(z') E(\tau) + \frac{k_2}{4Bh} E(x') \delta(y') E(z') E(\tau) \right); \quad (1)$$

$$E_1(x') = \begin{cases} 1 & \text{при } -B_1 \leq x' \leq B_1, \\ 0 & \text{при } B_1 < x' < -B_1; \end{cases}$$

$$E(y') = \begin{cases} 1 & \text{при } -r \leq y' \leq r, \\ 0 & \text{при } r < y' < -r; \end{cases}$$

$$E(x') = \begin{cases} 1 & \text{при } -B \leq x' \leq B, \\ 0 & \text{при } B < x' < -B; \end{cases}$$

$$E(z') = \begin{cases} 1 & \text{при } -h \leq z' \leq h, \\ 0 & \text{при } h < z' < -h; \end{cases}$$

$$E(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_0 \leq \tau \leq t, \\ 0 & \text{при } \tau > t. \end{cases}$$

Подставив функцию источника (1) в уравнение, представляющее в общем виде интегральное решение задачи теплопроводности в подвижной системе координат для бесконечной пластины [9], получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \int_0^L \frac{1}{8(\sqrt{\pi a(t-\tau)})^3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(x-x'+V(t-\tau))^2}{4a(t-\tau)}\right) \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a(t-\tau)}\right) \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z-z'+2nL)^2}{4a(t-\tau)}\right) + \right. \\ &\left. + \exp\left(-\frac{(z+z'+2nL)^2}{4a(t-\tau)}\right) \right) \times \\ &\times \frac{q\eta}{c\rho} \left(\frac{k_1}{4rB_1} E_1(x') E(y') \delta(z') E(\tau) + \right. \\ &\left. + \frac{k_2}{4Bh} E_2(x') \delta(y') E(z') E(\tau) \right) \partial x' \partial y' \partial z' \partial \tau. \end{aligned}$$

Разделив интегралы относительно поверхностного источника и источника, действующего по глубине, и используя свойства дельта-функции [9], получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \frac{k_1 q \eta}{16rB_1 c \rho (\sqrt{\pi a})^3} \int_{-B_1}^{B_1} \int_{-r}^r \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{\tau})^3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}\right) \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z+2nL)^2}{4a\tau}\right) \partial x' \partial y' \partial \tau + \\ &+ \frac{k_2 q \eta}{32Bh c \rho (\sqrt{\pi a})^3} \int_{-B}^B \int_{-h}^h \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{\tau})^3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}\right) \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z-z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) + \right. \\ &\left. + \exp\left(-\frac{(z+z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) \right) \partial x' \partial z' \partial \tau. \quad (2) \end{aligned}$$

Для решения выражения (2) необходимо определить следующие интегралы по x , y и z :

$$\text{Int1}_x = \int_{-B_1}^{B_1} \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \partial x';$$

$$\text{Int}_x = \int_{-B}^B \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \partial x';$$

$$\text{Int}_y = \int_{-r}^r \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}\right) \partial y';$$

$$\begin{aligned} \text{Int}_z &= \int_{-h}^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z-z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) + \right. \\ &\left. + \exp\left(-\frac{(z+z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) \right) \partial z'. \end{aligned}$$

Из табл. 2 работы [2] выбирается решение интегралов, соответствующее заданным условиям источника тепла и значениям x' , y' и z' :

$$\text{Int1}_x = \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf}\left(\frac{x+B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x-B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right];$$

$$\text{Int}_x = \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf}\left(\frac{x+B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x-B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right];$$

