

DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2020.3.07
УДК 539.3

ВНЕДРЕНИЕ ЦИЛИНДРА С РАЗЛИЧНОЙ ФОРМОЙ ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

А.А. Яковенко^{1,2}

¹ Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 141701, Московская область, Долгопрудный, Институтский переулок, 9, e-mail: anastasiya.yakovenko@phystech.edu

Аннотация. В ходе разработки медицинского оборудования и обработки результатов экспериментов по исследованию биоматериалов возникает необходимость описания процесса взаимодействия рабочего инструмента с мягкими тканями. При этом необходимо учитывать не только механические свойства исследуемой ткани, но и технические характеристики оборудования, такие как форма поверхности инструмента и скорость процесса взаимодействия. С этой целью в данной работе построена контактная модель, описывающая внедрение с постоянной скоростью осесимметричного жесткого цилиндра с различной формой торцевой поверхности в вязкоупругое полупространство. Для описания механического поведения полупространства использовалась теория линейной вязкоупругости, а в качестве вязкоупругой модели, определяющей вид функции релаксации материала полупространства, выбрана трехпараметрическая модель стандартного вязкоупругого тела. Получены распределение контактного давления под поверхностью цилиндра, а также зависимость приложенной нагрузки от глубины внедрения для различных форм контактирующей поверхности цилиндра. Исследовано влияние формы поверхности основания цилиндра, скорости его внедрения в полупространство и релаксационных свойств полупространства на характеристики контактного взаимодействия. При описании механического поведения биологической ткани также была рассмотрена одномерная стержневая модель стандартного вязкоупругого тела. Для упрощенной модели также получены распределение контактного давления под поверхностью цилиндра с различной формой торцевой поверхности и зависимость прикладываемой нагрузки от времени. Произведено сравнение результатов, полученных с использованием модели сплошной среды и одномерной стержневой модели. Определены случаи, когда целесообразней для описания взаимодействия инструмента с биологической тканью использовать упрощенную модель.

Ключевые слова: контактная задача, индентирование, вязкоупругость, принцип Вольтерра, осесимметричный индентор, тело вращения, цилиндр.

ВВЕДЕНИЕ

Любая хирургическая операция несет в себе определенные риски, связанные со здоровьем пациента, а также с эффективностью операционного процесса. Поэтому при проведении медицинских процедур всегда стараются минимизировать область оперативного вмешательства. Это стремление привело к большому развитию малоинвазивных методов хирургии, например стереотаксиса. Такой метод применяется

в основном в нейрохирургии головного мозга и в отличие от стандартных методов выполняется без трепанации черепа [9]. Суть его заключается во введении в мозг через небольшое отверстие инструмента на заданную глубину для точечного воздействия на определенную область. В качестве инструмента обычно используют длинную тонкую иглу, конец которой может иметь различную форму.

Эффективность и безопасность стереотаксической процедуры обеспечивается точностью попадания инструмента в целевую точку. Поэтому для проведения таких операций в настоящее время используют специализированное оборудование, которое обеспечивает визуализацию положения инструмента и его наведение на целевую область мозга. При разработке позиционирующего оборудования, а также в ходе обработки результатов экспериментов возникает необходимость описания процесса взаимодействия инструмента с мягкими тканями. При этом необходимо учитывать не только механические свойства ткани, но и технические характеристики оборудования (форма иглы, скорость ее введения).

Результаты экспериментов по исследованию механического поведения биологических тканей в явном виде демонстрируют наличие у биоматериала релаксационных свойств [16]. Поэтому для описания его механического поведения следует использовать модель вязкоупругого тела. Индентирование вязкоупругих оснований рассматривалось во многих работах. Так, например, в работах [12, 13, 18] решена задача о внедрении в вязкоупругое полупространство жестких инденторов в форме конуса, сферы и цилиндра с плоским основанием при заданной функции внедрения или функции нагрузки. Используются и другие формы основания индентора, но чаще всего это либо гладкая поверхность без угловых точек, либо цилиндр с плоским основанием. В данной работе рассмотрено внедрение в полупространство с постоянной скоростью цилиндра с основанием, поверхность которого описывается степенной функцией. Аналогичная форма была рассмотрена в работе [14], но при условии полного контакта в течение всего процесса. Когда же внедрение осуществляется с постоянной скоростью, процесс состоит из двух этапов: стадии полного контакта предшествует стадия неполного контакта, когда область взаимодействия увеличивается с глубиной внедрения. Обе стадии исследованы в данной работе, а также проанализировано влияние формы поверхности основания цилиндра, скорости внедрения и механических характеристик полупространства на распределение контактного давления и зависимости прикладываемой нагрузки от глубины внедрения.

