УДК 621

Я.А. Коркодинов
I.A. Korkodinov

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Perm National Research Politechnic University

ОБЗОР СЕМЕЙСТВА k-ε МОДЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

THE REVIEW OF SET OF k-ε MODELS FOR MODELING TURBULENCE

Рассматриваются основные уравнения механики жидкости и газа, такие как уравнение неразрывности и уравнения Навье – Стокса. Описывается применение декомпозиции Рейнольдса для решения проблем турбулентности и возникающая при этом проблема замыкания турбулентности. Рассматривается гипотеза Буссинеска, позволяющая ввести понятие турбулентной вязкости. Описываются основные k–ε модели, их преимущества и недостатки.

Ключевые слова: уравнение неразрывности, уравнения Навье – Стокса, декомпозиция Рейнольдса, гипотеза Буссинеска, k–ε модели.

The governing equations of fluid and gas mechanics are considered such as continuity equation and Navier – Stokes equations. The application of Reynolds decomposition for closure problem of turbulence is described. Boussinesq hypothesis which allows introducing the conception of turbulent viscosity is considered. The most widely-known k–ε models are described as well as their advantages and disadvantages.

Keywords: continuity equation, Navie – Stokes equations, Reynolds decomposition, Boussinesq hypothesis, k–ε models.

В наши дни пакеты численного моделирования открывают огромные возможности для инженеров и исследователей из самых разных областей. Путем простого нажатия ряда кнопок и ввода необходимых входных данных исследователь может получать решения для комплексных междисциплинарных задач. Между тем все эти пакеты основаны на фундаментальных законах механики, и каждый входной параметр является критически важным для получения достоверного и соответствующего действительности решения.

В нашей статье рассматриваются основные понятия механики жидкости и газа. Рассматривается уравнение Навье – Стокса и дается возможное физическое объяснение основных его компонент. Также рассматриваются основные модели, принятые для описания турбулентности и широко применяемые в пакетах численного моделирования. Ставится задача рассмотреть теоретический базис, необходимый для дальнейшего численного решения проблем из области турбулентности.

Основные понятия механики жидкости. Согласно макроскопической модели вещества [1] жидкость и газ представляют собой сплошную текучую изотропную ньютоновскую среду с непрерывным распределением массы и других физических величин. Вспомним несколько основных понятий, применяемых в механике жидкости и газа (далее будем говорить о механике жидкости, подразумевая, что модели, описывающие поведение жидкости, также пригодны для описания поведения газа). Текучесть среды – свойство неограниченной деформируемости среды, т.е. способность изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил, если жидкость не сдерживается какими-либо стенками. Сплошность или неразрывность среды – способность заполнять весь объем, занимаемый материалом тела, без всяких пустот, общность свойств любой части среды и среды в целом. Изотропность среды – независимость всех физических величин и свойств среды от направления. Ньютоновская среда – среда, в которой касательные напряжения прямо пропорциональны градиенту скорости (или скорости угловых деформаций). Кроме поля скоростей также рассматриваются скалярные величины: плотность ρ, кг/м^3; температура T, К; тензоры напряжений и скоростей деформаций. Каждая из данных величин является функцией координат и времени.

Одним из основных уравнений в механике жидкости и газа является уравнение Навье – Стокса

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = -\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u} - \frac{1}{\rho}\nabla\vec{p} + \nu\Delta\vec{u} + \vec{f}\ . \quad (1)$$

Данное уравнение подробно описывает изменение скорости жидкости по времени $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$ с помощью четырех компонент.

Первая из них, $-\left(\vec{u}\cdot\Delta\right)\vec{u}$, показывает, как дивергенция влияет на скорость. Ее физический смысл можно наглядно объяснить на примере течения реки [2]. Так, когда река сужается, скорость воды в ней возрастает, и наоборот, когда река расширяется, скорость воды уменьшается.

Вторая компонента, $-\frac{1}{\rho}\nabla\vec{p}$, показывает, как влияет на движение изменение давления, особенно на направленность движения от областей с более высоким давлением. Также ясно, что чем больше плотность жидкости, тем труднее ей осуществлять перемещение.