$$\begin{aligned} \text{Int}_y &= \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf} \left(\frac{y+r}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \text{erf} \left(\frac{y-r}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right]; \\ \text{Int}_z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf} \left(\frac{z-S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) + \right. \\ &+ \text{erf} \left(\frac{z+S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \text{erf} \left(\frac{z-S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \\ &\left. - \text{erf} \left(\frac{z+S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставив табличное решение интегралов по x' , y' и z' и сделав преобразования, получаем окончательное решение тепловой модели в аналитическом виде для электронно-лучевой сварки с продольными колебаниями луча:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \frac{k_1 q \eta}{16rB_1 c \rho \sqrt{\pi a}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left[\text{erf} \left(\frac{x+B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \right. \\ &- \left. \text{erf} \left(\frac{x-B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \left[\text{erf} \left(\frac{y+r}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \text{erf} \left(\frac{y-r}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(z+2nL)^2}{4a\tau} \right) d\tau + \frac{k_2 q \eta}{32Bhc \rho \sqrt{\pi a}} \times \\ &\times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left[\text{erf} \left(\frac{x+B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \text{erf} \left(\frac{x-B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left(-\frac{y^2}{4a\tau} \right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\text{erf} \left(\frac{z-S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) + \right. \\ &+ \left. \text{erf} \left(\frac{z+S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \text{erf} \left(\frac{z-S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \right. \\ &\left. - \text{erf} \left(\frac{z+S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Применение продольных колебаний при электронно-лучевой сварке, а также увеличение амплитуды колебаний при одной и той же частоте приводит к изменениям глубины и формы проплавления относительно сварки статическим лучом. Соответственно, коэффициенты k_1 , r , h_1 и h_2 , позволяющие более точно передать форму проплавления и входящие в уравнение (3), будут также изменяться относительно значений, полученных для сварки статическим лучом.

На основе статистической обработки данных, полученных при подборе коэффициентов для экспериментальных образцов из среднелегированных сталей, были получены регрессионные зависимо-

сти влияния амплитуды продольных колебаний на изменение коэффициентов k_1 , r , h_1 и h_2 :

$$\begin{aligned} h_{2_пр} &= h_2 - 2,342a + 0,684a^2; \\ h_{1_пр} &= h_1 + 0,576a - 0,183a^2; \\ k_{1_пр} &= k_1 - 0,015a + 5,812 \cdot 10^{-3} a^2; \\ r_{_пр} &= r + 0,225a - 0,098a^2, \end{aligned}$$

где h_2 определялось как среднеарифметическое значение H , вычисляемое по следующим формулам [17]:

$$H = \frac{UI}{r_{л} V_{св}} \cdot \left(c \rho N_{ср} + \rho L_{лн} + \frac{5\lambda T_{ср}}{2a} + \frac{5\lambda T_{ср}}{2r_{л} V_{св}} \right)^{-1}; \quad (4)$$

$$H = IU \lg \left(\frac{2,24\lambda}{c \rho V_{св} r} \right) \cdot \left(2\pi\lambda (T_{ср} - T_0) \right)^{-1}, \quad (5)$$

k_1 , r , h_1 вычисляются соответственно по формулам

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,453 + 5,017l_{л} + 7,742 \cdot 10^{-3} U - \\ &- 0,08V_{св} - 0,049h_2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$r = 2,129 + 41,62l_{л} + 0,047U - 0,311V_{св} - 0,317h_2; \quad (7)$$

$$h_1 = -0,057 - 1,35l_{л} + 0,011U - 0,101V_{св} - 0,03h_2, \quad (8)$$

где a – значение амплитуды колебаний.

Построение модели для решения тепловой задачи сварки с поперечными колебаниями луча

Источник тепла для сварки с колебаниями луча поперек стыка с амплитудой A (рис. 2) и с учетом расширения радиуса источника тепла на поверхности может быть представлен как комбинированный, непрерывно действующий в течение определенного отрезка времени t , состоящий из следующего:

- плоского источника, действующего в координатной плоскости $X-Y$, с длиной $2A_1$ вдоль оси Y и шириной r вдоль оси X , вводимого в начале координат $(0,0,0)$, где $A_1 = A + r$;

- плоского источника длиной $2h$ (по оси Z) и шириной $2A$ (по оси Y), действующего под поверхностью на расстоянии h_1 в плоскости $Y-Z$, вводимого в координате $(0, 0, S)$.