Помимо модели сплошной среды, для описания механического поведения биологических тканей возможно применение одномерных стержневых моделей. В работе также исследовано взаимодействие цилиндра с различной формой основания с вязкоупругим основанием при использовании одномерной модели вязкоупругого материала. Произведено сравнение результатов, полученных с использованием двух моделей (одномерной и модели сплошной среды). Данное сравнение позволяет определить, при каких параметрах индентирования возможно использовать упрощенные модели.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричная контактная задача по внедрению с постоянной скоростью V жесткого индентора в вязкоупругое полупространство (рис. 1). Материал основания считается однородным и линейновязкоупругим. Также примем, что между поверхностью индентора и поверхностью полупространства нет сил трения. Индентор представляет собой узкий цилиндр радиусом R с формой

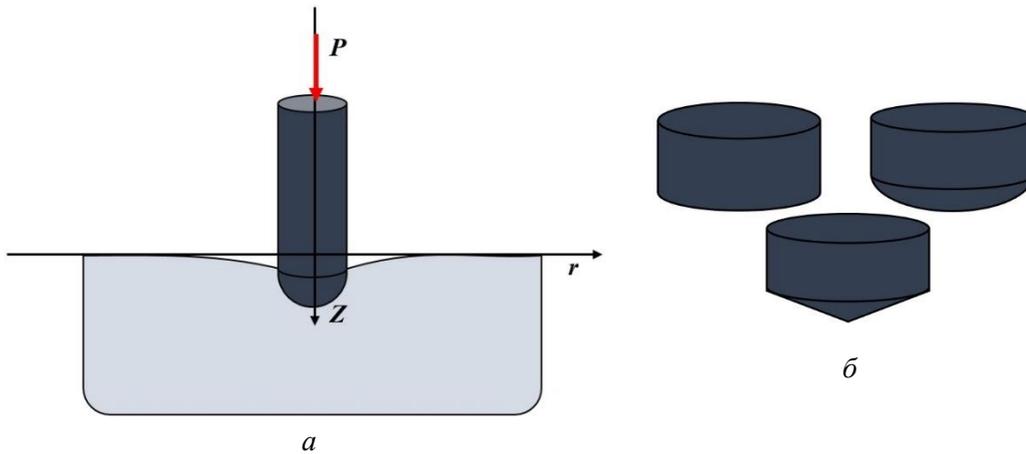


Рис. 1. Осесимметричная контактная задача по внедрению с постоянной скоростью V жесткого индентора в вязкоупругое полупространство: a – схема контакта; b – формы контактирующей поверхности инденторов

основания, описываемой степенной функцией $f(r) = Ar^n$, $n \geq 1$ ($n=1$ – коническое, $n=2$ – параболическое). Для цилиндра с плоским основанием считаем, что $f(r) = 0$. Граничные условия этой задачи ($a(t) \leq R$)

$$w(r,t) = (\delta(t) - f(r))H(t) \text{ для } r \leq a(t), \quad p(r,t) = 0 \text{ для } r > a(t), \quad (1)$$

где $w(r,t)$ – вертикальное смещение границы вязкоупругого полупространства; $p(r,t)$ – контактное давление; $\delta(t)$ – глубина внедрения; $a(t)$ – радиус области контакта, а $H(t)$ – функция Хевисайда. Сила $P(t)$, приложенная к индентору, определяется условием равновесия, а именно

$$P(t) = 2\pi \int_0^{a(t)} rp(r,t) dr. \quad (2)$$

Для механического описания поведения материала полупространства используем линейную теорию вязкоупругости. Определяющие соотношения, связывающие напряжения $\sigma_{ij}(r,t)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(r,t)$, через девиаторные и объемные компоненты запишутся в следующем виде [5]:

$$s_{ij}(r,t) = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}(r,\tau)}{\partial \tau} d\tau \text{ и } \sigma_{kk}(r,t) = \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(r,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3)$$

$$s_{ij}(r,t) = \sigma_{ij}(r,t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}(r,t), \quad s_{ii}(r,t) = 0,$$

$$e_{ij}(r,t) = \varepsilon_{ij}(r,t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(r,t), \quad e_{ii}(r,t) = 0,$$

где $s_{ij}(r,t)$ и $e_{ij}(r,t)$ – девиаторные компоненты напряжений и деформаций соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера, а $G_1(t)$ и $G_2(t)$ – функции релаксации,

соответствующие состояниям сдвига и объемного расширения. Считаем, что при $t < 0$ полупространство не деформировано и свободно от нагрузок.

Для решения задачи о контакте индентора с вязкоупругим полупространством, определяющие соотношения которого имеют форму (3), можно воспользоваться принципом Вольтерра [7], когда решение вязкоупругой задачи строится на основе соответствующей упругой задачи. Для простоты предположим, что коэффициент Пуассона материала не зависит от времени, т.е. $\nu(t) = \text{const}$. Тогда функции релаксации на сдвиг и на объемное расширение будут связаны соотношением

$$G_1(t) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} G_2(t).$$

При этом функция релаксации при простом сдвиге будет $G(t) = G_1(t)/2$, а функция релаксации при одноосном растяжении – $E(t) = 2(1+\nu)G(t) = (1+\nu)G_1(t)$.

РЕШЕНИЕ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Предположим, что внедрения малы, чтобы выполнялось условие малых деформаций. В этом случае можно рассмотреть модель сплошной среды. Для цилиндра с плоским снованием имеем следующие выражения для контактного давления и нагрузки при внедрении в упругое полупространство [2]:

$$p(r, \delta) = \frac{E\delta}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{R^2-r^2}}, \quad r \leq R, \quad (4)$$

$$P(\delta) = \frac{2E\delta R}{1-\nu^2}, \quad (5)$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона полупространства.