Следующая компонента $\nu\Delta\vec{u}$, где ν – кинематическая вязкость, показывает влияние, оказываемое на частицу со стороны соседних частиц. Чем больше вязкость, тем, соответственно, больше величина данного влияния.

И четвертая компонента, $\vec{f}$, характеризует влияние, оказываемое на данную жидкость со стороны любой другой силы.

Другим фундаментальным уравнением является уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0. \tag{2}$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$ и уравнение приобретает вид

$$\mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0. \tag{3}$$

Уравнения (2), (3) справедливы как для идеальной, так и для реальной жидкости [3].

Таким образом, для ламинарной жидкости мы получаем систему из четырех уравнений: три уравнения Навье – Стокса в проекциях на оси и уравнение неразрывности для четырех неизвестных: три компонента вектора скорости и гидродинамическое давление.

Декомпозиция Рейнольдса. Турбулентная жидкость характеризуется колебаниями скорости во всех направлениях и имеет бесконечное число степеней свободы [4]. Решение уравнений Навье – Стокса для турбулентной жидкости затруднено, так как в данном случае уравнения эллиптические, нелинейные и содержат по две неизвестных величины. Жидкость в данном случае хаотическая, диффузионная, диссипативная и прерывистая.

Существует несколько путей решения данной проблемы. Одним из них является декомпозиция Рейнольдса, согласно которой произвольную величину x_i можно записать как сумму ее среднего значения $\overline{x}_i$ и отклонения x_i' [5]:

$$x_i = \overline{x}_i + x_i'.$$

Такая декомпозиция будет давать набор уравнений, описывающих некоторое среднее поле жидкости. В результате мы получим усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса, которые также называются уравнениями Рейнольдса, а также усредненное уравнение неразрывности.

Уравнение неразрывности в компонентах для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{4}$$

Тогда для усредненной скорости $\overline{u}_i$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0. \tag{5}$$

Вычитая (5) из (4), получаем уравнение неразрывности для отклонения

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0.$$

Используя (4), можно записать уравнение (1) в компонентах следующим образом:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j\right) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \qquad (6)$$

где σ_{ij} – напряжения в жидкости, определяются по формуле

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \qquad (7)$$

Соотношения (7) являются определяющими соотношениями для ньютоновской жидкости. δ_{ij} называется дельтой Кронекера и определяется как

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1, i = j, \\ \delta_{ij} = 0, i \neq j. \end{cases}$$

Используя декомпозицию Рейнольдса, уравнение (6) можно записать в следующем виде [5]:

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right) = \rho \overline{g}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\sigma}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}\right). \qquad (8)$$

Это уравнение известно как уравнение Рейнольдса. Данное уравнение достаточно похоже на уравнение (6) и отличается лишь дополнительным слагаемым в правой части $\rho \overline{u_i' u_j'}$. Это слагаемое называется напряжениями Рейнольдса и представляет собой симметричный тензор второго порядка, состоящий из шести независимых компонент. Таким образом, для турбулентной жидкости имеются все те же четыре уравнения и уже десять неизвестных: три компонента скорости, гидродинамическое давление и шесть напряжений Рейнольдса. Данная проблема носит название проблемы замыкания турбулентности.

Стандартная модель турбулентности $k - \varepsilon$. Чтобы замкнуть турбулентность, необходимо определить связь между напряжениями по Рейнольдсу и параметрами осредненного течения. Эту связь определяют с помощью различных моделей турбулентности [6]. В этих моделях принимаются определенные допущения, на основе которых вводится недостающее число уравнений, что позволяет найти все неизвестные. Одним из допущений является введение турбулентной вязкости, которое впервые осуществил Буссинеск. Турбулентную динамическую вязкость μ_t он ввел по аналогии с динамической вязкостью

$$-\rho\overline{u_i' u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{9}$$

Далее перейдем непосредственно к получению стандартной $k-\varepsilon$ модели из двух уравнений, которая сегодня рассматривается как стандартная модель для описания турбулентности и решения инженерных задач. В данной модели вводятся два важных понятия – генерация P и диссипация ε. Физический смысл генерации турбулентности P заключается в порождении новых вихрей и пульсаций, которые и образуют турбулентность [7]. Диссипация ε, напротив, представляет собой рассеивание больших вихрей на более малые, приводит к усреднению течения и уменьшению турбулентности. Два уравнения переноса позволяют рассматривать турбулентность в пространстве и времени. Данная модель является полуэмпирической и опирается на феноменологический поход и результаты, полученные опытным путем.

