



DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2021.3.01

УДК 531/534: [57+61]

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ РОГОВИЦЫ НА ЕЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ГЛАЗА ТОНОМЕТРОМ ШИОТЦА

И.Н. Моисеева, А.А. Штейн

Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1, e-mail: moiseeva.ir@yandex.ru, stein.msu@bk.ru

Аннотация. Разработанная авторами ранее эффективная модель нелинейно-упругой роговицы глаза применена к исследованию ее напряженно-деформированного состояния при нагружении вогнутым штампом и тонометром Шиотца – конструкцией, составленной из независимо перемещающихся вогнутого штампа и стержня (плунжера). Показано, что в обоих случаях выполняется условие геометрической малости деформаций. Учет нелинейности дает значительное увеличение минимальных значений растягивающих напряжений: возможность появления сжимающих напряжений становится менее вероятной. Изучено влияние нелинейности на связь между измеряемой непосредственно характеристикой деформации роговицы – заглублением плунжера – и давлением под тонометром (тонометрическим). Оказалось, что при достаточно больших тонометрических давлениях нелинейность практически не влияет на эту зависимость, однако неучет нелинейности приводит к заметному занижению оценки тонометрического давления по заглублению для низких давлений (ниже 20–25 мм рт. ст.). Это имеет место независимо от жесткости роговицы. Учет нелинейности, как и увеличение жесткости, несколько сдвигает кривую давление–заглубление в сторону зависимости, стандартно используемой при обработке результатов измерения. Такое сближение более заметно для меньшего веса плунжера.

Ключевые слова: глаз, роговица, нелинейность упругих свойств, тонометрия, тонометр Шиотца, математические модели.

ВВЕДЕНИЕ

При тонометрии по Шиотцу роговица глаза лежащего пациента нагружается составной конструкцией, состоящей из вогнутого штампа (стопы) и цилиндрического стержня (плунжера), опускаемого в отверстие в центре стопы. Стандартная обработка данных тонометрии включает в себя две процедуры. Сначала по непосредственно измеряемой геометрической характеристике – заглублению плунжера – определяется давление в глазу, нагруженном тонометром (тонометрическое), затем по тонометрическому давлению оценивается истинное, т.е. давление в глазу до нагружения. Принятая в клинике методика базируется на полуэмпирических соотношениях, полученных в 30–70-е годы прошлого века, на основе экспериментов, в первую очередь с энуклеированным глазом, и весьма грубой механической модели. Последняя, оперируя только с небольшим набором характеристик глазного яблока как

© Моисеева И.Н., Штейн А.А., 2021

Моисеева Ирина Никитична, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник лаборатории общей гидромеханики, Москва

Штейн Александр Александрович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник лаборатории общей гидромеханики, Москва

целого, не учитывала и не могла учесть основные особенности его поведения как распределенной системы. Избыточная упрощенность такого подхода, естественно, приводит к неточности, а порой и ошибочности получаемых оценок.

В работе [6] мы использовали для моделирования тонометрии по Шиотцу предложенную нами в [4] модель глазного яблока, в которой упругие свойства задаются тремя упругими константами, из которых две оказываются существенными, характеризуя отдельно упругие свойства роговичной и склеральной областей. Модель [4] достаточно проста и не требует рассмотрения множества параметров, определение которых для индивидуального обследуемого живого глаза в клинике невозможно. Вместе с тем она позволяет учесть неоднородность глазного яблока как упругой системы. Роговица представляется мягкой (безмоментной) двумерной однородной изотропной линейно-упругой поверхностью, а склера и прилегающие к ней ткани – упругим элементом, откликающимся изменением объема на изменение давления. Пренебрежение сопротивлением роговицы изгибу обосновано эмпирически и впервые было реализовано в механически корректной постановке в [1].

Расчеты, представленные в [6], позволили оценить границы применимости используемых в клинике эмпирических соотношений и предложить некоторые уточнения. В дальнейшем на основе этих результатов была исследована процедура дифференциальной тонометрии (тонометрии последовательно двумя разными грузами) [7], что позволило более обоснованно, чем раньше, использовать эту процедуру для оценки упругих свойств глазного яблока и выработать новые критерии диагностики первичной открытоугольной глаукомы [3].

Тем не менее остается открытым вопрос о поправках, которые может внести в получаемые оценки учет нелинейности упругого поведения глазного яблока. Таковая отмечалась как в экспериментах на целом энуклеированном глазу [12, 13, 18, 19, 21], так и в опытах с изолированной роговицей [10, 11, 14]. Это тем более важно, что полуэмпирическая теория, лежащая в основе современной клинической методики обработки данных тонометрии по Шиотцу, нелинейность учитывает, хотя весьма произвольно и некорректно [15, 17, 20]. Главным же стимулом разработки нелинейной модели тонометрии по Шиотцу оказывается рассогласование линейной теории с некоторыми данными клинических измерений [3].