При внедрении цилиндра с формой основания, описываемой степенной функцией $f(r) = Ar^n$, процесс внедрения можно разделить на два этапа: неполный контакт, когда угловые точки не вошли в контакт с основанием, и полный контакт. На стадии неполного контакта имеем задачу о внедрении гладкого штампа с формой контактирующей поверхности $f(r)$ в упругое полупространство. При этом область контакта будет увеличиваться с глубиной, а давление, возникающее под поверхностью цилиндра, будет ограниченным на границе области контакта. В [2] получены следующие выражения для нагрузки и глубины внедрения:

$$P(\delta) = \frac{E}{1-\nu^2} \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} \delta^{\frac{n+1}{n}},$$

$$\delta = Aa^n 2^{n-2} n \frac{\Gamma^2(n/2)}{\Gamma(n)}, \quad (6)$$

где $\kappa(n) = 2^{2/n} n^{(n-1)/n} (\Gamma(n))^{1/n} (\Gamma(n/2))^{-2/n} / (n+1)$; $\Gamma(n)$ – гамма-функция.

Чтобы записать выражение для контактного давления $p(r, \delta)$, отдельно рассмотрим случай четного и нечетного n . Пусть степень функции четная, т.е. $n = 2m$,

$m=1, 2, \dots$. Тогда, как получено в [10], для давления имеем следующую формулу ($r \leq a(\delta)$):

$$p(r, \delta) = \frac{EA}{\pi(1-\nu^2)} q_1(r, \delta),$$

$$q_1(r, \delta) = a(\delta)^{n-1} \left(\frac{n!!}{(n-1)!!} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a(\delta)} \right)^2} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{(2i-3)!!}{(2i-2)!!} \left(\frac{r}{a(\delta)} \right)^{n-2i}, \quad (7)$$

где $a(\delta) = (n+1)\kappa(n)\sqrt{\delta/A}/2n$. В нечетном случае, т.е. для $n=2m+1, m=0, 1, \dots$, в работе [6] получено следующее выражение для контактного давления ($r \leq a(\delta)$):

$$p(r, \delta) = \frac{EA}{\pi(1-\nu^2)} q_2(r, \delta),$$

$$q_2(r, \delta) = \frac{\pi}{2} r^{n-1} \left(\frac{n!!}{(n-1)!!} \right)^2 \left(\text{Arch} \left(\frac{a(\delta)}{r} \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a(\delta)} \right)^2} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!} \left(\frac{a(\delta)}{r} \right)^{2i} \right). \quad (8)$$

При полном контакте, когда угловые точки вошли в контакт с основанием и область контакта постоянна, решение можно найти в виде суммы решения двух задач: задачи о внедрении индентора формы $f(r)$ на глубину δ_* , которая определяется условием $a(\delta_*) = R$, и задачи о внедрении цилиндра с плоским основанием на глубину $\delta - \delta_*$ [2]. Это следует из линейности рассматриваемого материала и принципа суперпозиции. Таким образом, для цилиндра с формой поверхности, описываемой степенной функцией $f(r)$, выражения для давления и нагрузки будут следующие ($r \leq a(\delta) \leq R$):

$$p(r, \delta) = \frac{EA}{\pi(1-\nu^2)} \begin{cases} Aq_{1,2}(r, \delta), & \delta < \delta_* \\ \left(Aq_{1,2}(r, \delta_*) + \frac{\delta - \delta_*}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right), & \delta \geq \delta_*, \end{cases} \quad (9)$$

$$P(\delta) = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{cases} \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} \delta^{\frac{n+1}{n}}, & \delta < \delta_* \\ \left(\kappa(n) A^{\frac{1}{n}} \delta_*^{\frac{n+1}{n}} + 2(\delta - \delta_*)R \right), & \delta \geq \delta_*, \end{cases} \quad (10)$$

где $q_1(r, \delta)$ и $q_2(r, \delta)$ определяются выражениями (7) и (8) соответственно.

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Перейдем к вязкоупругому случаю и воспользуемся принципом Вольтерра. При этом также учтем, что внедрение осуществляется с постоянной скоростью, т.е. $\delta(t) = Vt$.

При внедрении цилиндра с плоским основанием область контакта не зависит от времени, а значит, использование принципа Вольтерра справедливо. Заменяя в упругом решении модуль упругости соответствующим интегральным оператором и используя формулы (4)–(5), получим ($r \leq R$)

$$p(r, t) = \frac{V}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{R^2-r^2}} \int_0^t E(t-\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$P(t) = \frac{2VR}{1-\nu^2} \int_0^t E(t-\tau) d\tau, \quad (12)$$

где функция релаксации $E(t)$ зависит от механических свойств вязкоупругого материала.