Математическое описание функции источника тепла (см. рис. 2) имеет следующий вид:

$$F(x, y, z, t) = \frac{q\eta}{c\rho} \left(\frac{k_1}{4rA_1} E(x') E_1(y') \delta(z') E(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, t) = & \frac{k_1 q \eta}{16r A_1 c \rho (\sqrt{\pi a})^3} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \\
 & \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+r+V\tau}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \exp \left(\frac{x-r+V\tau}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\
 & \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y+A_1}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \exp \left(\frac{y-A_1}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\
 & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(z+2nL)^2}{4a\tau} \right) d\tau + \\
 & + \frac{k_2 q \eta}{32A h c \rho \sqrt{\pi a}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot \exp \left(-\frac{(x+V\tau)^2}{4a\tau} \right) \times \\
 & \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y+A}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y-A}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\
 & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{z-S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{z+S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{z-S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{z+S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] d\tau. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов k_1, r, h_1 и h_2 , входящих в уравнение (11), на основе экспериментальных данных были получены регрессионные уравнения в зависимости от амплитуды поперечных колебаний:

$$\begin{aligned}
 h_{2_пп} &= h_2 - 3,62a + 1,239a^2; \\
 h_{1_пп} &= h_1 + 0,32a - 0,072a^2; \\
 k_{1_пп} &= k_1 - 0,014a + 3,248 \cdot 10^{-3} a^2; \\
 r_{_пп} &= r - 2,202a - 0,757a^2,
 \end{aligned}$$

где h_2 определялось как среднеарифметическое значение H , вычисляемое по формулам (4) и (5); k_1, r, h_1 вычисляются по формулам (6–8) соответственно; a – значение амплитуды колебаний.

На рис. 3 представлено влияние амплитуды продольных и поперечных колебаний на изменение значений коэффициентов k_1, r, h_1 и h_2 , входящих в уравнения (3) и (11). Расчеты представлены для среднелегированной стали 34ХНЗМ, режимы сварки: $I_n - 0,2$ А, $U - 30$ кВ, $V_{св} - 16$ м/ч, глубина проплавления при сварке без колебаний – 24 мм, частота колебаний 400 Гц.

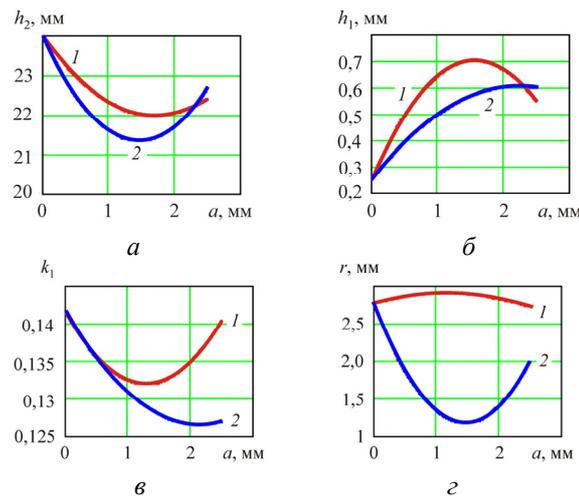


Рис. 3. Влияние амплитуды продольных 1 и поперечных 2 колебаний электронного луча при сварке на значения коэффициентов h_2 (а), h_1 (б), k_1 (в) и r (г), входящих в уравнения (3) и (11)

Построение модели для решения тепловой задачи сварки с x-образными колебаниями электронного луча

Для сварки с колебаниями луча по x-образной траектории при выборе формы источника тепла [18, 19] учитываются следующие основные моменты: 1-е – x-образная траектория представляет собой суперпозицию продольных и поперечных колебаний, 2-е – учитываются расширения радиуса источника тепла на поверхности и действие источника тепла на глубине под поверхностью. Таким образом, принимаем источник тепла для электронно-лучевой сварки с x-образной траекторией как комбинированный, непрерывно действующий в течение определенного отрезка времени t (рис. 4), состоящий из следующего:

– плоского источника, действующего в координатной плоскости $X-Y$, с длиной $2B_1$ вдоль оси X и шириной $2A_1$ вдоль оси Y , вводимого в начале координат $(0, 0, 0)$, где $A_1 = A + r$ и $B_1 = B + r$, r учитывает расширение источника тепла на поверхности;

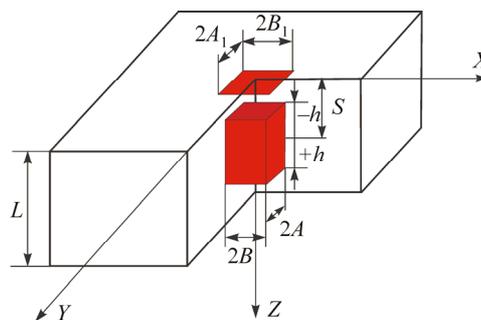


Рис. 4. Схема источника тепла при электронно-лучевой сварке с колебаниями луча по x-образной траектории

– объемного источника глубиной $2h$ (по оси Z), действующего под поверхностью на расстоянии h_1 в плоскости $Y-Z$, вводимого в координате $(0, 0, S)$ и имеющего прямоугольную форму размером $2A \times 2B$ в плоскости $X-Y$ (ширина $2A$ вдоль оси Y и длина $2B$ вдоль оси X).

Математическое описание функции источника тепла (см. рис. 4) имеет следующий вид:

$$F(x, y, z, t) = \frac{q\eta}{c\rho} \left(\frac{k_1}{4A_1B_1} E_1(x') E_1(y') \delta(z') E(\tau) + \frac{k_2}{8ABh} E(x') E(y') E(z') E(\tau) \right); \quad (12)$$

$$E_1(x') = \begin{cases} 1 & \text{при } -B_1 \leq x' \leq B_1, \\ 0 & \text{при } B_1 < x' < -B_1; \end{cases}$$

$$E_1(y') = \begin{cases} 1 & \text{при } -A_1 \leq y' \leq A_1, \\ 0 & \text{при } A_1 < y' < -A_1; \end{cases}$$

$$E(x') = \begin{cases} 1 & \text{при } -B \leq x' \leq B, \\ 0 & \text{при } B < x' < -B; \end{cases}$$

$$E(y') = \begin{cases} 1 & \text{при } -A \leq y' \leq A, \\ 0 & \text{при } A < y' < -A; \end{cases}$$

$$E(z') = \begin{cases} 1 & \text{при } -h \leq z' \leq h, \\ 0 & \text{при } h < z' < -h; \end{cases}$$

$$E(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_0 \leq \tau \leq t, \\ 0 & \text{при } \tau > t. \end{cases}$$

Проведя подстановку функции источника тепла (12) в уравнение, представляющее в общем виде интегральное решение задачи теплопроводности в подвижной системе координат для бесконечной пластины [9], и соответствующие преобразования, представленные выше, получаем следующее уравнение:

$$T(x, y, z, t) = \frac{k_1 q \eta}{16B_1 A_1 c \rho (\sqrt{\pi a})^3} \int_{-B-A_1}^{B_1} \int_{-A_1}^{A_1} \int_{t_0}^t \frac{1}{(\sqrt{\tau})^3} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}\right) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z+2nL)^2}{4a\tau}\right) \partial x' \partial y' \partial \tau +$$

$$+ \frac{k_2 q \eta}{64BAhc\rho (\sqrt{\pi a})^3} \int_{-B-A}^B \int_{-A-h}^A \int_{t_0}^t \frac{1}{(\sqrt{\tau})^3} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}\right) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z-z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{(z+z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) \right) \partial x' \partial y' \partial z' \partial \tau. \quad (13)$$