Возможность эффективного учета нелинейности упругого поведения роговицы возникла после разработки нами максимально простой модели, в которой нелинейное поведение характеризуется единственным дополнительным параметром [9]. Проведенные в [9] и уточненные в [8] оценки показали, что в практически важном диапазоне давлений можно рассматривать физическую нелинейность упругих свойств роговицы, сохраняя условие малости деформаций. Что касается склеральной области, то нелинейность ее упругого отклика на внутриглазное давление оказалась при таких давлениях несущественной, что позволяет сохранить для нее ранее использовавшуюся линейную зависимость объема от давления [5].

В предлагаемой работе рассматривается влияние физической нелинейности роговицы на распределение в ней напряжений и деформаций при нагружении глаза вогнутым штампом и тонометром Шиотца и на соотношение между заглублением плунжера и давлением в жидкости под тонометром (тонометрическим давлением).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будет использоваться система уравнений равновесия, описывающая роговицу как двумерную безмоментную поверхность в предположении геометрической малости деформаций при конечных смещениях, которая рассматривалась ранее, например в [4] (соотношения (1.1)).

Определяющие соотношения для усилий T_1 и T_2 , действующих в роговице в меридиональном и перпендикулярном ему направлениях (главных двумерных напряжений), принимаем в соответствии с [9] в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= A[B(\exp(B\varepsilon_1 + C\varepsilon_2) - 1) + C(\exp(B\varepsilon_2 + C\varepsilon_1) - 1)] + T_0; \\ T_2 &= A[B(\exp(B\varepsilon_2 + C\varepsilon_1) - 1) + C(\exp(B\varepsilon_1 + C\varepsilon_2) - 1)] + T_0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$A = \frac{E_c^*}{\zeta^2(1-\nu_c)}, \quad B = \frac{\zeta}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1-\nu_c}{1+\nu_c}} \right), \quad C = \zeta - B.$$

Здесь ε_1 и ε_2 – компоненты двумерного тензора деформаций роговицы в направлении главных осей (диагональные компоненты этого тензора равны нулю в силу постановки задачи). Деформации ε_1 и ε_2 отсчитываются от некоторого отсчетного напряженного состояния с давлением p_0 , в котором роговица предполагается сферическим сегментом радиуса R_c (рис. 1, а). В этом состоянии $T_1 = T_2 = T_0 = p_0 R_c / 2$. Тензор жесткости в отсчетном состоянии считается изотропным и однородным, что позволяет ввести для этого состояния модуль растяжения E_c^* и коэффициент Пуассона ν_c . Еще один коэффициент в соотношении (1) ζ – безразмерный параметр нелинейности.

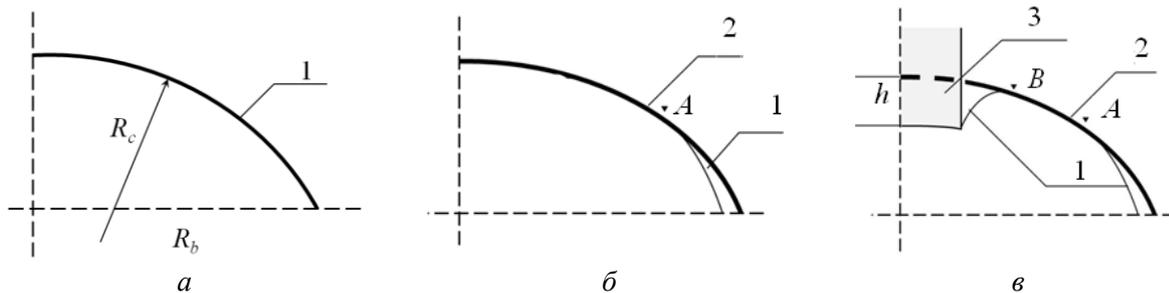


Рис. 1. К постановке задачи: роговица до внешнего нагружения (а), нагруженная вогнутым штампом (б) и полным тонометром Шиотца (в); 1 – свободная роговица; 2 – вогнутый штамп (стопа); 3 – стержень (плунжер); стрелки и буквы А и В указывают точки отрыва роговицы от стопы. На схеме показана конфигурация изучаемого объекта справа от оси симметрии (оси глаза); R_c – радиус роговицы в отсчетном состоянии; R_b – радиус круга, на который опирается роговица; h – заглубление плунжера

В настоящей работе рассматривается роговица, нагруженная как отдельно вогнутым штампом (рис. 1, б), так и полным тонометром Шиотца (рис. 1, в), состоящим из вогнутого штампа (стопы) и цилиндрического стержня (плунжера), причем давление под нагружающей конструкцией считается заданным. Граничные условия при нагружении как вогнутым штампом, так и стопой вместе с плунжером – те же, что использовались нами ранее [2, б], с учетом представленной в [5] несколько иной формы для асимптотического условия в апексе, соответствующего допущению об ограниченности усилий. В рассматриваемой постановке деформация склерального сегмента не рассматривается. Как и ранее, считается, что при решении уравнений, описывающих роговицу, условие закрепленности роговицы на границе со склерой можно ставить при начальном радиусе этой границы. Такая постановка, очевидно, правомерна для изолированной роговицы, закрепленной по краю, но с достаточной

степенью точности обоснована и для живого глаза с учетом того факта, что склера намного превосходит роговицу по жесткости [4].