Перейдем к рассмотрению цилиндра радиусом R , форма основания которого описывается степенной функцией $f(r) = Ar^n$. В стадии неполного контакта область контакта зависит от времени, что ограничивает возможность использования принципа Вольтерра. Однако, как показано в работе [17], в случае когда область контакта является неубывающей функцией, принцип Вольтерра остается справедливым. В рассматриваемом случае в процессе нагружения область контакта монотонно возрастает ($a(t_1) < a(t_2)$ для любых $t_1 < t_2$), поэтому для получения вязкоупругого решения также заменим модуль упругости в решении соответствующей упругой задачи интегральным оператором. Получим следующие выражения для давления и нагрузки ($r \leq a(t)$):

$$p(r, t) = \frac{A}{\pi(1-\nu^2)} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r, V\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$P(t) = \frac{(n+1)\kappa(n)}{n(1-\nu^2)} A^{-\frac{1}{n}} V^{\frac{n+1}{n}} \int_0^t E(t-\tau) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau.$$

В стадии полного контакта область контакта постоянна и ее радиус равен радиусу цилиндра, т.е. $a(t) = R$ при $t > t_*$, где t_* – момент времени, когда в контакт с полупространством вступают угловые точки. Как было сказано ранее, задача эквивалентна сумме двух: внедрению гладкого индентора с формой поверхности, описываемой функцией $f(r)$ на постоянную глубину, определяемую условием $a(t_*) = R$, и внедрению цилиндра с плоским основанием, начиная со времени t_* . Применяя принцип Вольтерра и исходя из формул (9)–(10), получим, что на стадии полного контакта давление будет определяться выражением

$$p(r, t) = \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left(A \int_0^{t_*} E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r, V\tau)}{\partial \tau} d\tau + A \int_{t_*}^t E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r, Vt_*)}{\partial \tau} d\tau + \frac{V}{\sqrt{R^2-r^2}} \int_{t_*}^t E(t-\tau) \frac{\partial(\tau-t_*)}{\partial \tau} d\tau \right).$$

Аналогичным способом получаем выражение для нагрузки. Окончательно, для цилиндра с формой торцевой поверхности, описываемой степенной функцией, решение будет иметь вид ($r \leq a(t) \leq R$)

$$p(r,t) = \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \begin{cases} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r, V\tau)}{\partial \tau} d\tau, & t < t_*, \\ \left(\int_0^{t_*} E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r, V\tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{V}{\sqrt{R^2 - r^2}} \int_{t_*}^t E(t-\tau) d\tau \right), & t \geq t_*; \end{cases} \quad (13)$$

$$P(t) = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{cases} \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} V^{\frac{n+1}{n}} \frac{n+1}{n} \int_0^t E(t-\tau) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau, & t < t_*, \\ \left(\kappa(n) A^{\frac{1}{n}} V^{\frac{n+1}{n}} \frac{n+1}{n} \int_0^{t_*} E(t-\tau) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau + 2VR \int_{t_*}^t E(t-\tau) d\tau \right), & t \geq t_*. \end{cases} \quad (14)$$

Исходя из принципа Вольтерра связь радиуса области контакта с величиной внедрения для вязкоупругого случая будет такой же, как и для упругого случая. Используя формулу (6) для радиуса области контакта и момента t_* , получим

$$a(t) = \frac{n+1}{2n} \kappa(n) \sqrt[n]{\frac{Vt}{A}} \text{ и } t_* = \frac{A}{V} \left(\frac{2nR}{(n+1)\kappa(n)} \right)^n. \quad (15)$$

Как видно из выражения (15), момент времени t_* зависит от скорости внедрения V , показателя степенной функции n и геометрических параметров цилиндра R и A . От безразмерного параметра A/R^n , характеризующего форму цилиндра, момент t_* зависит прямо пропорционально, от скорости – обратно пропорционально. Показатель степенной функции n , описывающей поверхность основания цилиндра, входит в выражение для момента времени t_* через функцию $\bar{\kappa}(n) = (2n/(n+1)\kappa(n))^n$. В таблице представлены значения функции $\bar{\kappa}(n)$ для нескольких значений показателя n .

Значение функции $\bar{\kappa}(n)$

n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\bar{\kappa}(n)$	$\pi/2$	2	$3\pi/4$	$8/3$
$\approx \bar{\kappa}(n)$	1,57	2	2,36	2,67

МОДЕЛЬ СТАНДАРТНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

Рассмотрим экспоненциальный вид функции релаксации, а именно модель стандартного вязкоупругого тела [8]. Функция релаксации для этой модели запишется как

$$E(t) = E_\infty \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} \right), \quad (16)$$

где E_∞ – длительный модуль упругости, $\alpha = 1/T_\sigma - 1/T_\varepsilon$, $\beta = 1/T_\sigma$. Величины T_σ и T_ε – времена релаксации и ползучести соответственно. Величина $E_0 = E_\infty\beta/(\beta - \alpha)$ соответствует мгновенному модулю упругости. Подставляя выражение для ядра релаксации (15) в формулы для контактного давления и нагрузки в случае цилиндра с плоским основанием (11)–(12), получим следующие выражения:

$$p(r, t) = \frac{E_\infty V}{\pi(1 - \nu^2)\sqrt{R^2 - r^2}} \left(t + \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} (1 - e^{-\beta t}) \right), \quad r \leq R, \quad (17)$$

$$P(t) = \frac{2E_\infty VR}{1 - \nu^2} \left(t + \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} (1 - e^{-\beta t}) \right). \quad (18)$$

Для цилиндра с заданной формой основания найдем отдельно значения интегралов, входящих в формулы (13), (14). Для интеграла, входящего в формулу (14), имеем

$$\int_0^t E(t - \tau) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau = E_\infty \int_0^t \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\beta(t-\tau)} \right) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau = E_\infty \left(\frac{n}{n+1} t^{\frac{n+1}{n}} + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta\tau} \tau^{\frac{1}{n}} d\tau \right).$$