Находим табличные решения интегралов по x , y и z (см. табл. 2 работы [2]), соответствующие заданным условиям источника тепла и значениям x' , y' и z' :

$$\text{Int1}_x = \int_{-B_1}^{B_1} \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \partial x' =$$

$$= \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf}\left(\frac{x+B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x-B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right];$$

$$\text{Int}_x = \int_{-B_1}^{B_1} \exp\left(-\frac{(x-x'+V\tau)^2}{4a\tau}\right) \partial x' =$$

$$= \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf}\left(\frac{x+B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x-B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right];$$

$$\text{Int1}_y = \int_{-A_1}^{A_1} \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}\right) \partial y' =$$

$$= \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf}\left(\frac{y+A_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{y-A_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right];$$

$$\text{Int}_y = \int_{-A_1}^{A_1} \exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}\right) \partial y' =$$

$$= \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf}\left(\frac{y+A}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \text{erf}\left(\frac{y-A}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right];$$

$$\text{Int}_z = \int_{-h}^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z-z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{(z+z'+2nL)^2}{4a\tau}\right) \right) \partial z' =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{a\pi\tau} \left[\text{erf}\left(\frac{z-S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \right.$$

$$\left. + \text{erf}\left(\frac{z+S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] -$$

$$- \operatorname{erf}\left(\frac{z-S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z+S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) \Big] \partial\tau.$$

Проведя подстановку найденных решений интегралов в уравнение (13) и сделав преобразования, находим интегральное решение тепловой задачи для электронно-лучевой сварки с х-образной траекторией колебаний луча:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = & \frac{k_1 q \eta}{16 A_1 B_1 c \rho (\sqrt{\pi a})^3} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \\ & \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-x-B_1+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] \times \\ & \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+A_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-A_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z+2nL)^2}{4a\tau}\right) \partial\tau + \\ & + \frac{k_2 q \eta}{64 ABhc\rho} \int_0^t \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-x-B+V\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] \times \\ & \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+A}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-y-A}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] \times \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{z-S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \right. \\ & \quad + \operatorname{erf}\left(\frac{z+S+h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \\ & \quad - \operatorname{erf}\left(\frac{z-S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \\ & \quad \left. - \operatorname{erf}\left(\frac{z+S-h+2nL}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] \partial\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение (14) также может быть использовано для решения тепловой задачи при электронно-лучевой сварке с колебаниями луча по круговой и эллиптической траекториям. В случае сварки с круговыми и х-образными колебаниями луча значения амплитуды вдоль осей X и Y будут равны ($A = B$), а при рассмотрении сварки с эллиптическими колебаниями луча значения амплитуды будут разными ($A \neq B$).

Так же, как и в предыдущих случаях, на основе экспериментальных данных были получены

регрессионные уравнения для определения коэффициентов k_1 , r , h_1 и h_2 в зависимости от амплитуды х-образных колебаний:

$$h_{2_хк} = h_2 - 4,159a + 0,919a^2 - 0,023a^3;$$

$$h_{1_хк} = h_1 - 0,447a + 1,625a^2 - 0,454a^3;$$

$$k_{1_хк} = k_1 + 0,042a - 0,044a^2 + 0,011a^3;$$

$$r_{_хк} = r - 1,072a + 0,397a^2 - 0,094a^3,$$

где h_2 определялось как среднеарифметическое значение H , вычисляемое по формулам (4) и (5), k_1 , r , h_1 вычисляются по формулам (6–8); a – значение амплитуды колебаний.

Как было показано выше на рис. 4, увеличение амплитуды по-разному влияет на характер изменения значений коэффициентов k_1 , r , h_1 и h_2 при продольных и поперечных колебаниях. Поскольку х-образная траектория представляет собой суперпозицию продольных и поперечных колебаний, характер изменения значений коэффициентов k_1 , r , h_1 и h_2 с увеличением амплитуды будет более сложным (рис. 5). Расчеты представлены для среднелегированной стали 38Х2Н2МА, режимы сварки: $I_{л} - 0,25$ А, $U - 30$ кВ, $V_{св} - 10$ м/ч, глубина проплавления при сварке без колебаний – 30 мм, частота колебаний 600 Гц.