Отсчетное давление p_0 может выбираться произвольно. При переходе в результате однородной деформации от отсчетного состояния с давлением p_0 к отсчетному состоянию с давлением p'_0 можно в силу малости деформаций пренебрегать изменением радиуса роговицы R_c . Параметры ν_c и ζ при таком переходе не изменяются, а модуль растяжения E_c^* преобразуется по формуле [9]

$$E_c^*(p'_0) = E_c^*(p_0) + \frac{\zeta(1-\nu_c)R_c}{2}(p'_0 - p_0). \quad (2)$$

Если рассматривать ненагруженную извне роговицу (см. рис. 1, а), закрепленную по границе, и принять, что она имеет при давлении p_0 форму сферического сегмента, то при другом давлении p'_0 ее деформация уже не будет однородной и тензор жесткости перестанет быть однородным и изотропным. Однако в силу малости деформаций (при отсутствии внешнего нагружения и перемещений) неоднородностью деформаций можно пренебречь, и выбор отсчетных состояний, соответствующих разным давлениям, приведет к практически одинаковым результатам, если учесть преобразование модуля E_c^* по формуле (2), что было проверено и в пробных расчетах.

Далее будем использовать формально введенный модуль растяжения материала роговицы $E_c = E_c^* / \delta_c$, где $\delta_c = 0,5$ мм [4]. Для роговицы, имеющей стандартную толщину 0,5 мм, этот модуль совпадает со средним по толщине значением жесткости.

Численное решение осуществлялось методом стрельбы с использованием схемы Рунге–Кутты четвертого порядка. Геометрические параметры роговицы выбирались соответствующими «среднему» глазу: $R_c = 8$ мм, $R_b = 5,8$ мм [6], коэффициент Пуассона полагался равным $\nu_c = 0,45$. Радиусы кривизны двух компонентов тонометра Шиотца – стопы и плунжера, полагались равными 15 мм, а вес стопы – 11 г. Эти величины соответствуют стандартным значениям. Вес плунжера варьировался и в каждом случае указан: он равен 5,5 или 7,5 г.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И УСИЛИЙ (ДВУМЕРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ) В НАГРУЖЕННОЙ ТОНОМЕТРОМ РОГОВИЦЕ

Ранее мы не приводили данные о распределении деформаций и усилий (двумерных напряжений) в роговице при нагружении тонометром. Здесь мы воспроизводим эту информацию, поскольку, во-первых, она представляет непосредственный интерес в связи с возможностью появления в некоторых зонах избыточных или, наоборот, отрицательных нагрузок (с возможностью отрыва роговицы от тонометра), а во-вторых, позволяет убедиться в надежности сохранения условия малости деформаций. Соответствующая оценка ранее выполнялась для роговицы, нагруженной только внутренним давлением [8, 9].

Все распределения в этом разделе представлены в предположении, что при отсчетном давлении $p_0 = 12$ мм рт. ст. жесткость роговицы $E_c = 0,3$ МПа. Сравниваются линейно- и нелинейно-упругие (1) роговицы. В линейном случае выбор отсчетного давления, конечно, безразличен. В случае нелинейно-упругого поведения этот выбор существенно влияет на получаемые результаты. Однако в соответствии со

сказанным в предыдущем разделе результаты будут практически тождественными, если при изменении отсчетного давления жесткость роговицы при этом давлении (отсчетная жесткость) будет пересчитана по формуле (2). Все величины представлены функциями безразмерного параметра s , равного расстоянию точки роговицы от апекса по дуге образующей в отсчетном состоянии, отнесенному к радиусу роговицы R_c . Тонметрическое давление в этом разделе полагается равным $p_t = 28$ мм рт. ст. Приводимые ниже характерные значения параметра s различаются для линейного и нелинейного случаев, но совпадают с точностью до второго знака. Поскольку эти величины даются именно с такой точностью, они считаются приближенно равными для обоих случаев, что далее специально не оговаривается.

Рассмотрим сначала роговицу, нагруженную только вогнутым штампом – стопой. На рис. 2 представлены распределения деформаций и усилий, соответствующие этой стадии нагружения. Сравниваются случаи роговицы практически линейно-упругой ($\zeta = 1$) и нелинейно-упругой с параметром нелинейности $\zeta = 60$. Такое значение параметра нелинейности соответствует полученной нами ранее оценке для «средней» роговицы [8].