Выполнив некоторые алгебраические преобразования и умножив на u_j, (8) можно привести к следующему виду [8]:

$$\begin{gathered}\partial_t\overline{u_i'u_j'} + \overline{u}_k\partial_k\overline{u_i'u_j'} = -\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_j'\partial_i p} + \overline{u_i'\partial_j p}\right) - 2\nu\overline{\partial_k u_i'\partial_k u_j'} - \\ -\partial_k\overline{u_k'u_i'u_j'} - \overline{u_j'u_k'}\partial_k u_i - \overline{u_i'u_k'}\partial_k u_j + \nu\nabla^2\overline{u_i u_j}.\end{gathered} \tag{10}$$

Определим кинетическую энергию турбулентности как $k = 0{,}5\overline{u_i'u_j'}$ и подставим ее в (10), принимая $i = j$:

$$\partial_t k + \overline{u}_k\partial_k k = -\frac{1}{\rho}\partial_i\overline{u_i'p} - \nu\overline{\partial_k u_i'\partial_k u_i'} - \frac{1}{2}\partial_k\overline{u_k'u_i'u_i'} - \overline{u_i'u_k'}\partial_k u_i + \nu\nabla^2 k. \tag{11}$$

Второе слагаемое правой части (11), по определению [8], является диссипацией

$$\varepsilon = \nu\overline{\partial_k u_i'\partial_k u_i'}, \tag{12}$$

тогда как четвертое слагаемое правой части выражения (1.1), включая минус, по определению [8], является генерацией P:

$$P = -\overline{u_i'u_k'}\partial_k u_i. \tag{13}$$

Далее делаем допущение [8], что

$$-\partial_j\left(\frac{1}{2}\overline{u_j' u_i' u_i'}-\frac{1}{\rho}\overline{u_j p}\right)\approx\partial_j(\nu_T\partial_j k). \tag{14}$$

Учитывая (12)–(14), уравнение (11) можно записать в следующем виде:

$$\partial_t k+\overline{u}_j\partial_j k=P-\varepsilon+\partial_j\left(\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\mathrm{k}}\right)\partial_j k\right). \tag{15}$$

Уравнение (15) является уравнением для кинетической энергии k. σ_k – параметр, обеспечивающий нужную размерность для слагаемого с ν_T. Обычно принимается $\sigma_k=1$. Уравнение для диссипации ε аналитически не выводится и просто записывается по аналогии с (15):

$$\partial_t\varepsilon+\overline{u}_j\partial_j\varepsilon=\frac{C_{1\varepsilon}'P-C_{2\varepsilon}'\varepsilon}{T}+\partial_j\left(\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\partial_j\varepsilon\right), \tag{16}$$

где $T=k/\varepsilon$ обеспечивает нужную размерность, а константы $\mathrm{C}_{1\varepsilon}'$, $C_{2\varepsilon}'$, σ_ε вводятся, поскольку форма уравнения (16) лишь предполагается, но не выводится аналитически.

В пакете Ansys Fluent уравнения стандартной $k-\varepsilon$ модели применяются в несколько ином, модернизированном виде. Его можно получить из (15) и (16) путем алгебраических преобразований, и он также описывается создателями модели [9], www.ansys.com:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho k\overline{u}_i)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\dfrac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\dfrac{\partial k}{\partial x_j}\right]+G_k+G_b-\rho\varepsilon-Y_M+S_k,\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon\overline{u}_i)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\dfrac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right]+C_{1\varepsilon}\dfrac{\varepsilon}{k}(G_k+C_{3\varepsilon}G_b)-C_{2\varepsilon}\rho\dfrac{\varepsilon^2}{k}+S_\varepsilon.\end{cases} \tag{17}$$

В данной системе уравнений G_k представляет турбулентную кинетическую энергию, образованную от средних градиентов скорости. Принимая гипотезу Буссинеска, ее можно выразить по формуле

$$G_k=\mu_t S^2,$$

где

$$\mu_t=\rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}, \tag{18}$$

ρ – плотность газа, $C_\mu = \text{const}$, S – инвариант тензора деформаций, $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$; G_b – кинетическая энергия выталкивающей силы,

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

где Pr_t – турбулентная постоянная Прандтля для энергии, g_i – компонента вектора гравитации в i-м направлении; β – коэффициент температурного расширения,

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

где T – температура.