Для интеграла из второго слагаемого в скобках запишем

$$\int_0^t e^{\beta\tau} \tau^{\frac{1}{n}} d\tau = \frac{e^{\beta t} t^{\frac{1}{n}}}{\beta} - \frac{1}{\beta n} \int_0^t e^{\beta\tau} \tau^{\frac{1}{n}-1} d\tau = \frac{e^{\beta t} t^{\frac{1}{n}}}{\beta} - \frac{t^{\frac{1}{n}}}{\beta n} \int_0^1 e^{\beta t s} s^{\frac{1}{n}-1} ds = \frac{e^{\beta t} t^{\frac{1}{n}}}{\beta} - \frac{t^{\frac{1}{n}}}{\beta} \Phi\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}; \beta t\right),$$

где $\Phi(a, c; x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, которую можно выразить через неполную гамма-функцию [11]. Для действительных значений параметров a , c и для действительных значений аргумента x эта функция действительна. Таким образом, для нагрузки получаем

$$P(t) = \frac{E_\infty V}{1 - \nu^2} \left\{ \begin{aligned} & \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} V^{\frac{1}{n}} \left(t^{\frac{n+1}{n}} + \frac{(n+1)\alpha}{n\beta(\beta - \alpha)} t^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{-\beta t} \Phi\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}; \beta t\right) \right) \right), \quad t < t_*, \\ & \left(\kappa(n) A^{\frac{1}{n}} V^{\frac{1}{n}} \left(t_*^{\frac{n+1}{n}} - \frac{(n+1)\alpha e^{-\beta t}}{n\beta(\beta - \alpha)} t_*^{\frac{1}{n}} \Phi\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}; \beta t_*\right) \right) + \right. \\ & \left. + 2R \left(t - t_* + \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} \right) \right), \quad t \geq t_*. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Для давления имеем следующее выражение ($r \leq a(t) \leq R$):

$$p(r, t) = \frac{E_\infty}{\pi(1 - \nu^2)} \left\{ \begin{aligned} & A \left(q_{1,2}(r, Vt) + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta\tau} \frac{\partial q_{1,2}(r, V\tau)}{\partial \tau} d\tau \right), \quad t < t_*, \\ & \left(A \left(q_{1,2}(r, Vt_*) + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} \int_0^{t_*} e^{\beta\tau} \frac{\partial q_{1,2}(r, V\tau)}{\partial \tau} d\tau \right) + \right. \\ & \left. + \frac{V}{\sqrt{R^2 - r^2}} \left(t - t_* + \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} (1 - e^{-\beta(t-t_*)}) \right) \right), \quad t \geq t_*, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

где $q_1(r, \delta)$ и $q_2(r, \delta)$ определяются выражениями (7) и (8) соответственно. В случае $n=2$ выражение для давления можно записать в явном виде. Оно будет иметь следующий вид ($r \leq a(t) \leq R$):

$$p(r, t) = \frac{4AE_\infty}{(1-v^2)\pi} \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{Vt}{2A} - r^2} + \frac{\alpha\sqrt{\pi V} e^{-\beta\left(t - \frac{2Ar^2}{V}\right)}}{2\sqrt{2\beta A}(\beta - \alpha)} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\beta \left(t - \frac{2Ar^2}{V} \right)} \right) \right), & t < t_*, \\ \left(\sqrt{1-r^2} + \frac{\alpha\sqrt{\pi V} e^{-\beta\left(t - \frac{2Ar^2}{V}\right)}}{2\sqrt{2\beta A}(\beta - \alpha)} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{2\beta A}{V}(1-r^2)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{V}{4A\sqrt{1-r^2}} \left(t - \frac{2A}{V} + \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} \left(1 - e^{-\beta\left(t - \frac{2A}{V}\right)} \right) \right) \right), & t \geq t_*, \end{cases} \quad (21)$$

где $\operatorname{erfi}(x)$ – мнимая функция ошибок (интеграл вероятности).

Посмотрим на асимптотику полученных выражений при быстрых и медленных внедрениях индентора в полупространство, т.е. для больших и малых V . Для этого запишем полученные выражения в зависимости не от времени, а от глубины внедрения δ . Очевидно, что зависимости (17)–(18) при малых и больших скоростях внедрения стремятся к выражениям (4)–(5) с длительным E_∞ и мгновенным E_0 модулями упругости соответственно. Запишем выражения для нагрузки (19) через глубину внедрения. Получим

$$P(\delta) = \frac{E_\infty}{1-v^2} \begin{cases} \left(\kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \left(\delta^{\frac{n+1}{n}} + \frac{(n+1)\alpha}{n\beta(\beta - \alpha)} \delta^{\frac{1}{n}} V \left(1 - e^{-\frac{\beta\delta}{V}} \Phi \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}; \frac{\beta\delta}{V} \right) \right) \right) \right), & \delta < \delta_*, \\ \left(\kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \left(\delta_*^{\frac{n+1}{n}} - \frac{(n+1)\alpha}{n\beta(\beta - \alpha)} \delta_*^{\frac{1}{n}} V e^{-\frac{\beta\delta}{V}} \Phi \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}; \frac{\beta\delta}{V} \right) \right) + \right. \\ \left. + 2R \left(\delta - \delta_* + \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} V \right) \right), & \delta \geq \delta_*. \end{cases}$$

