

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО КОЖНОГО ПОКРОВА

И.В. Богачев, Р.Д. Недин

Южный федеральный университет, Российская Федерация, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а,
e-mail: bogachev89@yandex.ru

Аннотация. Представлена модель кожного покрова в виде неоднородного по толщине вязкоупругого слоя, в свою очередь состоящего из трех слоев (подкожный жир, дерма и эпидермис). Считалось, что в слое имеется неоднородное одноосное предварительное напряжение, возникшее как результат релаксации после проведения операции по лифтингу (подтяжке) кожи. Постановка задачи записана на основе общей постановки задачи об установившихся колебаниях неоднородного тела с учетом предварительного напряженно-деформированного состояния. Принцип соответствия в постановке задачи позволил заменить упругие модели на комплексные аналоги, соответствующие модели стандартного вязкоупругого тела. Обратная задача заключалась в определении механических характеристик (комплексных аналогов параметров Ламе) и предварительного напряжения с использованием информации об акустическом отклике для периодического зондирующего неинвазивного воздействия на поверхности слоя. Исходная задача с применением преобразования Фурье по продольной координате сведена к решению ряда более простых задач в трансформантах. На основе комбинирования различных режимов нагружения построена двухэтапная схема идентификации механических свойств и предварительного напряжения. На первом этапе для идентификации с помощью итерационного подхода и метода регуляризации Тихонова последовательно определяются комплексные аналоги параметров Ламе. На втором этапе, используя функции, найденные на первом этапе, с применением построенного проекционного метода определили предварительные напряжения. Применение разработанного подхода к рассматриваемой задаче о коже проиллюстрировано вычислительными экспериментами, показавшими эффективность созданных методик в диапазонах, соответствующих реальным значениям искомых параметров. Дополнительно даны рекомендации по выбору частотных диапазонов для идентификации на каждом из этапов.

Ключевые слова: кожный покров, предварительные напряжения, вязкоупругость, акустический метод, обратные задачи, идентификация, комплексные модули.

ВВЕДЕНИЕ

В современных исследованиях [17–18] подтверждается наличие предварительных напряжений (ПН) [6, 19] во многих биологических тканях. Причинами возникновения ПН могут быть как ростовые деформации, происходящие, например, в костной или хрящевой тканях, так и последствия травм и хирургических операций в мягких тканях. В качестве примера естественных предварительных

напряжений в биологических тканях можно рассматривать линии Лангера, являющиеся линиями естественного натяжения кожи [14]. Их наличие объясняется структурой кожи, содержащей ненатянутые коллагеновые волокна, которые при натяжении деформируются и частично распрямляются, обеспечивая подвижность кожи, например, при движениях мышц и конечностей.

Современные экспериментальные данные по исследованию деформации кожного покрова [14] позволяют сделать вывод, что его поведение соответствует вязкоупругому композиционному материалу, состоящему из неоднородных слоев эпидермиса, дермы и подкожного жира, характеристики которых различаются. В работах [2, 10] подробно описана методика практического измерения упругих модулей кожного покрова в результате проведения экспериментов по одноосному и двуосному растяжению образцов кожного покрова, а также по релаксации и ползучести. Собранные данные для различных участков кожного покрова, измерения проводились для образцов кожи пациентов разного возраста. В работе [1] подробно описан и экспериментально проиллюстрирован процесс релаксации кожного покрова при больших деформациях. Статья [15] посвящена, в том числе, исследованию влияния предварительных деформаций на восстановление кожного покрова после операций.

Что касается ПН, возникающих в кожном покрове после операционных вмешательств, то в качестве примера можно привести операцию лифтинга, рассмотренную в работе [13]. В рамках лифтинга, то есть подтяжки кожи, происходит сепарирование лоскута кожного покрова, который затем натягивается в одном направлении, и избыток кожи иссекается, после чего разрез ушивается. При этом в процессе релаксации остаточные (предварительные) напряжения выходят на определенный уровень, который необходимо контролировать на различных стадиях заживления, чтобы не допустить омертвления кожи вследствие нарушения кровотока (при чрезмерном натяжении) либо провисания (при недостаточном).

Таким образом, отметим, что для качественной диагностики состояния кожного покрова, в частности, в послеоперационный период необходима разработка уточненных моделей, учитывающих неоднородность, реологические свойства и возможное наличие ПН. При этом для исследования живой кожной ткани у пациента необходимо использование неинвазивных методов, например методов акустического (ультразвукового) зондирования.