$C_{3\varepsilon}$ – константа, определяющая степень воздействия выталкивающей силы на ε, определяется по формуле

$$C_{3\varepsilon} = \tanh\left|\frac{\nu'}{u'}\right|,$$

где ν' – компонента скорости жидкости, параллельная скорости гравитации и u' – компонента скорости жидкости, перпендикулярная скорости гравитации.

$C_{3\varepsilon} = 1$ для слоев жидкости, для которых направление скорости жидкости параллельно вектору гравитации, $C_{3\varepsilon} = 0$ для слоев жидкости, для которых направление скорости жидкости перпендикулярно вектору гравитации.

Y_M – вклад переменного расширения при турбулентности сжатия в общую скорость диссипации. Данную величину следует учитывать при большом числе Маха. Ее обязательно учитывать, когда моделируется сжимаемый идеальный газ.

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2,$$

где M_t – число Маха для турбулентной жидкости,

$$M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}},$$

где a – скорость звука, $a = \sqrt{\gamma R T}$.

Остальные константы определены из экспериментов для фундаментальных турбулентных жидкостей и имеют следующие значения: $C_{1\varepsilon} = 1{,}44$, $C_{2\varepsilon} = 1{,}92$, $C_\mu = 0{,}09$, $\sigma_k = 1{,}44$, $\sigma_\varepsilon = 1{,}3$.

RNG $k-\varepsilon$ модель. RNG модель была получена при помощи теории ренормализованных групп [10]. Она имеет схожую форму со стандартной $k-\varepsilon$ моделью, но включает следующие улучшения:

– имеет дополнительный член в уравнении для ε, который улучшает точность вычислений для жидкостей с высокими скоростями деформаций;

– в модели учтено влияние завихренности на турбулентность, что увеличивает точность для высокозавихренных жидкостей;

– данная теория предлагает аналитические формулы для турбулентных чисел Прандтля, тогда как стандартная модель использует заданные пользователем постоянные значения;

– RNG модель предлагает аналитически полученные формулы для эффективной вязкости, которая предназначена для жидкостей с низкими числами Рейнольдса. Тем не менее эффективное использование этой опции зависит от правильного рассмотрения пристеночной области.

Данные улучшения делают RNG модель более точной и надежной, позволяя эффективно применять ее для более широкого класса жидкостей по сравнению со стандартной $k-\varepsilon$ моделью.

Уравнения RNG модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\rho k)+\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho k\overline{u}_i)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_k\mu_{\mathrm{eff}}\dfrac{\partial k}{\partial x_j}\right)+G_k+G_b-\rho\varepsilon-Y_M+S_k, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon\overline{u}_i)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_\varepsilon\mu_{\mathrm{eff}}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)+C_{1\varepsilon}\dfrac{\varepsilon}{k}(G_k+C_{3\varepsilon}G_b)- \\ -C_{2\varepsilon}\rho\dfrac{\varepsilon^2}{k}-R_\varepsilon+S_\varepsilon. \end{cases} \tag{19}$$

Далее рассмотрим значение величин, новых по сравнению с (17). a_k, a_ε – обратные эффективные числа Прандтля для k и ε соответственно. В (19) μ_{eff} означает эффективную вязкость. Данная вязкость приблизительно равна μ_t из стандартной $k-\varepsilon$ модели для высоких чисел Рейнольдса. Для низких чисел Рейнольдса создателями модели [10] предлагается дополнительное дифференциальное уравнение, позволяющее более точно вычислить μ_{eff}.

