

УДК 51-74

А.К. Гукасов

A.K. Gukasov

ФГБОУ ВПО «Вятский государственный университет», г. Киров
FGEI HPE "Vyatka State University", Kirov

В.В. Мелюков

V.V. Melyukov

ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
FGEI HPE "Vyatka State University of Humanities", Kirov

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЖИМА СВАРКИ ДВОЙСТВЕННЫМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫМ МЕТОДОМ

DEFINITION OF THE MODE OF WELDING OF DUALITY REGULARIZED METHOD

Рассмотрено решение задачи оптимизации теплового процесса сварки пластин двойственным регуляризованным методом. Предложен алгоритм численного решения. Приведены результаты численных решений. Описаны преимущества алгоритма численного решения, построенного с использованием двойственного регуляризованного метода.

Ключевые слова: задача, оптимизация, двойственный регуляризованный метод, функционал, уравнение теплопроводности.

The decision of optimization problem of heat welding process of plates is considered with duality regularized method. The algorithm of the numerical decision is offered. Results of numerical decisions are given. Advantages of algorithm of the numerical solution of duality regularized method constructed with use are described.

Keywords: problem, optimization, duality regularized method, functional, equation of heat conductivity.

Оптимизация решений технических задач связана с определением экстремальных в определенном смысле режимов, свойств и условий работы исследуемых процессов и объектов. Определенный смысл исследования объекта или процесса закладывается в выражении некоторой функции, расчетный параметр которой составляется с учетом наиболее важных показателей каче-

ства процесса и технико-экономических характеристик. По значению этой функции оценивают меру качества процесса в области допустимых значений расчетного параметра.

Если расчетный параметр функции, принимаемый в качестве меры, является «нежелательным» для данного процесса, то функцию нужно минимизировать, а если расчетный параметр рассматривается как мера «качества» процесса, то ищут максимальное значение этой функции. Таким образом, формализованная постановка и решение технической задачи оптимизации связаны с составлением и поиском экстремума (минимума или максимума) некоторой целевой функции $f(x)$, определенной на заданном множестве X .

Для технических приложений наиболее важным классом задач оптимизации являются задачи, при постановке которых целевая функция должна зависеть от вида другой функции, т.е. аргументом целевой функции является другая функция. В этом случае выражение целевой функции связано с понятием функционала и функциональной зависимости. Применение функции в качестве аргумента, описывающего состояние процесса, позволяет более точно формализовать параметр качества и составить более адекватную реальному процессу модель целевой функции.

Эффективным методом решения задач оптимизации являются методы теории оптимального управления: принцип максимума Понтрягина, метод моментов, момент динамического программирования Беллмана, разработанные в середине прошлого столетия [1, 2].

В теории сварочных процессов рассмотрены задачи оптимального управления тепловыми процессами сварки, которые решены с использованием принципа максимума и метода моментов для систем с распределенными параметрами [3]. При постановке задач оптимального управления процессами сварки в качестве управляющего воздействия была принята плотность мощности сварочного источника, ограниченного по максимальной величине. Функция плотности мощности была получена в результате задач оптимизации, и она определяла форму пятна нагрева сварочного источника, его мощность и распределение плотности мощности по пятну нагрева [4–8].

В случае наиболее равномерного распределения максимальной температуры нагрева по ширине сварного шва пятно нагрева сварочного источника имеет форму двух полос, расходящихся к хвостовой части сварочной ванны [7–9]. Сварочный источник такой формы обеспечивает минимум тепловложения в процессе сварки, минимальную ширину зоны термического влияния и минимальный уровень временных и остаточных деформаций и напряжений.

Недостатком полученных в результате оптимизации сварочных процессов с применением принципа максимума является то, что плотность мощно-

сти сварочного источника должна принимать максимальные значения в каждой точке пятна нагрева и нулевое значение вне площади пятна нагрева, т.е. оптимальный сварочный источник определяется в классе кусочно-постоянных функций, которые наиболее точно могут быть реализованы высококонцентрированными сварочными источниками с минимальной инерционностью в управлении, в частности при электронно-лучевой и лазерной сварке.