Целями данной работы являются:

- исследование деформаций кожного покрова, моделируемого вязкоупругим неоднородным слоем, в свою очередь состоящим из трех слоев, с учетом ПН;
- разработка методики идентификации механических характеристик кожи и предварительных напряжений на основе неинвазивного акустического подхода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для вывода постановки задачи о колебаниях предварительно напряженного вязкоупругого слоя, моделирующего кожный покров, в данной работе будем использовать линейризованную постановку задачи об установившихся колебаниях предварительно напряженно-деформированного анизотропного тела [6]. Ввиду того, что тело нагружено периодически меняющейся нагрузкой $qe^{-i\omega t}$, уравнения колебаний и определяющие соотношения после отделения временного множителя примут вид [4, 7]:

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0; \quad (1)$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}^0 \sigma_{mj} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0. \quad (2)$$

В формуле (2) функции σ_{mj}^0 описывают предварительные напряжения; величины без индекса — компоненты соответствующих добавочных векторов и тензоров: u_i — компоненты вектора перемещений, σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений Кирхгофа; T_{ij} — компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы; ρ — плотность.

Будем рассматривать кожный покров как изотропный слой, занимающий область $S = \{x_1, x_3 \in (-\infty, \infty), x_2 \in [0, H]\}$ в условиях плоской деформации. Тогда у вектора смещений ненулевыми являются компоненты $u_1 = u_1(x_1, x_2, \omega)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, \omega)$. Исходя из реальной конфигурации кожного покрова будем считать, что исходный слой состоит из трех составных слоев, толщины которых известны, и их механические характеристики являются функциями поперечной координаты x_2 .

Также ввиду того, что наиболее характерным в рассматриваемом случае является одноосное сжимающее поле ПН, определяющие соотношения (2) можно записать в форме

$$\begin{aligned} T_{11} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1} + \sigma^0 u_{1,1}; \\ T_{22} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2}; \\ T_{12} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), T_{21} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma^0 u_{2,1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции $\lambda(x_2), \mu(x_2)$ характеризуют законы изменения параметров Ламе.

В качестве граничных условий будем рассматривать модельные условия жесткого защемления нижней границы слоя, как прикрепления кожного покрова, и нагружения нормальной нагрузкой $\mathbf{q} = (q_1(x_1), q_2(x_1), 0)$ на верхней границе:

$$\begin{aligned} u_1|_{x_2=0} = u_2|_{x_2=0} &= 0; \\ T_{12}|_{x_2=H} = q_1(x_1), T_{22}|_{x_2=H} &= q_2(x_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Для описания вязкоупругих свойств кожного покрова используем модель стандартного вязкоупругого тела [9]. Применяя принцип соответствия [16] к определяющим соотношениям теории упругости (3), функции параметров Ламе $\lambda(x_2)$ и $\mu(x_2)$ заменим на функции комплексных модулей $\lambda^*(x_2, i\omega) = \frac{i n \omega \lambda_2(x_2) + \lambda_1(x_2)}{1 + i n \omega}$,

$\mu^*(x_2, i\omega) = \frac{i n \omega \mu_2(x_2) + \mu_1(x_2)}{1 + i n \omega}$, зависящих от частоты колебаний. Введенные здесь величины: $\lambda_1(x_2), \mu_1(x_2)$ и $\lambda_2(x_2), \mu_2(x_2)$ — длительные и мгновенные модули соответственно, n — время релаксации, являются параметрами, описывающими модель.

Постановка обратной задачи [5] заключается в идентификации механических характеристик кожного покрова (функций длительных и мгновенных модулей $\lambda_1(x_2), \mu_1(x_2)$ и $\lambda_2(x_2), \mu_2(x_2)$, входящих в состав комплексных аналогов параметров Ламе) и предварительного напряжения по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на поверхности слоя в заданном частотном диапазоне:

$$u_1|_{x_2=H} = f_1(x_1, \omega), \quad u_2|_{x_2=H} = f_2(x_1, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (5)$$

При этом форма, вид и характер зондирующего нагружения, описываемого граничными условиями (4), в эксперименте может варьироваться.

Ввиду специфики рассматриваемой задачи для кожного покрова плотность ρ и параметр времени релаксации n считались постоянными и известными величинами.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ

Для моделирования предварительного напряжения рассмотрим нестационарную задачу об определении напряженно-деформированного состояния кожного покрова в начальном состоянии (до операции, без ПН). Будем рассматривать постановку, характерную для пластической операции лифтинга, когда реализуется одноосное растяжение сепарированного лоскута, после которого фиксируется деформация натянутого лоскута кожи (с удалением излишков и ушиванием) и затем происходит процесс релаксации [13].

В соответствии с моделью стандартного вязкоупругого тела [9] определяющие соотношения, связывающие функции напряжений и деформаций, имеют вид

$$E_1 n \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + E_2 \varepsilon = n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma. \quad (6)$$

При этом в рассматриваемом случае, как уже отмечалось, величины мгновенного и длительного модулей $E_1 = E_1(x_2)$ и $E_2 = E_2(x_2)$ являются функциями поперечной координаты. С функциями $\lambda_1(x_2), \mu_1(x_2)$ и $\lambda_2(x_2), \mu_2(x_2)$ они связываются по обычным формулам для изотропного тела: $E_i = \mu_i (3\lambda_i + 2\mu_i) / (\lambda_i + \mu_i)$.