Главное отличие RNG модели от стандартной заключается в дополнительном члене в уравнении для ε. R_ε вычисляется по формуле

$$R_\varepsilon=\frac{C_\mu\rho\eta^3(1-\eta/\eta_0)\varepsilon^2}{1+\beta\eta^3}\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{20}$$

где $\eta = Sk/\varepsilon$, $\eta_0 = 4{,}38$, $\beta = 0{,}012$. Значение R_ε может стать более очевидным, если записать второе уравнение (20) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon\overline{u}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_\varepsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}(G_k + C_{3\varepsilon}G_b) - C_{2\varepsilon}^{*}\rho\frac{\varepsilon^2}{k},$$

где $C_{2\varepsilon}^{*} = C_{2\varepsilon} + \dfrac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta\eta^3}$.

В случае когда $\eta < \eta_0$, R_ε вносит положительный вклад, $C_{2\varepsilon}^{*}$ становится больше, чем $C_{2\varepsilon}$. Таким образом, для жидкостей со слабыми или умеренными скоростями деформаций RNG модель дает результаты, схожие с полученными при помощи стандартной $k-\varepsilon$ модели.

При больших скоростях деформаций, $\eta > \eta_0$, R_ε вносит отрицательный вклад, $C_{2\varepsilon}^{*}$ становится меньше, чем $C_{2\varepsilon}$, снижается k, и следовательно, эффективная вязкость. В результате, в жидкостях с большими скоростями деформаций RNG модель дает меньшую турбулентную вязкость, чем стандартная $k-\varepsilon$ модель. Константы $C_{1\varepsilon}$ и $C_{2\varepsilon}$ имеют следующие значения: $C_{1\varepsilon} = 1{,}42$, $C_{2\varepsilon} = 1{,}68$.

Реальная $\boldsymbol{k-\varepsilon}$ ***модель.*** По сравнению со стандартной $k-\varepsilon$ моделью данная модель имеет два существенно важных отличия [11]:

– реальная $k-\varepsilon$ модель содержит альтернативную формулировку для турбулентной вязкости;

– модифицированное уравнение переноса для скорости диссипации ε было получено из точного уравнения для переноса среднеквадратичных колебаний завихренности.

Данная модель удовлетворяет точным математическим ограничениям по напряжениям Рейнольдса, вытекающим из физики турбулентной жидкости.

Неравенство Шварца и положительный знак напряжений по Рейнольдсу накладывают некоторые ограничения на C_μ. Значения данной константы меняются в зависимости от свойств жидкости и местоположения, они достаточно точно были получены экспериментальным путем для разных условий.

Другая проблема заключается в том, что уравнение для скорости диссипации ε не всегда работает достаточно хорошо. Например, хорошо известна аномалия круглого поперечного сечения струи. Скорость распространения для круглого сечения описывается достаточно хорошо, тогда как для ассиметричного результаты получаются неудовлетворительными.

Реальная $k-\varepsilon$ модель учитывает эти недостатки с помощью следующих улучшений: во-первых, предлагается новая формула для определения турбулентной вязкости, первоначально предложенная еще Рейнольдсом; во-вторых, используется новое уравнение для диссипации ε, основанное на динамическом уравнении среднеквадратичных колебаний завихренности.

Ограничением является то, что можно получить нефизичные турбулентные вязкости в ситуациях, когда вычислительная область содержит как зоны с турбулентностью, так и зоны со стационарной жидкостью.

Уравнения реальной $k-\varepsilon$ модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\rho k)+\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\dfrac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\dfrac{\partial k}{\partial x_j}\right]+G_k+G_b-\rho\varepsilon-Y_M+S_k, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho\varepsilon u_j)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\dfrac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]+\rho C_1 S\varepsilon- \\ -\rho C_2\dfrac{\varepsilon^2}{k+\sqrt{\nu\varepsilon}}+C_{1\varepsilon}\dfrac{\varepsilon}{k}C_{3\varepsilon}G_b+S_\varepsilon. \end{cases}$$

При этом

$$C_1=\max\left[0,43;\ \frac{\eta}{\eta+5}\right].$$

В реальной модели уравнение для k такое же, как и в стандартной модели. В то же время уравнение для ε отличается существенно. Одной положительной чертой является то, что правая сторона уравнения для ε не содержит G_k. Считается, что это обеспечивает лучший перенос спектральной энергии. Другое преимущество заключается в том, что при $k=0$ не возникает деления на ноль. Хорошие результаты для этой модели были получены для вихревых однородных жидкостей со сдвиговыми напряжениями, для свободных жидкостей и разделенных жидкостей. Для всех этих случаев были получены существенно лучшие результаты, чем при использовании стандартной модели. Также были получены хорошие результаты для ассиметричного поперечного сечения струи.