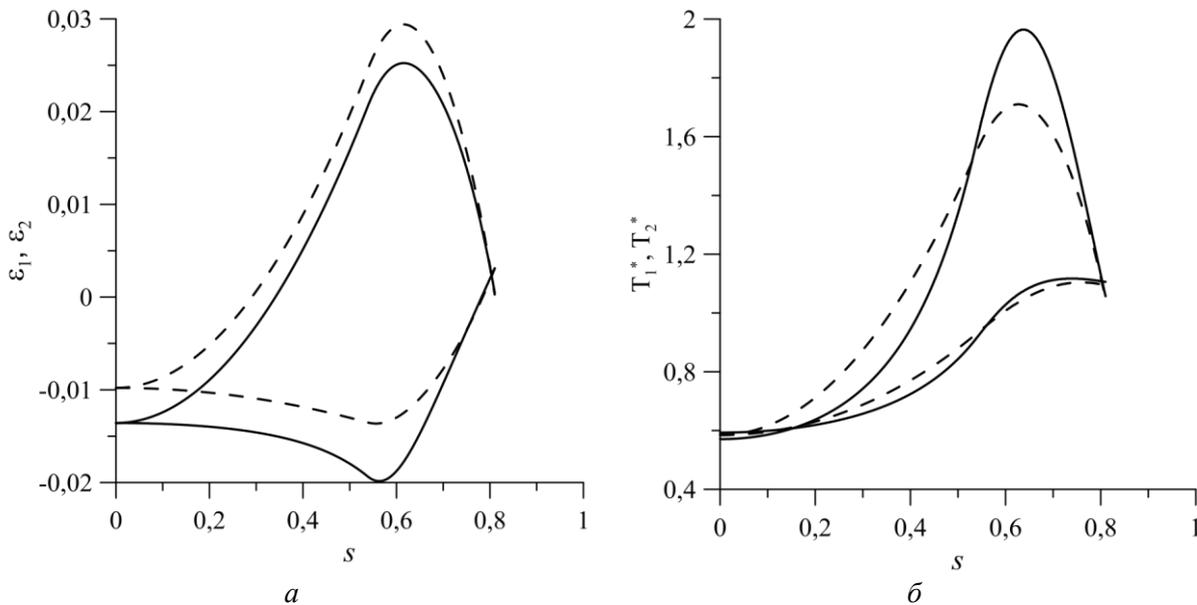


Рис. 2. Распределения при нагружении стопой деформаций ε_1 и ε_2 (а) и безразмерных усилий $T_1^* = T_1 / T_0$ и $T_2^* = T_2 / T_0$ (б). Сплошные кривые соответствуют нелинейному поведению с $\zeta = 60$, пунктирные – практически линейному ($\zeta = 1$). Нижние кривые на каждом рисунке изображают распределение переменных с индексом 1, верхние – с индексом 2

Из рис. 2 видно, что при нагружении стопой обе составляющие деформации в апексе отрицательны (т.е. по сравнению с ненагруженным состоянием роговица сжата и в обоих направлениях, и по площади), а с удалением от апекса под стопой меридиональная деформация ε_1 продолжает падать, а окружная ε_2 начинает расти. По мере удаления меридиональная деформация сжатия с избытком компенсируется деформацией растяжения в окружном направлении, что приводит к поверхностному растяжению в сравнении с ненагруженным тонометром состоянием. Что касается тензора усилий (двумерных напряжений), то обе его компоненты при этом растут, переходя от сжатия (в апексе) к растяжению. Вскоре после отрыва роговицы от стопы

(точка A , $s \approx 0,54$) меридиональная деформация начинает расти, а окружная – уменьшаться (вместе с окружными усилиями). Меридиональные же усилия продолжают рост. Учет нелинейности приводит к некоторому уменьшению всех деформаций и возрастанию максимального окружного усилия, лишь незначительно влияя на распределения меридионального.

Представленные на рис. 2 распределения демонстрируют, что деформации при рассматриваемом нагружении остаются малыми, не превосходя по модулю 0,03. Сжатие роговицы в окрестности апекса не столь велико, чтобы привести к появлению сжимающих напряжений. Наиболее значительные растягивающие напряжения – окружные в области отрыва от стопы – достигают двукратного уровня в сравнении с ненагруженной тонометром роговицей при учете нелинейности. В случае роговицы с линейными свойствами этот максимум значительно ниже (при рассмотренных значениях параметров его рост за счет нелинейности – около 20%).

Рассмотрим теперь, какие изменения в картину распределения деформаций и усилий вносит опускание на нагруженную стопой роговицу плунжера весом $G = 7,5$ г.