Используем то, что функция $\Phi(a, c; x)$ имеет представление

$$\Phi(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

а также то, что при $x \rightarrow \infty$ $\Phi(a, c; x) \rightarrow (\Gamma(c)/\Gamma(a)) e^x x^{a-c}$ [1]. При малых скоростях, т.е. для $V \rightarrow 0$, асимптотика будет следующей:

$$P(\delta) \rightarrow \frac{E_\infty}{1-v^2} \begin{cases} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \delta^{\frac{n+1}{n}}, & \delta < \delta_*, \\ \left(\kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \delta_*^{\frac{n+1}{n}} + 2R(\delta - \delta_*) \right), & \delta \geq \delta_*, \end{cases}$$

что совпадает с формулой (10) для упругой задачи при $E = E_\infty$. При больших скоростях, т.е. для $V \rightarrow \infty$,

$$P(\delta) \rightarrow \frac{E_\infty}{1-\nu^2} \begin{cases} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \left(\delta^{\frac{n+1}{n}} + \frac{(n+1)\alpha}{n\beta(\beta-\alpha)} \delta^{\frac{1}{n}} V \left(1 - \left(1 - \frac{\beta\delta}{V} \right) \left(1 + \frac{\beta\delta}{(n+1)V} \right) \right) \right), & \delta < \delta_*, \\ \left(\kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \left(\delta_*^{\frac{n+1}{n}} - \frac{(n+1)\alpha}{n\beta(\beta-\alpha)} \delta_*^{\frac{1}{n}} V \left(1 - \frac{\beta\delta}{V} \right) \left(1 + \frac{\beta\delta_*}{(n+1)V} \right) \right) + \right. \\ \left. + 2R \left(\delta - \delta_* + \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} V \right) \right), & \delta \geq \delta_*. \end{cases}$$

Так как $\delta_* = A(2nR/(n+1)\kappa(n))^n$ и $E_0 = E_\infty\beta/(\beta-\alpha)$, то окончательно получим, что

$$P(\delta) \rightarrow \frac{E_0}{1-\nu^2} \begin{cases} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \delta^{\frac{n+1}{n}}, & \delta < \delta_*, \\ \left(\kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} \delta_*^{\frac{n+1}{n}} + 2R(\delta - \delta_*) \right), & \delta \geq \delta_*. \end{cases}$$

Это также совпадает с выражением (10) для упругой задачи, если принять, что $E = E_0$. Аналогичный результат можно получить для контактного давления, рассмотрев асимптотику выражения (21). Исследуем также поведение выражения (19) для форм поверхности основания цилиндра, приближающейся к плоской, т.е. при больших значениях показателя степенной функции или при малых значениях параметра A относительно радиуса цилиндра R . Для $n \rightarrow \infty$ при фиксированных остальных параметрах момент времени t_* также стремится к бесконечности. Поэтому для нагрузки имеем при $n \rightarrow \infty$

$$P(t) \rightarrow \frac{E_\infty V}{1-\nu^2} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} V^{\frac{1}{n}} \left(t + \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} (1 - e^{-\beta t} \Phi(0, 1; \beta t)) \right) \rightarrow \frac{2E_\infty VR}{1-\nu^2} \left(t + \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} (1 - e^{-\beta t}) \right).$$

Здесь использовано, что $R = A(2nR/(n+1)\kappa(n))^n$ и при $n \rightarrow \infty$ $R = \kappa(n)/2$. Это выражение совпадает с формулой (18) для цилиндра с плоским основанием. При $A \rightarrow 0$ момент времени t_* также стремится к нулю. С использованием того, что $(Vt_*/A)^{1/n} = 2nR/(n+1)\kappa(n)$, для нагрузки при $A \rightarrow 0$ получим

$$P(t) = \frac{2E_\infty VR}{1-\nu^2} \left(-\frac{\alpha e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\alpha)} + t + \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} + O(\beta t_*) \right) \rightarrow \frac{2E_\infty VR}{1-\nu^2} \left(t + \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} (1 - e^{-\beta t}) \right),$$

что также совпадает с выражением для плоского основания (18).

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для построения графиков введем безразмерные величины $\tilde{p} = p(1-\nu^2)/E_\infty$, $\tilde{P} = P(1-\nu^2)/R^2 E_\infty$, $T = T_e/T_\sigma = \beta/(\beta-\alpha)$, $\tilde{t} = \beta t$, $\tilde{r} = r/R$ и $\tilde{A} = R^{1-n} A$. Рассмотрим цилиндры при фиксированном значении постоянной A . Тогда высота выпуклой части цилиндра одинакова для всех форм. На рис. 2 представлены профили инденторов в случае одинаковой величины A для разных значений показателя степени.

Для этих форм поверхности основания цилиндров исследуем распределение контактного давления. На рис. 3 представлены графики распределения давлений под поверхностью цилиндров в случае разных n и в различные моменты времени при $\tilde{A} = 1/20$, $\tilde{V} = 0,1$ и $T = 2$. Точками на графиках обозначено распределение давления на тех же глубинах внедрения для случая упругого полупространства, т.е. при $T = 1$.