Рассмотрим постановку и решение одной из задач оптимизации по принципу максимума, представленных в [3]. Решим ее с применением двойственного регуляризованного метода [10] и сравним результаты и эффективность решения с применением принципа максимума.

Рассмотрим задачу сварки пластин с применением схемы линейного быстродвижущегося источника. Математической моделью теплового процесса является одномерное уравнение теплопроводности [3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(y, t)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} T(0, t) = T(l, t) &= 0, \\ T(y, 0) &= 0, \end{aligned}$$

где функция $T(y, t)$ – распределение температуры в направлении оси y , перпендикулярной направлению сварки (стыку пластин), $f(y, t) = \frac{q(y, t)}{c_v}$, где $q(y, t)$ – функция плотности мощности, c_v – объемная теплоемкость.

Обозначим через $L^2(X)$ пространство функций, суммируемых с квадратом на множестве X . Напомним, что это множество состоит из всех функций f , таких, что интеграл Лебега $\int_X |f(x)|^2 dx$ конечен. Для $f(x) \in L^2(X)$ норма

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

определяется равенством

Пусть Q – множество $\{(y, t) : y \in (0, l), t \in (0, t']\}$. В качестве критерия оптимизации примем тот же функционал, построенный на невязках

$$J(f) = \int_0^l |T(y, t') - T'(y)|^2 dy \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$f \in U = \{f \in L^2(Q) : \|f\| \leq R\},$$

где $T'(y)$ – заданное распределение температуры.

Введем оператор $A : L^2(Q) \rightarrow L^2[0, l]$, сопоставляющий функции f функцию $u(x, t')$. Можно показать, что данный оператор непрерывен. Пусть $\{e_k\}$ – базис в $L^2[0, l]$. В качестве функций $e_k(x)$ можно взять, например, функции $\frac{2}{l} \sin \frac{\pi ky}{l}$ $k = 1, 2, \dots, n$.

Функционал (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle - \langle T', e_k \rangle|^2,$$

где $\{\varphi_k\} = A^* e_k$, $\langle f, \varphi_k \rangle = \iint_Q f(y, t) \varphi_k(y, t) dy dt$, $\langle T', e_k \rangle = \int_0^l T'(y) e_k(y) dy$. Сопреженный оператор A^* определяется равенством $A^* g = \psi(y, t)$, где $\psi(y, t)$ – решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0, \\ \psi(0, t) &= \psi(l, t) = 0, \\ \psi(y, t') &= g(y). \end{aligned}$$

Рассмотрим аппроксимирующие задачи

$$J_N(f) = \sum_{k=1}^N |\langle f, \varphi_k \rangle - \langle T', e_k \rangle|^2 \rightarrow \min,$$

где N – число взятых членов ряда.

Для решения этих задач можно воспользоваться двойственным регуляризованным методом [10]. Для этого введем регуляризованные задачи

$$T_N(f) = J_N(f) + \alpha_N (\|f\|^2 - R^2) \rightarrow \inf, \quad f \in U, \quad \alpha_N \rightarrow 0.$$

Введем функцию Лагранжа

$$L_N(f, \lambda) = J_N(f) + (\alpha_N + \lambda) (\|f\|^2 - R^2), \quad \lambda \geq 0.$$

и двойственную задачу

$$\inf L_N(f, \lambda) \rightarrow \sup_{f \in L^2(Q), \lambda \geq 0} \quad (2)$$

Для всех λ существует единственное решение задачи $L_N(f, \lambda) \rightarrow \inf$, которое находится решением следующей системы [11]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \psi_k \langle e_i, e_k \rangle - \sum_{i=1}^N u_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = -\langle f, e_k \rangle, \\ \sum_{i=1}^N \psi_k \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle + \lambda \sum_{i=1}^N u_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \lambda (\|f\| - R) = 0, \|f\| \leq R, \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, у нас появляется функция одной переменной $\chi(\lambda) = \inf L_N(f, \lambda)$. Находим $\lambda_N = \sup \chi(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, затем, решая систему (3) при полученном значении $\lambda = \lambda_N$, находим коэффициенты u_1, \dots, u_N и при-

ближенное значение $f_N = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$.