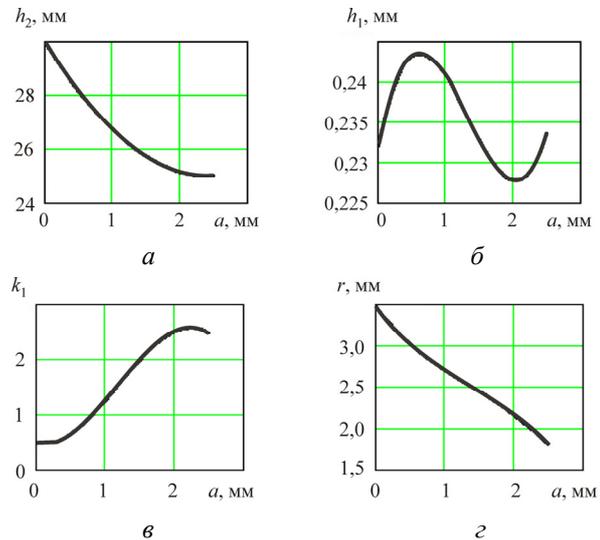


Рис. 5. Влияние амплитуды х-образных колебаний электронного луча при сварке на значение коэффициентов h_2 (а), h_1 (б), k_1 (в) и r (г), входящих в уравнение (14)

Таким образом, разработаны математические модели для решения тепловых задач при электронно-лучевой сварке с колебаниями луча по продольной, поперечной и х-образной траекториям. Модели построены аналитическим методом на основе решения задачи теплопроводности с исполь-

зованием функций Грина – методом источников. В основе построения моделей для сварки с колебаниями электронного луча используется введение комбинированного источника тепла, состоящее из поверхностного и действующего по глубине. Общим подходом при построении моделей является то, что источник, действующий на поверхности, увеличивается на радиус r относительно размеров 2-го источника. Источник, распределенный по глубине, расположен на некотором расстоянии от поверхности по оси Z . Для имитации продольных и поперечных колебаний луча размеры комбинированного источника тепла увеличиваются линейно по соответствующим осям на величину амплитуды колебаний. В модели для x -образной траектории применяется суперпозиция продольных и поперечных колебаний. Разработанную тепловую модель электронно-лучевой сварки с x -образной траекторией можно использовать для решения тепловых задач применительно к круговой и эллиптической разверткам. Такое представление формы теплового источника позволяет более точно передавать форму проплавления при электронно-лучевой сварке с колебаниями луча.

Список литературы

1. Карлслю Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
2. Язовских В.М. Математическое моделирование и инженерные методы расчета в сварке: в 2 ч. Ч. 2. Тепловые процессы при сварке и моделирование в пакете MathCad. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 119 с.
3. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. – М.: Машгиз, 1951. – 296 с.
4. Князева А.Г. Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2009. – 357 с.
5. Цаплин А.И. Теплофизика в металлургии: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 230 с.
6. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: справ. / Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, И.В. Зуев, А.Н. Кокора. – М.: Машиностроение, 1985. – 496 с.
7. Рыкалин Н.Н., Зуев И.В., Углов А.А. Оценка глубины проплавления при электронно-лучевой сварке // Физика и химия обработки материалов. – 1972. – № 1. – С. 9–14.
8. Зуев И.В., Рыкалин Н.Н., Углов А.А. О колебаниях глубины проплавления при электронно-лучевой сварке // Физика и химия обработки материалов. – 1975. – № 1. – С. 136–141.
9. Ольшанская Т.В., Федосеева Е.М., Колева Е.Г. Построение тепловых моделей при электронно-лучевой сварке методом функций Грина // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Материаловедение. – 2017. – Т. 19, № 3. – С. 49–74.