При моделировании процесса релаксации при фиксированной деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$ соотношение (6) примет вид

$$n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = E_2 \varepsilon_0. \quad (7)$$

Начальным условием в данном случае будет значение растягивающей нагрузки

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_1. \quad (8)$$

Общее решение задачи (7), (8) имеет вид

$$\sigma(x_2, t) = \frac{E_2(x_2)\varepsilon_0}{n} + e^{-nt} \left(\sigma_1 - \frac{E_2(x_2)\varepsilon_0}{n} \right). \quad (9)$$

Затем в рассматриваемой ситуации по истечении достаточно длительного промежутка времени, $t \rightarrow \infty$, напряжение в соответствии с решением (9) релаксирует до уровня, определяемого длительным модулем $E_2(x_2)$, временем релаксации n и величиной начальной деформации ε_0 :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(x_2, t) = \frac{E_2(x_2)\varepsilon_0}{n} = \sigma^0(x_2), \quad (10)$$

значение которого затем используется в соотношении (3) для слоя с ПН.

ПОСТРОЕНИЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения задачи воспользуемся преобразованием Фурье [11] по переменной x_1 , общий вид которого представлен ниже:

$$Z(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x_1, x_2) e^{-i\alpha x_1} dx_1. \quad (11)$$

Запишем уравнения задачи (1)–(3) в каноническом виде в трансформантах:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12,2} &= \alpha i \lambda^* \tilde{T}_{22} / (\lambda^* + 2\mu^*) + \left(\alpha^2 \left(4\mu^* (\lambda^* + \mu^*) / (\lambda^* + 2\mu^*) - \sigma^0 \right) - \rho \omega^2 \right) \tilde{u}_1; \\ \tilde{T}_{22,2} &= i\alpha \tilde{T}_{12} - (\rho \omega^2 - \alpha^2 \sigma^0) \tilde{u}_2; \\ \tilde{u}_{2,2} &= \tilde{T}_{22} / (\lambda^* + 2\mu^*) + i\alpha \lambda^* \tilde{u}_1 / (\lambda^* + 2\mu^*); \\ \tilde{u}_{1,2} &= \tilde{T}_{12} / \mu^* + i\alpha \tilde{u}_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия (4) в трансформантах примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1|_{x_2=0} &= \tilde{u}_2|_{x_2=0} = 0; \\ \tilde{T}_{22}|_{x_2=H} &= \tilde{q}, \quad \tilde{T}_{12}|_{x_2=H} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Проведем обезразмеривание задачи (12)–(13) с помощью введения следующих обозначений для параметров и переменных: $x_2 = H\hat{x}_2$, $x_1 = H\hat{x}_1$, $\alpha = H\hat{\alpha}$, $u_1 = iHU_1$, $u_2 = HU_2$, $T_{12} = i\mu_0\hat{T}_{12}$, $T_{22} = \mu_0\hat{T}_{22}$, $\lambda^* = \mu_0\lambda$, $\mu^* = \mu_0\mu$, $\sigma^0 = \mu_0\hat{\sigma}^0$, $\rho = \rho_0\hat{\rho}$, $\mu_0 = \mu_1(H)$, $\rho_0 = \rho(H)$, $q_i(x_1) = HP_i(\hat{x}_1)$, $\omega^2 = \mu_0\kappa^2/H^2\rho_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{T}}_{12,2} &= \hat{\alpha}\hat{\lambda}\tilde{\hat{T}}_{22} / (\lambda + 2\mu) + \left(\hat{\alpha}^2 \left(4\mu(\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) - \hat{\sigma}^0 \right) - \hat{\rho}\kappa^2 \right) \tilde{U}_1; \\ \tilde{\hat{T}}_{22,2} &= -\hat{\alpha}\tilde{\hat{T}}_{12} - (\hat{\rho}\omega^2 - \hat{\alpha}^2\hat{\sigma}^0) \tilde{U}_2; \\ \tilde{U}_{1,2} &= \tilde{\hat{T}}_{12} / \mu + \hat{\alpha}\tilde{U}_2; \\ \tilde{U}_{2,2} &= \tilde{\hat{T}}_{22} / (\lambda + 2\mu) - \hat{\alpha}\lambda\tilde{U}_1 / (\lambda + 2\mu); \\ \tilde{U}_1|_{x_2=0} &= \tilde{U}_2|_{x_2=0} = 0; \\ \tilde{\hat{T}}_{12}|_{x_2=1} &= \tilde{P}_1, \quad \tilde{\hat{T}}_{22}|_{x_2=1} = \tilde{P}_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее для удобства записи знак " \wedge " будем опускать.