Как следует из результатов, распределение контактного давления в стадии, когда область контакта изменяется с глубиной, зависит от формы контактирующей поверхности. В случае конического основания наблюдаются бесконечные давления в центральной точке. При вступлении в контакт угловых точек, т.е. при $t > t_*$, для всех форм основания цилиндра на краях области контакта давления становятся неограниченными. При внедрении цилиндра с плоским основанием с самого начала процесса внедрения контактные давления на границе области взаимодействия являются неограниченными.

Для исследования влияния вязкоупругих свойств полупространства на контактные характеристики были построены графики распределения давления при фиксированной глубине $\tilde{\delta} = 1/6$ (рис. 4) и зависимости нагрузки от глубины внедрения (рис. 5) для двух значений параметра T при $\tilde{A} = 1/20$, $\tilde{V} = 0,1$ и фиксированном длительном модуле упругости.

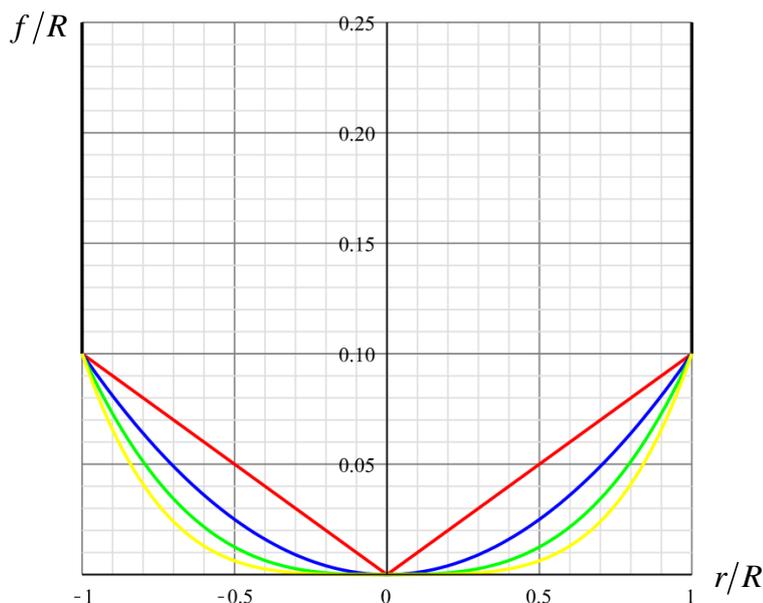


Рис. 2. Профили цилиндров с основаниями, которые описываются функцией $\tilde{f}(\tilde{r})$ при $\tilde{A} = 1/20$ и $n = 1$ (красная линия); $n = 2$ (синяя линия); $n = 3$ (зеленая линия); $n = 4$ (желтая линия)