10. Olshanskaya T.V. Simulation of thermal processes at electron-beam welding with beam splitting // *Elektrotechnika&Elektronika E+E*. – 2016. – Vol. 51. – P. 92–98.

11. Olshanskaya T.V., Salomatova E.S., Trushnikov D.N. Simulation of thermal processes at electron-beam welding with beam splitting // *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2016. – Vol. 12(4). – P. 3525–3534.

12. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

13. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В. Основы электронно-лучевой обработки материалов. – М.: Машиностроение, 1978. – 239 с.

14. Моделирование электронно-лучевой сварки для определения параметров сварных соединений разнородных материалов / Г.Л. Пермяков, Т.В. Ольшанская, В.Я. Беленький, Д.Н. Трушников // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Материаловедение. – 2013. – Т. 15, № 4. – С. 48–58.

15. Моделирование тепловых процессов при электронно-лучевой сварке разнородных материалов / Г.Л. Пермяков, Т.В. Ольшанская, В.Я. Беленький, Д.Н. Трушников // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2013. – Т. 15, № 6(2). – С. 458–463.

16. Modeling of electron-beam welding to determine the weld joints parameters of dissimilar materials / G.L. Permyakov, T.V. Olshanskaya, V.Ya. Belenkiy, D.N. Trushnikov, L.N. Krotov // *Life Science Journal*. – 2014. – Vol. 11, № 4. – P. 300–307.

17. Кайдалов А.А. Электронно-лучевая сварка и смежные технологии. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Экотехнология, 2004. – 260 с.

18. Формирование эквивалентного источника теплоты для расчетов деформаций конструкций на основе теоретического моделирования воздействия электронного луча на металл / В.А. Ерофеев, Р.В. Логвинов, В.М. Нестеренков, В.В. Плошихин // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2008. – Вып. 4. – С. 155–166.

19. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В. Механизм сварки и обработки электронным лучом // Сварка электронным лучом: материалы конф. / Моск. дом науч.-техн. пропаганды им. Ф.Э. Дзержинского. – М., 1974. – С. 13–19.

References

1. Karlslou G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel [Heat conductivity of solid bodies] perevod s angliiskogo. Moscow: Nauka, 1964, 487 p.
2. Iazovskikh V.M. Matematicheskoe modelirovanie i inzhenernye metody rascheta v svarke: v 2 chastikh. Chast' 2. Teplovye protsessy pri svarke i modelirovanie v pakete MathCad [Mathematical modeling and engineering methods of calculation in welding]. Perm': Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2008, 119 p.
3. Rykalin N.N. Raschety teplovykh protsessov pri svarke [Calculations of thermal processes when welding]. Moscow: Mashgiz, 1951, 296 p.

4. Kniازهva A.G. Teplofizicheskie osnovy sovremennykh vysokotemperaturnykh tekhnologii: uchebnoe posobie [Heatphysical bases of modern high-temperature technologies:]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2009, 357 p.

5. Tsaplin A.I. Teplofizika v metallurgii: uchebnoe posobie [Thermophysics in metallurgy]. Perm': Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2008, 230 p.

6. Rykalin N.N., Uglov A.A., Zuev I.V., Kokora A.N. Lazernaia i elektronno-luchevaia obrabotka materialov: spravochnik [Laser and electron beam processing of materials]. Moscow: Mashinostroenie, 1985, 496 p.

7. Rykalin N.N., Zuev I.V., Uglov A.A. Otsenka glubiny proplavleniia pri elektronno-luchevoi svarke [Promelting depth assessment at electron beam welding] [Fizika i khimiia obrabotki materialov, 1972, no. 1, pp. 9–14.

8. Zuev I.V., Rykalin N.N., Uglov A.A. O kolebaniiakh glubiny proplavleniia pri elektronno-luchevoi svarke [About fluctuations of depth of pro-melting at electron beam welding]. *Fizika i khimiia obrabotki materialov*, 1975, no. 1, pp. 136–141.