Представим функции, входящие в состав задачи (14), согласно методике, предложенной в [6], в виде разложений по параметру преобразования Фурье α , общий вид которых записан ниже:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}^{(0)} + \alpha\tilde{Z}^{(1)} + \alpha^2\tilde{Z}^{(2)} + \dots \quad (15)$$

Затем выпишем задачи при различных степенях α :

$$\begin{aligned}
\alpha^0 : \tilde{T}_{12,2}^{(0)} &= -\rho\kappa^2 \tilde{U}_1^{(0)}, \quad \tilde{T}_{22,2}^{(0)} = -\rho\kappa^2 \tilde{U}_2^{(0)}; \\
\tilde{U}_{1,2}^{(0)} &= \tilde{T}_{12}^{(0)} / \mu^*, \quad \tilde{U}_{2,2}^{(0)} = \tilde{T}_{22}^{(0)} / (\lambda^* + 2\mu^*); \\
\tilde{U}_1^{(0)} \Big|_{x_2=0} &= \tilde{U}_2^{(0)} \Big|_{x_2=0} = 0; \\
\tilde{T}_{12}^{(0)} \Big|_{x_2=1} &= \tilde{P}_1^{(0)}, \quad \tilde{T}_{22}^{(0)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_2^{(0)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^1 : \tilde{T}_{12,2}^{(1)} &= \lambda^* \tilde{T}_{22}^{(0)} / (\lambda^* + 2\mu^*) + \rho\kappa^2 \tilde{U}_1^{(1)}; \\
\tilde{T}_{22,2}^{(1)} &= -\tilde{T}_{12}^{(0)} - \rho\kappa^2 \tilde{U}_2^{(1)}; \\
\tilde{U}_{1,2}^{(1)} &= \tilde{T}_{12}^{(1)} / \mu^* + \tilde{U}_2^{(0)}; \\
\tilde{U}_{2,2}^{(1)} &= \tilde{T}_{22}^{(1)} / (\lambda^* + 2\mu^*) - \lambda^* \tilde{U}_1^{(0)} / (\lambda^* + 2\mu^*); \\
\tilde{U}_1^{(1)} \Big|_{x_2=0} &= \tilde{U}_2^{(1)} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \tilde{T}_{12}^{(1)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_1^{(1)}, \quad \tilde{T}_{22}^{(1)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_2^{(1)}.
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^2 : \tilde{T}_{12,2}^{(2)} &= \lambda^* \tilde{T}_{22}^{(1)} / (\lambda^* + 2\mu^*) + (4\mu^* (\lambda^* + \mu^*) / (\lambda^* + 2\mu^*) - \sigma^0) \tilde{U}_1^{(0)} - \rho\kappa^2 \tilde{U}_1^{(2)}; \\
\tilde{T}_{22,2}^{(2)} &= -\tilde{T}_{12}^{(1)} + \sigma^0 \tilde{U}_2^{(0)} - \rho\kappa^2 \tilde{U}_2^{(2)}; \\
\tilde{U}_{1,2}^{(2)} &= \tilde{T}_{12}^{(2)} / \mu^* + \tilde{U}_2^{(1)}; \\
\tilde{U}_{2,2}^{(2)} &= \tilde{T}_{22}^{(2)} / (\lambda^* + 2\mu^*) - \lambda^* \tilde{U}_1^{(1)} / (\lambda^* + 2\mu^*); \\
\tilde{U}_1^{(2)} \Big|_{x_2=0} &= \tilde{U}_2^{(2)} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \tilde{T}_{12}^{(2)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_1^{(2)}, \quad \tilde{T}_{22}^{(2)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_2^{(2)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим задачи (16) при α^0 . Заметим, что в них не входит функция ПН σ^0 , однако относительно функций $\tilde{U}_i^{(0)}$ и $\tilde{T}_{i2}^{(0)}$ они являются несвязанными, и для них можно построить схему последовательного определения функций λ^* и μ^* , решая обратные задачи, подобные исследованным ранее в работе [3]. Для решения удобно последовательно рассмотреть два случая точечного нагружения:

$$P_1(x_1) = P\delta(x_1), \quad P_2(x_1) = 0; \tag{19}$$

$$P_1(x_1) = 0, \quad P_2(x_1) = P\delta(x_1), \tag{20}$$

где $\delta(x_1)$ – дельта-функция Дирака, при которой трансформанты функций нагружения не будут зависеть от параметра преобразования, что упрощает процедуру разложения по параметру α . В таком случае для решения обратных задач используется получаемая из условия (5) дополнительная информация вида

$$\tilde{U}_i^{(0)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{f}_i^{(0)}(\kappa). \tag{21}$$

Затем с применением метода линеаризации формулируется итерационный процесс, состоящий из решения прямых задач методом пристрелки [8] для текущих приближений искомых функций длительных и мгновенных модулей и последующего решения систем интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно поправок к искомым функциям с помощью метода регуляризации Тихонова [12]. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия малости величины невязки. Детальное описание схемы итерационного процесса приведено в [3].