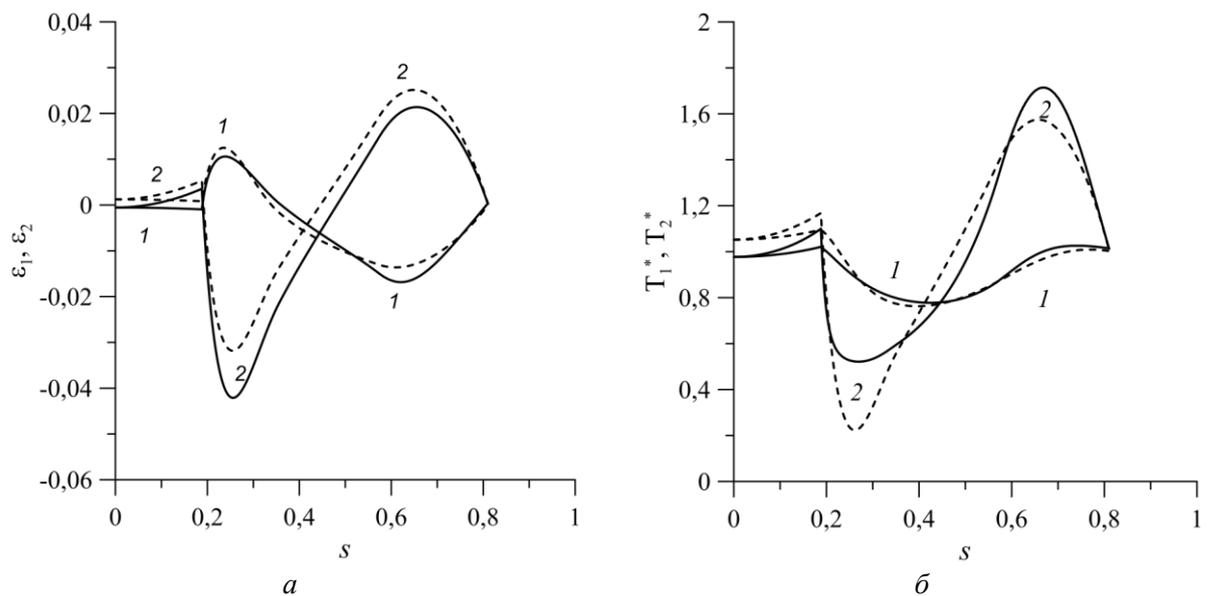


Рис. 3. Распределения при нагружении тонометром Шиотца деформаций ε_1 и ε_2 (а) и безразмерных усилий $T_1^* = T_1/T_0$ и $T_2^* = T_2/T_0$ (б). Сплошные кривые соответствуют нелинейному поведению с $\zeta = 60$, пунктирные – практически линейному ($\zeta = 1$). Номера кривых на каждом рисунке соответствуют индексам изображенных на нем переменных

Из рис. 3 видно, что установка плунжера ведет к существенной перестройке напряженно-деформированного состояния роговицы. Теперь по выходе из-под плунжера ($s \approx 0,19$) имеет место резкое сжатие в окружном направлении, сопровождающееся существенно менее значительным растяжением в меридиональном. Таким образом, в узкой зоне свободной роговицы между плунжером и стопой формируется область поверхностного сжатия с максимумом окружной деформации сжатия вблизи точки $s \approx 0,28$, где угол между нормалью к роговице и ее осью меняет знак. И меридиональные, и окружные усилия в этой зоне по мере удаления от плунжера падают, меридиональные умеренно, а окружные значительно. Дальнейшее изменение деформаций как под стопой (участок AB ; $s \approx 0,3 \div 0,54$), так и по выходе из-под нее (снизу) качественно сходно с их изменением в присутствии одной стопы.

Окружные деформации под стопой и сразу по выходе из-под нее растут, а начиная с $s \approx 0,65$ до границы роговицы падают, меридиональные, наоборот, падают под стопой и растут по выходе. Поверхностное сжатие постепенно сменяется поверхностным растяжением. Сходно также поведение в этих областях окружных усилий: они растут под стопой и падают по выходе. А вот меридиональные усилия ведут себя иначе, чем под отдельной стопой: они меняются под ней немонотонно: сначала продолжают падение и лишь затем в некоторой точке под стопой начинают возрастать; возрастание продолжается и в примыкающей к границе зоне свободной роговицы.

Наиболее опасной в смысле приближения к значениям параметров, при которых возможна потери устойчивости, оказывается область малых окружных усилий растяжения в области свободной роговицы между плунжером и стопой. Учет нелинейности влияет на кривые, представленные на рис. 3, незначительно. Единственное исключение имеет место как раз для окружного усилия в упомянутой области вблизи верхнего контакта со стопой: минимальное усилие T_2 увеличивается при учете нелинейности почти втрое – от $0,2 T_0$ до $0,6 T_0$. Анализ напряженного состояния в «опасной» области при разных значениях параметров, в частности тонометрического давления, требует специального исследования.

Деформации остаются, как и в случае нагружения только стопой, малыми, не превосходя по модулю 0,04. Диапазон изменения меридиональных усилий теперь весьма узок: $0,8 T_0 \div T_0$, окружных – заметно шире: $0,6 T_0 \div 1,7 T_0$ (для нелинейного случая).

ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ РОГОВИЦЫ НА ЗАВИСИМОСТЬ ГЛУБИНЫ ПОГРУЖЕНИЯ ПЛУНЖЕРА ОТ ТОНОМЕТРИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Стандартная процедура обработки показаний тонометра Шиотца включает в себя использование эмпирической зависимости тонометрического давления p_t от веса плунжера G и глубины его погружения под стопу h . В этом соотношении, полученном Фриденвальдом на основе экспериментов с мертвым глазом, не присутствуют какие-либо другие параметры, в частности жесткость роговицы. Оно имеет вид [6, 16]

$$p_t = \frac{G}{\zeta_1 + \zeta_2 h}, \quad (3)$$

где $\zeta_1 = 0,107$, $\zeta_2 = 0,0138$. Формула (3) предполагает фиксированные внесистемные единицы измерения: G измеряется в граммах силы, p_t – в миллиметрах ртутного столба, h – в единицах Шиотца (1 ед. Шиотца = 50 мкм).