В реальной модели нахождение турбулентной вязкости существенно отличается от других $k-\varepsilon$ моделей. Хотя сама вязкость также находится по формуле (18), C_μ уже не является константой и находится по формуле

$$C_\mu=\frac{1}{A_0+A_S\dfrac{kU^*}{\varepsilon}},$$

где

$$U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij}}, \quad \tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk}\omega_k,$$
$$\Omega_{ij} = \bar{\Omega}_{ij} - \varepsilon_{ijk}\omega_k,$$

где $\bar{\Omega}_{ij}$ – тензор средних скоростей вращения; ω_k – угловая скорость. Константы $A_0 = 4,04$, $A_S = \sqrt{6}\cos\varphi$, где

$$\varphi = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\sqrt{6}W\right), \; W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3}, \; \tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \; S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

В данном случае C_μ является функцией средней скорости вращения и средней скорости деформаций, угловой скорости и переменных турбулентности k и ε. Остальные константы имеют следующие значения: $C_{1\varepsilon} = 1,44, C_2 = 1,9, \sigma_k = 1,0, \sigma_\varepsilon = 1,2.$

Выводы и рекомендации. В теории турбулентности еще не разработана универсальная теория, позволяющая одинаково успешно находить решения для всех классов задач. $k-\varepsilon$ модели являются наиболее широко распространенными и применимыми в численных пакетах. Результаты, полученные с их помощью, получили практическое подтверждение для широкого класса функций. Между тем не следует забывать, что данные модели имеют как преимущества, так и недостатки, и существует огромное количество альтернативных моделей. Выбор модели должен осуществляться в зависимости от условий конкретной задачи, а результаты решения должны быть тщательно проверены.

Список литературы

1. Харитонов В.П. Фундаментальные уравнения механики жидкости и газа. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 65 с.

2. Dobek S. Fluid dynamics and the Navier – Stokes Equation, available at: http://www.cs.umd.edu/~mount/Indep/Steven_Dobek/dobek-stable-fluid-final-2012.pdf.

3. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Ч. I / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1998. – 108 с.

4. Saad T. Turbulence modeling for beginners / University of Tennessee space institute, available at: http://www.cfd-online.com/W/images/3/31/Turbulence_Modeling_For_Beginners.pdf.

5. Sumer B.M. Lecture notes on turbulence / Technical University of Denmark, 2007, available at: http://www.external.mek.dtu.dk/personal/bms/turb_book_update_30_6_04.pdf.

6. Смирнов Е.М., Габарчук А.В. Течения вязкой жидкости и модели турбулентности: методы расчета турбулентных течений: конспект лекций / Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. – М., 2010. – 127 с.

7. Белов И.А. Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: учеб. пособие / Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2001. – 108 с.

8. Durbin P.A., Reif B.A.P. Statical theory and modeling for turbulent flows. – John Wiley and Sons, West Sussex, United Kingdom, 2011. – 357 p.

9. Launder B.E., Spalding D.B. Lectures in Mathematical Models of Turbulence. – London: Academic Press, 1972. – 169 p.

10. Renormalization group modeling and turbulence simulations / S.A. Orszag, V. Yakhot, W.S. Flannery, F. Boysan, D. Choudhury, J. Maruzewski, B. Patel // International conference on near-wall turbulent flows, Tempe, Arizona, 1993.

11. A new k–ε eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows – Model development and validation / T.-H. Shih, W.W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu // Computers fluids. – 1995. – No. 24 (3). – P. 227–238.

Получено 7.06.2013

Коркодинов Ярослав Александрович – аспирант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: svarogjk1989@rambler.ru).

Korkodinov Iaroslav Aleksandrovich – Postgraduate Student, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: svarogjk1989@rambler.ru).