Далее рассмотрим задачу (18) при α^2 в случае распределенной нагрузки

$$P_1(x_1) = 0, P_2(x_1) = \begin{cases} \text{const}, x_1 \in [-c, c]; \\ 0, x_1 \notin [-c, c]. \end{cases} \quad (22)$$

Нагрузка такого рода (нормальная к поверхности) является наиболее применимой для практической реализации. С другой стороны, ввиду четности, ее трансформанта Фурье также является четной вещественной функцией, соответственно, в разложении (15) для такой нагрузки ненулевыми будут только коэффициенты при четных степенях α . Следовательно, величины с индексом "(1)", являющиеся множителями при α^1 , обращаются в нуль. Тогда задача (18), так же как и задача (15), разделяется на две несвязанные задачи, при этом одна из них имеет нулевые граничные условия, а другая, записанная относительно трансформант функций перемещения, имеет вид

$$\begin{aligned} (\lambda^* + 2\mu^*)\tilde{U}_{2,2}^{(2)} \Big|_2 &= \sigma^0 \tilde{U}_2^{(0)} - \rho\kappa^2 \tilde{U}_2^{(2)}; \\ \tilde{U}_2^{(2)} \Big|_{x_2=0} &= 0, (\lambda^* + 2\mu^*)\tilde{U}_{2,2}^{(2)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Условие (5) о дополнительной информации для обратной задачи в данном случае примет форму:

$$\tilde{U}_2^{(2)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{f}_i^{(2)}(\kappa_s), \kappa_s \in [\kappa_-, \kappa_+]. \quad (24)$$

Заметим, что в задаче (23) функцию $\tilde{U}_2^{(0)}$ необходимо определять из решения прямой задачи (16) для нагрузки вида (22). Также обратная задача определения функции ПН σ^0 после подстановки соотношения (10) в уравнение (23) сводится к определению вещественного параметра начальной деформации ε_0 . Для этого воспользуемся модификацией разработанного ранее проекционного метода алгебраизации [20]. Выпишем слабую постановку задачи, введя функцию V_2 – поле возможных перемещений, скалярно домножив на нее уравнения (23) и воспользовавшись граничными условиями

$$\int_0^1 (\lambda^* + 2\mu^*)\tilde{U}_{2,2}^{(2)} V_{2,2} dx_2 - \kappa^2 \int_0^1 \tilde{U}_2^{(2)} V_2 dx_2 + \int_0^1 \frac{E_2 \varepsilon_0}{n} \tilde{U}_2^{(0)} V_2 dx_2 - \tilde{P}_2^{(2)} V_2(1) = 0. \quad (25)$$

Введем в рассмотрение φ_n – систему линейно независимых функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям задачи (23). Решение краевой задачи (23) будем искать в виде

$$\tilde{U}_2^{(2)}(x_2, \kappa) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i(\kappa) \varphi_i(x_2), \quad (26)$$

где комплексные коэффициенты a_i ($i=1..N$) зависят от частоты колебаний κ , слагаемое a_0 обеспечивает выполнение неоднородного граничного условия задачи (23) о нагружении на поверхности.

При подстановке представления (26) в соотношение (25) и выборе в качестве функции $V_2 = \varphi_n$ ввиду линейности его левой части по переменным U_2 и V_2 получим систему N линейных уравнений относительно коэффициентов $a_i(\kappa)$, общий вид которой представлен ниже:

$$\sum_{i=0}^N a_i A_m(\kappa) = \tilde{P}_2^{(2)} \varphi_n(1) - \varepsilon_0 \int_0^1 \frac{E_2}{n} \tilde{U}_2^{(0)} \varphi_n dx_2, \quad n = 1..N. \quad (27)$$

Затем полученная линейная система (27) решается относительно коэффициентов $a_i(\kappa)$. Таким образом, из разложения (26) получается выражение для $\tilde{U}_2^{(2)}(x_2, \kappa, \varepsilon_0)$, зависящее от частоты κ и искомого параметра ε_0 , которое затем подставляется в дополнительное условие (24) обратной задачи. Выбирая некоторое значение κ_m , из условия (24) получаем уравнение для определения ε_0 :

$$\tilde{U}_2^{(2)}(1, \kappa_m, \varepsilon_0) = f(\kappa_m). \quad (28)$$

Подводя итог, заметим, что идентификация всех искомым величин может проводиться в два этапа:

1. Идентификация функции комплексного модуля μ^* и последующая идентификация суммы модулей $\lambda^* + 2\mu^*$, по которой определяется комплексный модуль λ^* из задач (16), с использованием функций нагружений (19), (20) и дополнительной информации (21). Для решения используется итерационный процесс, позволяющий восстанавливать в том числе функции, имеющие разрывы, что характерно для рассматриваемой модели трехслойного кожного покрова.