В [6] на основе нашей модели было показано, что для линейно-упругой роговицы зависимость (3) в самом деле дает верную, хотя и грубую, оценку тонометрического давления, но для более точных оценок влияние жесткости роговицы и геометрических параметров глаза все же необходимо учитывать. Рассмотрим, каким образом на связь между заглублением плунжера и тонометрическим давлением влияет нелинейность упругого отклика роговицы.

На рис. 4 представлены кривые $p_t(h)$ при одной и той же отсчетной жесткости $E_c = 0,3$ МПа и разной степени нелинейности, включая практически линейное поведение ($\zeta = 1$). Видно, что учет нелинейности приводит к существенным поправкам лишь в области низких тонометрических давлений – заметно ниже 20 мм рт. ст. для $G = 5,5$ г и 25 мм рт. ст. для $G = 7,5$ г. Столь низкие тонометрические давления в клинике встречаются достаточно редко, однако их нельзя исключать

для конкретных пациентов. В этой области использование линейной модели (и тем более формулы (3)) приводит к заметному занижению значения тонометрического давления: абсолютная ошибка по сравнению с результатами нелинейной модели при $\zeta = 60$ может достигать 3 мм рт. ст., а относительная (учитывая малость самих давлений) – 20%.

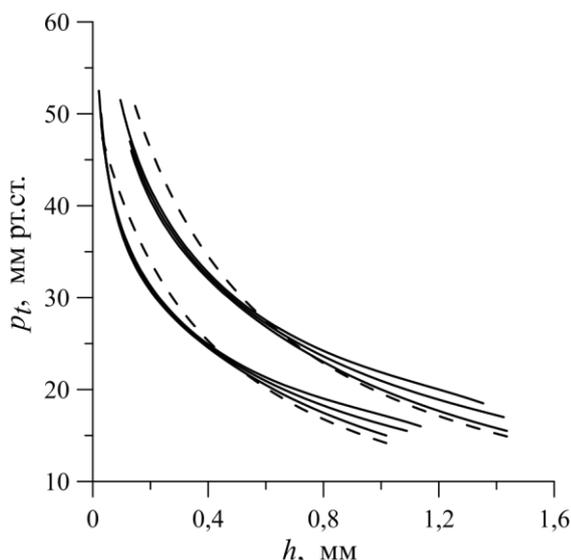


Рис. 4. Зависимость тонометрического давления p_t от заглубления плунжера h для двух стандартных значений его веса при различных значениях параметра нелинейности. Верхнее семейство кривых соответствует весу плунжера $G = 7,5$ г, нижнее – весу $G = 5,5$ г. В каждом семействе пунктирная кривая изображает зависимость $p_t(h)$, вычисляемую по стандартной формуле (3) для соответствующего веса плунжера, а сплошные кривые соответствуют значениям параметра нелинейности $\zeta = 1, 30, 60$. В области низких тонометрических давлений, где кривые с разными ζ заметно расходятся, значение ζ тем больше, чем более кривая удаляется от пунктирной. При отсчетном давлении $p_0 = 12$ мм рт. ст. жесткость роговицы $E_c = 0,3$ МПа

На рис. 5 зависимость тонометрического давления от заглубления плунжера изображена для различных отсчетных жесткостей роговицы при $\zeta = 1$ (практически линейное поведение) и $\zeta = 60$ (среднее значение параметра нелинейности) в области заглублений, соответствующих, как правило, наблюдаемым при измерениях в клинике. Присутствующие на рис. 4 слишком большие заглубления (низкие тонометрические давления) здесь исключены. Поправка, вносимая нелинейностью, во всех случаях мала; она несколько выше при бóльших жесткостях роговицы. При некотором значении тонометрического давления, лежащем между 20 и 30 мм рт. ст. (выше для бóльшего веса плунжера), кривые, соответствующие разным жесткостям, пересекаются. С возрастанием жесткости и параметра нелинейности они постепенно приближаются к стандартной зависимости. В случае веса плунжера $G = 5,5$ г при $E_c = 0,6$ МПа и $\zeta = 60$ достигается весьма высокая степень сближения, причем дальнейшее увеличение параметра нелинейности кривую $p_t(h)$ практически уже не сдвигает. Для плунжера весом $G = 7,5$ г степень близости расчетной и стандартной кривых остается существенно меньшей. Максимальная близость при обоих весах плунжера имеет место при давлениях меньших 25 мм рт. ст.