Численное решение одной из задач оптимизации с использованием рассмотренного метода выполним при следующих исходных данных [3]: ширина свариваемых пластин $l = 7$ см, время воздействия источника в поперечном сечении сварного соединения (время, в течение которого пятно нагрева источника пересекает поперечное сечение) $t' = 3,9$ с, заданное распределение температуры $T'(y)$ определяется функцией

$$T'(y) = \begin{cases} T_{\max}, & y \in [y_1, y_2], \\ 0, & y \in [0, y_1] \cup [y_2, l], \end{cases}$$

где для численного решения заданная ширина шва определяется координатами $y_1 = 2,5$ см, $y_2 = 4,5$ см, максимальная температура нагрева $T_{\max} = 1100$ °С.

Результаты решения задачи с применением двойственного регуляризованного метода приведены на рис. 1–3.

На рис. 1 изображены распределения температур заданной $T'(y)$ и полученной в результате решения $T(y, t')$ в поперечном сечении свариваемых пластин при числе взятых членов ряда $N = 15$.

На рис. 2 изображена форма пятна нагрева при среднем значении функции плотности мощности $f = 270$ °С/с. Характерная форма пятна нагрева источника при заданной точности расчетов состоит также из двух полос, расходящихся к хвостовой части пятна нагрева, как и при решении задачи по принципу максимума.

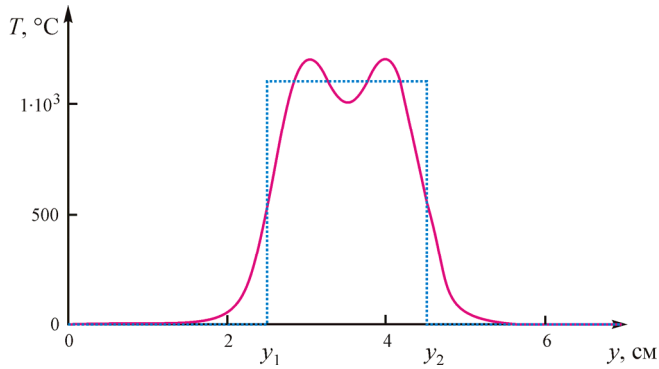


Рис. 1. Температура в момент времени $t' = 3,9$ с при $N = 15$.
Пунктиром изображен график функции $T'(y)$