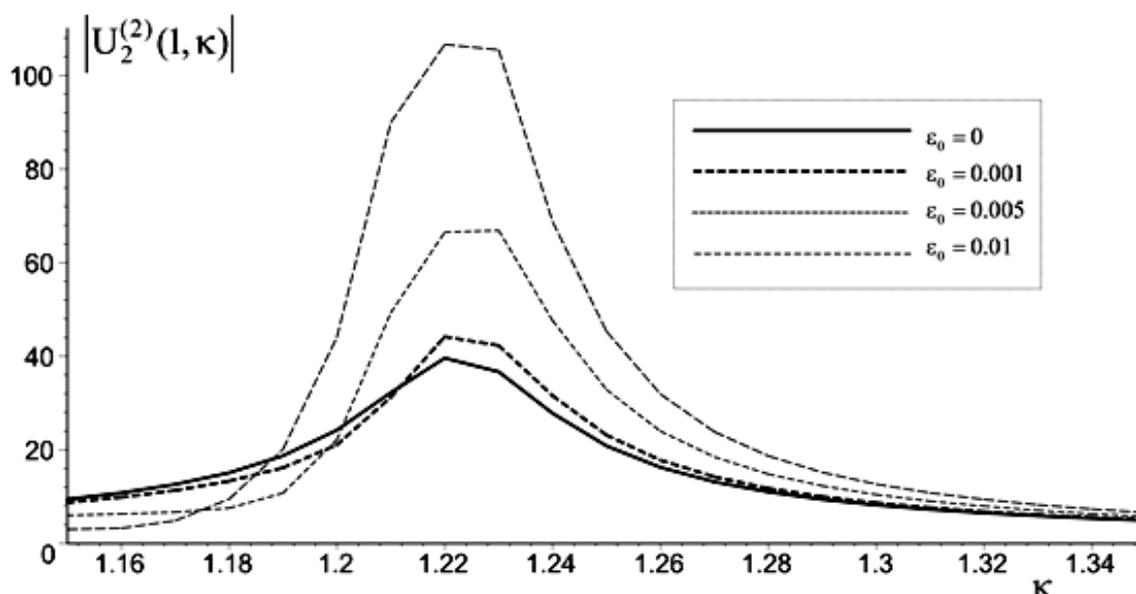
2. Идентификация функции σ^0 с использованием найденных на первом этапе функций комплексных модулей λ^*, μ^* или суммы $\lambda^* + 2\mu^*$. Задача сведена к определению вещественной величины начальной деформации, возникшей в результате эксперимента на релаксацию ε_0 . Идентификация основана на использовании зондирующей нагрузки вида (22) и дополнительной информации (24). Для решения адаптирован специальный проекционный метод.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Как отмечалось в статьях [13, 14], средний уровень модулей кожного покрова составляет $\sim 5 \cdot 10^6$ Па, а кровоток в коже прекращается при нормальном напряжении $\sigma_{max} = 10^4$ Па [13]. Операция по лифтингу должна проводиться таким образом, чтобы был достигнут максимальный косметический эффект, при этом напряжения релаксировали до величины, меньшей σ_{max} . В связи с этим в экспериментах обезразмеренный параметр уровня ПН в кожном покрове после операции можно считать величиной, находящейся в диапазоне $\sigma^0 \sim 10^{-2}, 10^{-3}$ Па.

Проведем анализ влияния уровня ПН, определяемого начальной деформацией ε_0 , на акустический отклик – функции амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) на поверхности слоя. На рис. 1 представлены графики АЧХ для различных значений уровня ПН: $\varepsilon_0 = 0$ (отсутствие ПН, сплошная линия) и $\varepsilon_0 = 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}$ (пунктирные). Из графиков видно, что различия в АЧХ имеются, однако существенными они становятся лишь вблизи максимумов АЧХ (соответствующих резонансам в упругом случае).

В связи с этим в качестве частотного диапазона зондирования на втором этапе (как и на первом, что проиллюстрировано в [3]) следует выбирать частоты вблизи вязкоупругого резонанса.