9. Ol'shanskaia T.V., Fedoseeva E.M., Koleva E.G. Postroenie teplovykh modelei pri elektronno-luchevoi svarke metodom funktsii Grina [Creation of thermal models at electron beam welding by method of functions of Green]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mashinostroenie, materialovedenie*, 2017, vol. 19, no. 3, pp. 49–74.

10. Olshanskaya T.V. Simulation of thermal processes at electron-beam welding with beam splitting. *Elektrotechnika&Elektronika E+E*, 2016, vol. 51, pp. 92–98.

11. Olshanskaya T.V., Salomatova E.S., Trushnikov D.N. Simulation of thermal processes at electron-beam welding with beam splitting. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, vol. 12(4), pp. 3525–3534.

12. Polianin A.D. Spravochnik po lineinym uravneniiam matematicheskoi fiziki [Reference book on the linear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 576 p.

13. Rykalin N.N., Uglov A.A., Zuev I.V. Osnovy elektronno-luchevoi obrabotki materialov [Bases of electron beam processing of materials]. Moscow: Mashinostroenie, 1978, 239 p.

14. Permiakov G.L., Ol'shanskaia T.V., Belen'kii V.Ia., Trushnikov D.N. Modelirovanie elektronno-luchevoi svarki dlia opredeleniia parametrov svarykh soedinenii raznorodnykh materialov [Modeling of electron beam welding for determination of parameters of welded compounds of diverse materials]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mashinostroenie, materialovedenie*, 2013, vol. 15, no. 4, pp. 48–58.

15. Permiakov G.L., Ol'shanskaia T.V., Belen'kii V.Ia., Trushnikov D.N. Modelirovanie teplovykh protsessov pri elektronno-luchevoi svarke raznorodnykh materialov [Mode-

ling of thermal processes at electron beam welding of diverse materials]. *Izvestiia Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk*, 2013, vol. 15, no. 6(2), pp. 458–463.

16. Permyakov G.L., Olshanskaya T.V., Belenkiy V.Ya., Trushnikov D.N., Krotov L.N. Modeling of electron-beam welding to determine the weld joints parameters of dissimilar materials. *Life Science Journal*, 2014, vol. 11, no. 4, pp. 300–307.

17. Kaidalov A.A. Elektronno-luchevaia svarka i smezhnye tekhnologii [Electron beam welding and adjacent technologies]. 2nd ed. Kiev: Ekotekhnologiya, 2004, 260 p.

18. Erofeev V.A., Logvinov R.V., Nesterenkov V.M., Ploshikhin V.V. Formirovanie ekvivalentnogo istochnika tep-loty dlia raschetov deformatsii konstruksii na osnove teoreticheskogo modelirovaniia vozdeistviia elektronnoho lucha na metall [Formation of an equivalent source of warmth for calculations of deformations of designs on the basis of theoretical modeling of impact of an electronic beam on metal]. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2008, iss. 4, pp. 155–166.

19. Rykalin N.N., Uglov A.A., Zuev I.V. Mekhanizm svarki i obrabotki elektronnykh luchom [Mechanism of welding and processing by an electronic beam]. *Svarka elektronnykh luchom: materialy konferentsii. Moskovskii dom nauchno-tekhnicheskoi propagandy imeni F.E. Dzerzhinskogo*. Moscow, 1974, pp. 13–19.

Получено 06.08.18

Об авторах

Ольшанская Татьяна Васильевна (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры сварочного производства, метрологии и технологии материалов Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: tvob6@mail.ru.

Федосеева Елена Михайловна (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры сварочного производства, метрологии и технологии материалов Пермского национального исследовательского политехнического университета; e-mail: emfedoseeva@pstu.ru.

About the authors

Tatyana V. Olshanskaya (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Welding Production, Metrology and Technology of Materials, Perm National Research Polytechnical University; e-mail: tvob6@mail.ru.

Elena M. Fedoseeva (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Welding Production, Metrology and Technology of Materials, Perm National Research Polytechnical University; e-mail: emfedoseeva@pstu.ru.