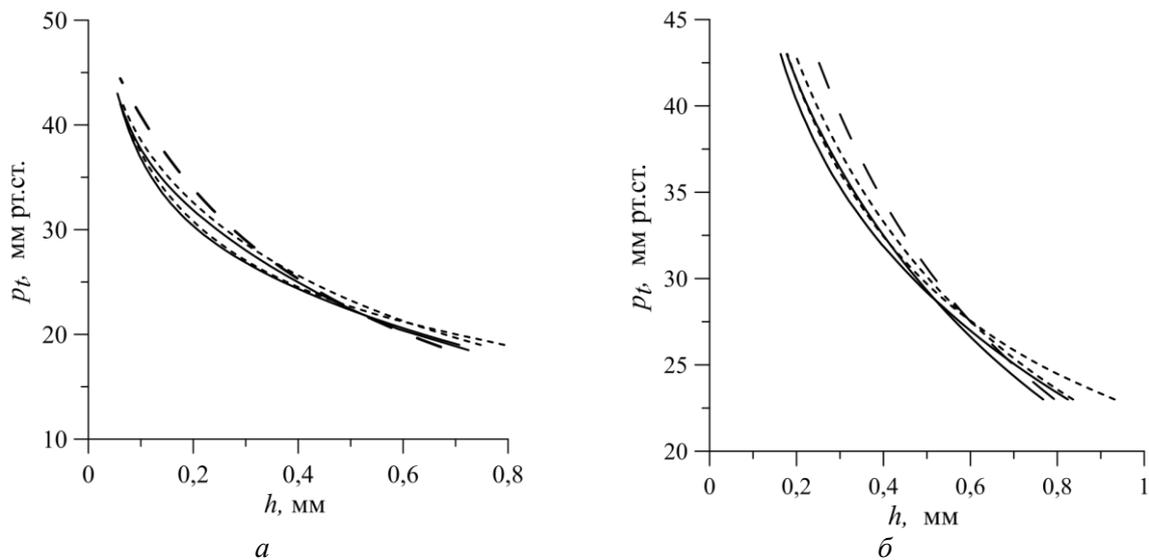


Рис. 5. Зависимость тонометрического давления p_t от заглупления плунжера h при разных отсчетных жесткостях роговицы и значениях параметра нелинейности. Вес плунжера $G = 5,5$ (а) и $7,5$ г (б). Сплошные кривые соответствуют $\zeta = 1$ (практически линейное поведение), пунктирные – $\zeta = 60$. Приведены кривые с отсчетной жесткостью $0,2$ и $0,6$ МПа. Левее точки пересечения кривых с разной жесткостью жесткость меньше для нижних кривых ($0,2$ МПа) и больше для верхних ($0,6$ МПа), правее – наоборот. Пунктир с длинными штрихами соответствует стандартному расчету по формуле (3)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная нами ранее модель роговицы глаза, учитывающая нелинейность ее упругого поведения, применена к исследованию напряженно-деформированного состояния роговицы глаза, нагруженного тонометром Шиотца. Исследовано как нагружение только стопой, так и при собственно тонометрии (когда помимо стопы на глаз накладывается еще плунжер). Изучено влияние нелинейности на зависимость между тонометрическим давлением и глубиной погружения плунжера под стопу.

Показано, что при нагружении роговицы как стопой, так и совместно стопой и плунжером выполняется условие малости деформаций, что означает возможность применения разработанной нами [9] модели, учитывающей конечность лишь смещений (но не деформаций) и физическую нелинейность определяющих соотношений. Имеются как области, где растягивающие напряжения могут значительно превышать таковые в роговице, не нагруженной тонометром, так и зоны, где они заметно уменьшаются, причем учет нелинейности дает некоторое уменьшение первых и значительное увеличение вторых: возможность появления сжимающих напряжений становится менее вероятной.

Оказалось, что при достаточно больших тонометрических давлениях нелинейность практически не влияет на зависимость измеряемого давления от заглупления плунжера, однако неучет нелинейности приводит к заметному занижению оценки тонометрического давления по заглуплению для малых давлений – ниже $20\text{--}25$ мм рт. ст. Это имеет место независимо от величины отсчетной жесткости роговицы. Учет нелинейности, как и увеличение жесткости, лишь незначительно сдвигает кривые $p_t(h)$ в сторону зависимости, стандартно используемой при обработке

результатов измерения. Тем не менее для веса плунжера $G = 5,5$ г такой сдвиг позволяет заметно приблизиться к стандартной зависимости. Однако для веса $G = 7,5$ г расхождение остается значительным.