Рис. 1. Влияние уровня ПН на АЧХ для различных значений ε_0

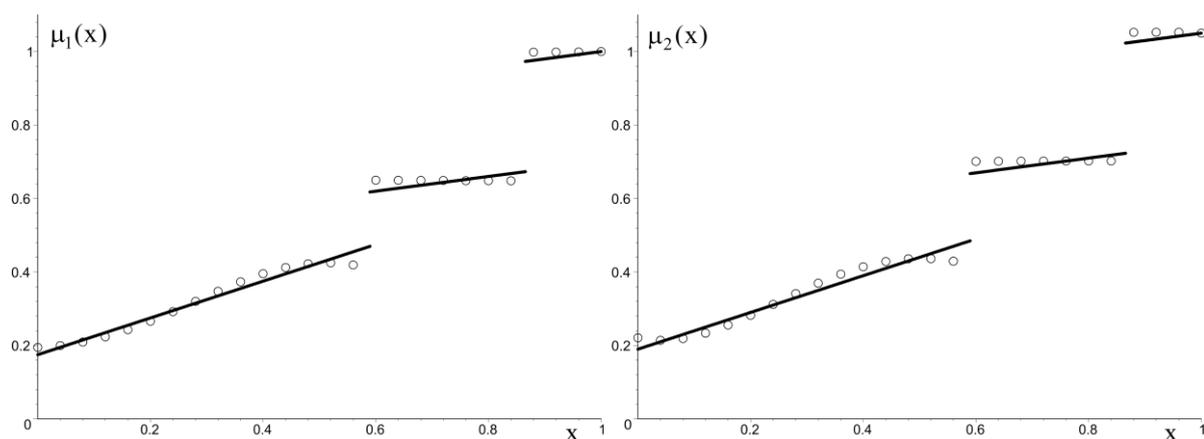
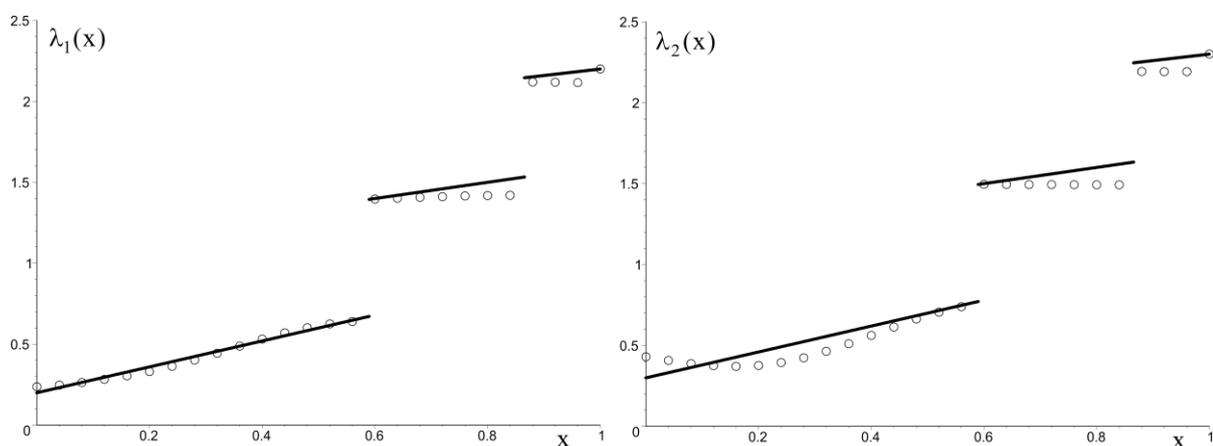
Далее представлены результаты идентификации функций длительных и мгновенных модулей для комплексных аналогов параметров Ламе и последующей идентификации начальной деформации, определяющей предварительные напряжения. Для трехслойного кожного покрова функции длительных и мгновенных модулей считались кусочно-линейными функциями:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0,175 + 0,5x, & x \leq 0,5895; \\ 0,5 + 0,2x, & x \leq 0,8655; \\ 0,8 + 0,2x, & x \leq 1; \end{cases} \quad \mu_2(x) = \begin{cases} 0,19 + 0,5x, & x \leq 0,5895; \\ 0,55 + 0,2x, & x \leq 0,8655; \\ 0,85 + 0,2x, & x \leq 1; \end{cases}$$

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0,2 + 0,8x, & x \leq 0,5895; \\ 1,1 + 0,5x, & x \leq 0,8655; \\ 1,8 + 0,4x, & x \leq 1; \end{cases} \quad \lambda_2(x) = \begin{cases} 0,3 + 0,8x, & x \leq 0,5895; \\ 1,2 + 0,5x, & x \leq 0,8655; \\ 1,9 + 0,4x, & x \leq 1. \end{cases}$$

На первом этапе идентификация самих функций мгновенных и длительных модулей проводилась в диапазоне между первым и вторым резонансами, как наиболее информативном для идентификации, что показали результаты других проведенных экспериментов. Для восстановления функций μ_i потребовалось 8 итераций, погрешность не превосходила 3 % (рис. 2), для функций $\lambda_i + 2\mu_i$ – 11 итераций, погрешность также не превосходила 3 %. Итоговая погрешность для вычисленных функций λ_i не превосходит 6 % (рис. 3). На рис. 2 и 3 графики искомых функций представлены сплошной линией, графики восстановленных – точками.

На втором этапе на основе полученных на первом этапе значений комплексных модулей Ламе проводилась идентификация параметра уровня ПН для различных его значений. Точность идентификации сравнивалась для двух различных значений частот, на которых в эксперименте снималась дополнительная информация (24): вдали от первого резонанса ($\kappa = 0.1$) и возле него ($\kappa = 1.23$). Результаты, представленные в таблице, показывают, что точность идентификации существенно выше для частоты, близкой к вязкоупругому резонансу. В скобках указана погрешность идентификации.