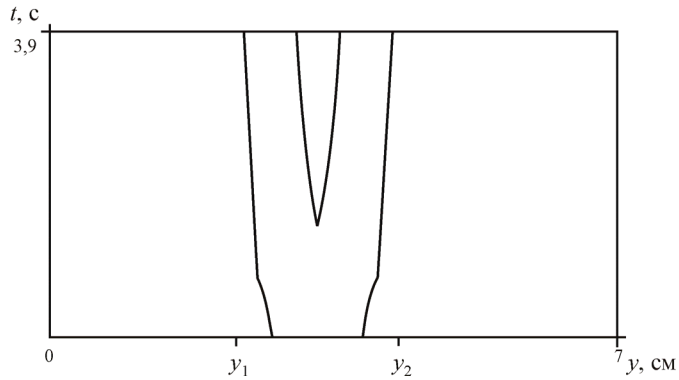


Рис. 2. Линия уровня функции $f(y, t)$, соответствующая значению $f = 270$ °C/с

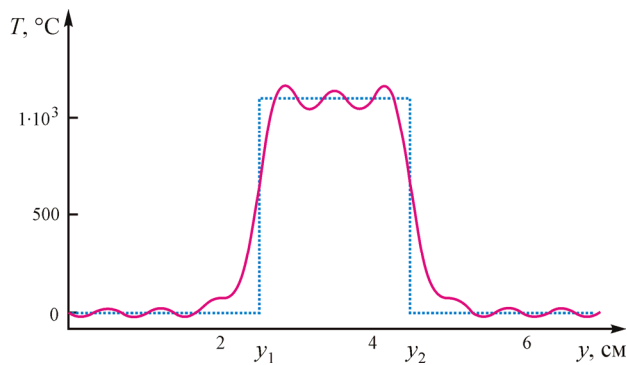


Рис. 3. Температура в момент времени $t' = 3,9$ с при $N = 20$.
Пунктиром изображен график функции $T'(y)$

На рис. 3 представлен результат решения задачи при повышении числа членов ряда до 20. Точность решения существенно повышается при увели-

чении числа членов ряда всего на 5. При решении по принципу максимума соответствующее повышение точности достигается при гораздо большем числе членов ряда.

Отметим преимущества приведенного метода. Переходя к двойственной задаче (2), мы переходим к более простой одномерной задаче. Кроме того, благодаря процессу регуляризации полученная последовательность приближений $\{f_N\}$ будет гарантированно сходиться ко множеству оптимальных решений. Заметим также, что, в отличие от метода, предложенного А.Г. Бутковским [2], при данном подходе не используются представление управляемых величин в виде интегральных соотношений (что не всегда возможно выполнить), кроме того, оптимальное управление ищется в более широком классе функций. Ограничения же классом кусочно-постоянных функций не всегда соответствует физической сущности задачи.

Список литературы

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 476 с.
3. Мелюков В.В. Оптимизация режима обработки материалов концентрированными потоками энергии: учеб. пособие / Вят. гос. ун-т. – Киров, 2003. – 212 с.
4. Мелюков В.В. Оптимизация теплового режима процесса сварки // Сварочное производство. – 1996. – № 1. – С. 9–11.
5. Мелюков В.В. Оптимизация параметров термического цикла при обработке пластин подвижным источником энергии // Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии. – М.: Наука, 1989. – С. 185–193.
6. Мелюков В.В. Термические циклы при непрерывном способе сварки стыковых соединений оптимальным подвижным источником // Сб. научных трудов. МЭИ. – 1987. – № 137. – С. 13–19.
7. Пат. 1311113 SU, МПК В23К015/00. Способ электронно-лучевой сварки / Мелюков В.В.; Киров. политехн. ин-т. – заявл. 08.04.1993; опубл. 20.04.2002, Бюл. № 11-2002. – 4 с.
8. Melyukov V.V., Gukasov A.K. Optimization of Power of Welding Source with Moment Method // Joining Materials JOM-17, Konventum Lo Skolen, Helsingør, Denmark, May 5–8, 2013. – P. 100–111.

9. Мелюков В.В. Влияние оптимального теплового режима сварки на остаточные деформации и напряжения сварных соединений сплава Zr–2,5% Nb // Сварочное производство. – 1997. – № 2. – С. 2–4.

10. Ишмухаметов А.З. Двойственный регуляризованный метод решения одного класса выпуклых задач минимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 7. – С. 1045–1060.

11. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 142 с.

Получено 1.11.2013

Гукасов Артур Константинович – старший преподаватель, Вятский государственный университет (610000, г. Киров, ул. Московская, д. 36, e-mail: artguk@yandex.ru).

Мелюков Валерий Васильевич – доктор технических наук, профессор, Вятский государственный гуманитарный университет (610002, г. Киров, ул. Красноармейская, д. 26, e-mail: rus_melyukov@mail.ru).

Gukasov Artur Konstantinovich – Senior Lecturer, Vyatka State University (610000, Kirov, Moskovskaya st., 36, e-mail: artguk@yandex.ru).

Melyukov Valery Vasilevich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Vyatka State University of Humanities (610002, Kirov, Krasnoarmeyskaya st., 26, e-mail: rus_melyukov@mail.ru).