Дальнейшее исследование предполагает изучение влияния нелинейно-упругого поведения роговицы на собственно тонометрию, т.е. на определение по измеряемому непосредственно геометрическому показателю (заглублению плунжера) истинного внутриглазного давления и на интерпретацию данных дифференциальной тонометрии, т.е. последовательного нагружения глаза тонометром Шиотца с двумя плунжерами разного веса.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках госпрограммы АААА-А19-119012990119-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 1. – С. 24–39.
2. Любимов Г.А., Моисеева И.Н., Штейн А.А. Исследование свойств двухкомпонентной механической модели глазного яблока и возможности ее использования при практической оценке механических свойств глаза человека // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2014. – № 6. – С. 5–16.
3. Любимов Г.А., Моисеева И.Н., Штейн А.А., Иомдина Е.Н., Арчаков А.Ю., Киселева О.А. О возможности использования параметров, характеризующих упругие свойства корнеосклеральной оболочки глаза, для диагностики ее измененного механического состояния при первичной открытоугольной глаукоме // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 1. – С. 8–18.
4. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Анализ зависимости давление – объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 5. – С. 3–15.
5. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Математическое моделирование аппланационного нагружения глазного яблока с учетом нелинейности упругих свойств роговицы // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 3. – С. 272–281.
6. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Оценка корректности стандартной методики расчета внутриглазного давления при тонометрии по Шиотцу // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т. 19, № 3. – С. 243–257.
7. Моисеева И.Н., Штейн А.А., Любимов Г.А. Оценка упругих свойств глаза с помощью дифференциальной тонометрии тонометром Шиотца: анализ измерительной процедуры на основе двухкомпонентной математической модели // Биофизика. – 2016. – Т. 61, № 6. – С. 1219–1227.
8. Моисеева И.Н., Штейн А.А., Любимов Г.А. Оценка упругих характеристик глазного яблока по отклику энуклеированного глаза на введение заданных объемов жидкости // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 4. – С. 412–429.
9. Штейн А.А., Моисеева И.Н., Любимов Г.А. Математическая модель роговицы глаза с учетом экспоненциальной нелинейности ее упругих свойств при условии геометрической малости деформаций // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 375–390.
10. Anderson K., El-Sheikh A., Newson T. Application of structural analysis to the mechanical behaviour of the cornea // J. Roy. Soc. Interface. – 2004. – Vol. 1, no. 1. – P. 3–15.
11. Bryant M.R., McDonnell P.J. Constitutive laws for biomechanical modeling of refractive surgery // J. Biomech. Eng. – 1996. – Vol. 118, no. 4. – P. 473–481.
12. Clark J.H. A Method for measuring elasticity in vivo and results obtained on the eyeball at different intraocular pressures // Am. J. Physiol. – 1932. – Vol. 101. – P. 474–481.
13. Dyk D.W., Miller K.M. Mechanical model of human eye compliance for volumetric occlusion // J. Cataract Refract. Surg. – 2018. – Vol. 44. – P. 231–236.
14. Elsheikh A., Alhasso D., Rama P. Biomechanical properties of human and porcine corneas // Exp. Eye Res. – 2008. – Vol. 86. – P. 783–790.
15. Friedenwald J.S. Contribution to the theory and practice of tonometry // Am. J. Ophthalmol. – 1937. – Vol. 20, no. 10. – P. 985–1024.

16. Friedenwald J.S. Some problems in the calibration of tonometers // Am. J. Ophthalmol. – 1948. – Vol. 31. – P. 935–944.
17. Friedenwald J.S. Standardization of Tonometers: Decennial Report by the Committee on Standardization of Tonometers. – Omaha: Am. Acad. Ophthalmol. Otolaryngol., 1954. – 177 p.
18. Macri F.J., Wanko T., Grimes P.A. The elastic properties of the human eye // AMA Arch. Ophthalmol. – 1958. – Vol. 60, no. 6. – P. 1021–1026.
19. McBain E.H. Tonometer calibration. II. Ocular rigidity // Arch. Ophthalmol. – 1958. – Vol. 60. – P. 1080–1091.
20. Moses R.A. Theory of the Schiøtz tonometer and its empirical calibration // Trans. Am. Ophthalmol. Soc. – 1971. – Vol. 69. – P. 494–562.
21. Ridley F. The intraocular pressure and drainage of the aqueous humour // Brit. J. Exp. Pathol. – 1930. – Vol. 11, no. 4. – P. 217–240.

INFLUENCE OF NONLINEARITY OF THE ELASTIC PROPERTIES OF THE CORNEA ON ITS DEFORMATION WHEN LOADING THE EYE WITH A SCHIØTZ TONOMETER

I.N. Moiseeva, A.A. Stein (Moscow, Russian Federation)

The effective model previously developed by the authors for a nonlinear elastic cornea of the eye is applied to the study of the cornea stress-strain state when loaded with a concave stamp and the Schiøtz tonometer, the structure composed of independently moving concave stamp and rod (plunger). It is shown that in both cases the condition of geometrical smallness of strains is satisfied. Allowance for nonlinearity leads to a significant increase in the minimum values of tensile stresses: the possibility of the appearance of compressive stresses becomes less likely. The effect of nonlinearity on the relationship between the directly measured characteristic of corneal deformation, the depth of the impression produced on the cornea by the plunger, and the pressure under the tonometer (tonometric pressure) is studied. It turned out that at sufficiently high tonometric pressures, nonlinearity practically does not affect this dependence; however, neglecting the nonlinearity leads to a noticeable underestimation of the tonometric pressure from the impression depth for low pressures (below 20–25 mm Hg). This is the case regardless of the stiffness of the cornea. Allowance for nonlinearity, as well as an increase in stiffness, slightly shifts the pressure–depth curve towards the dependence that is commonly used in the processing of measurement results. This convergence is more noticeable for the lighter plunger weight.

Key words: eye, cornea, nonlinearity of elastic properties, tonometry, Schiøtz tonometer, mathematical models.

Получено 19 июля 2021