Рис. 2. Этап 1. Результаты восстановления функций μ_i Рис. 3. Этап 1. Результаты восстановления функций λ_i

Идентификация параметра уровня ПН

№	Точное ε_0	$\kappa = 0,1$, (погр., %)	$\kappa = 1,23$, (погр., %)
1	0,05	0,04961 (0,77)	0,04983 (0,35)
2	0,01	0,00974 (2,62)	0,00988 (1,15)
3	0,005	0,00475 (4,94)	0,00489 (2,17)
4	0,001	0,00077 (23,4)	0,00089 (10,3)

Также отметим, что при уменьшении величины уровня ПН снижается его влияние на АЧХ, в связи с чем ухудшается точность его определения. Точность также зависит от погрешности идентификации комплексных модулей на первом этапе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана двухэтапная методика определения механических характеристик кожного покрова и параметра уровня одноосного предварительного напряжения. Методика позволяет определять комплексные модули с погрешностью, не

превосходящей ~ 6 %, что является удовлетворительным результатом для подобного рода задач. Также она показала свою применимость для восстановления уровня ПН в диапазоне, соответствующем значениям релаксировавших ПН в каждом покрове после операций, на практике. Наибольшая точность восстановления происходит при зондировании на частотах, близких к резонансным.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 18-71-10045).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамов А.А., Федоров А.Е. Моделирование поведения кожи человека при больших деформациях // Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 76–84.
2. Анфиногенов С.Б., Курек М.Ф., Шилько С.В., Черноус Д.А. Механические и фрикционные свойства биоэластомеров. Часть 1: Описание релаксационных зависимостей кожи человека при растяжении // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т. 12, № 3. – С. 44–51.
3. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей // Российский журнал биомеханики. – 2013. – Т. 13, № 3. – С. 37–48.
4. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Исследование влияния предварительного состояния на механические свойства вязкоупругих тел // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 2. – С. 15–24.
5. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. – М.: Физматлит, 2019. – 272 с.
6. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация: монография. – Ростов-н/Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – 206 с.
7. Ватульян А.О., Недин Р.Д. К восстановлению характеристик плоского начального напряженного состояния // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – № 5. – С. 27–37.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.
9. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
10. Курек М.Ф., Шилько С.В., Аничкин В.В., Анфиногенов С.Б. Механические и фрикционные свойства биоэластомеров. Часть 2: Различия деформационных характеристик кожи в пределах эпи- и гипогастральной анатомических областей // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 4. – С. 65–77.
11. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.: ИЛ, 1955. – 668 с.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288с.
13. Федоров А.Е., Лохов В.А. О применении теории вязкоупругости в эстетической хирургии // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 4. – С. 32–43.
14. Федоров А.Е., Самарцев В.А., Кириллова Т.А. О механических свойствах кожи человека // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 2. – С. 29–42.
15. Щуров В.А. Динамика биомеханических свойств кожных покровов, стенок артерий и скелетных мышц при увеличении продольных размеров конечности // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т. 19, № 2. – С. 221–229.
16. Biot M.A. Mechanics of incremental deformations: theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain. – New York: Wiley, 1965. – 504 p.
17. Engstrom A., Pogoda K., Cruz K., Janmey P.A., Schwarz J.M. Compression stiffening in biological tissues: On the possibility of classic elasticity origins // Physical Review. – 2019. – Vol. 99, no. 5. – P. 052413.
18. Maas S., Ateshian G., Weiss J. A general framework for application of prestrain to computational models of biological materials // Annual Review of Biomedical Engineering. – 2017. – Vol. 19, no. 5. – P. 279–299.
19. Schajer G.S. Practical residual stress measurement methods. – Chichester: Wiley, 2013. – 560 p.
20. Vatulyan A.O., Bogachev I.V. The projection method for identification of the characteristics of inhomogeneous solid // Doklady Physics. – 2018. – Vol. 63, no. 2. – P. 82–85.

ON CHARACTERISTIC IDENTIFICATION FOR PRESTRESSED HUMAN SKIN

I.V. Bogachev, R.D. Nedin (Rostov-on-Don, Russian Federation)

In the paper, we present a model of skin in the form of viscoelastic layer-like structure that is inhomogeneous in thickness and consists in turn of three layers: subcutaneous fat, dermis and epidermis. We also assume the presence of an inhomogeneous uniaxial prestress in the skin layer arisen as a result of relaxation after the skin lifting (tightening) surgery procedure. We formulate the problem on the basis of the general problem statement on steady-state vibrations of an inhomogeneous body, taking into account the initial stress-strain state. Using the correspondence principle, the elastic moduli in the problem statement are replaced by complex analogs corresponding to the model of a standard viscoelastic body. The inverse problem is to determine the mechanical characteristics (complex analogs of the Lamé parameters) and prestress using the data on the acoustic response for a periodic probing non-invasive effect on the layer surface. By using the Fourier transform in the longitudinal coordinate, we reduce the original problem to solving a number of simpler problems in transforms. Based on the combination of different loading modes, we present a two-stage scheme for identifying mechanical properties and prestress. Within this scheme, at the first stage, complex analogs of the Lamé parameters are successively determined using the iterative approach and the Tikhonov regularization method. At the second stage, by using the functions found at the first stage, prestresses are determined using the proposed projection technique. We illustrate the approach developed to the considered skin integument problem by performing computational experiments showing the efficiency of the techniques proposed in the ranges corresponding to the real values of the sought-for parameters. Additionally, we provide some recommendations on the choice of frequency ranges for the best identification at each stage.

Key words: skin, prestress, viscoelasticity, acoustic method, inverse problem, identification, complex module.

Получено 26 декабря 2020