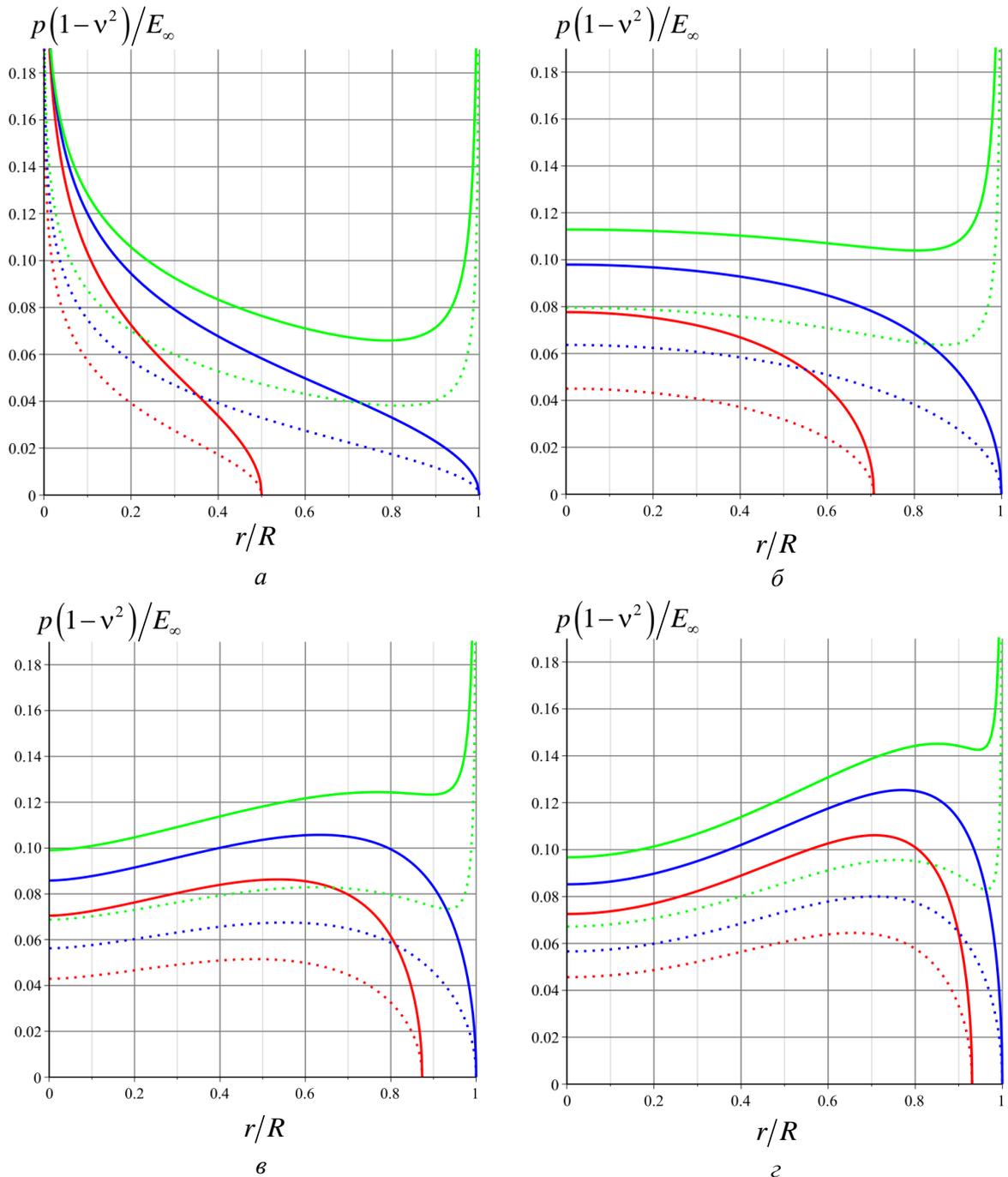


Рис. 3. Распределение контактного давления в разные моменты времени под поверхностью цилиндра $\tilde{p}(\tilde{r}, \tilde{t})$: при (а) $n=1$ ($\tilde{t} = \pi/8$ – красная линия, $\tilde{t} = \pi/4$ – синяя линия, $\tilde{t} = 3\pi/8$ – зеленая линия); (б) $n=2$ ($\tilde{t} = 1/2$ – красная линия, $\tilde{t} = 1$ – синяя линия, $\tilde{t} = 3/2$ – зеленая линия); (в) $n=3$ ($\tilde{t} = \pi/4$ – красная линия, $\tilde{t} = 3\pi/8$ – синяя линия, $\tilde{t} = \pi/2$ – зеленая линия); (г) $n=4$ ($\tilde{t} = 1$ – красная линия, $\tilde{t} = 4/3$ – синяя линия, $\tilde{t} = 5/3$ – зеленая линия)

При анализе контактного давления получено, что с увеличением глубины внедрения после вступления в контакт с основанием угловых точек распределение давлений под поверхностью цилиндра всех форм стремится к распределению в случае плоского основания. Также из результатов следует, что на одной и той же глубине

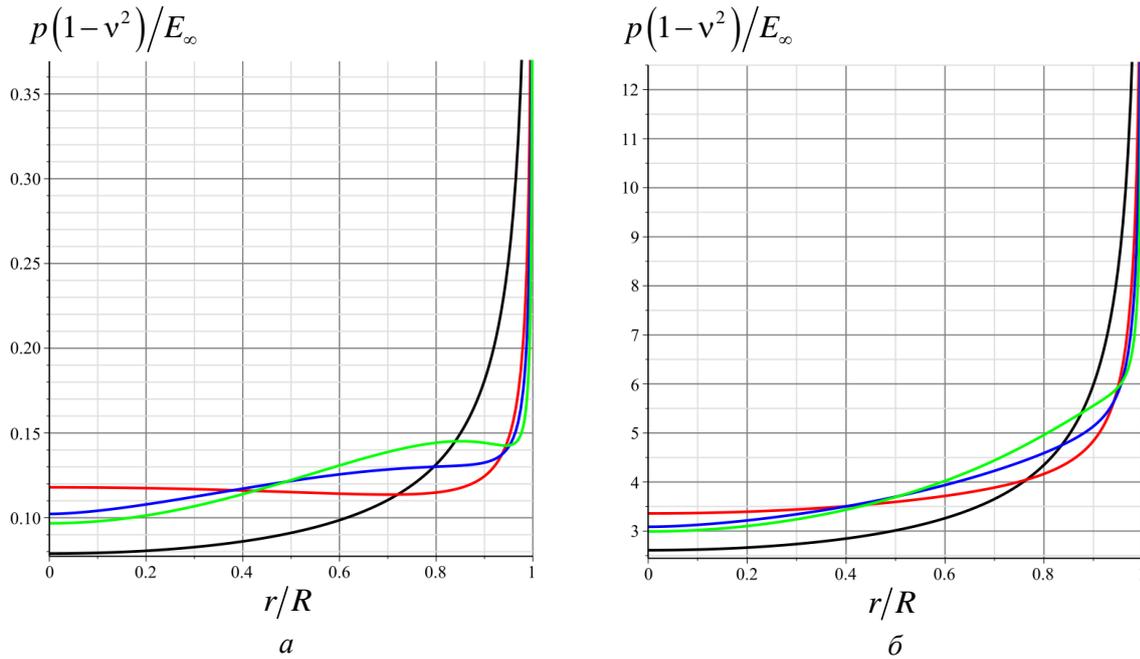


Рис. 4. Распределение контактного давления под поверхностью цилиндра $\tilde{p}(\tilde{r}, 5/3)$ при $n=2$ (красная линия), $n=3$ (синяя линия), $n=4$ (зеленая линия), $n=0$ (черная линия): (а) $T=2$; (б) $T=100$; $\tilde{\delta}=1/6$

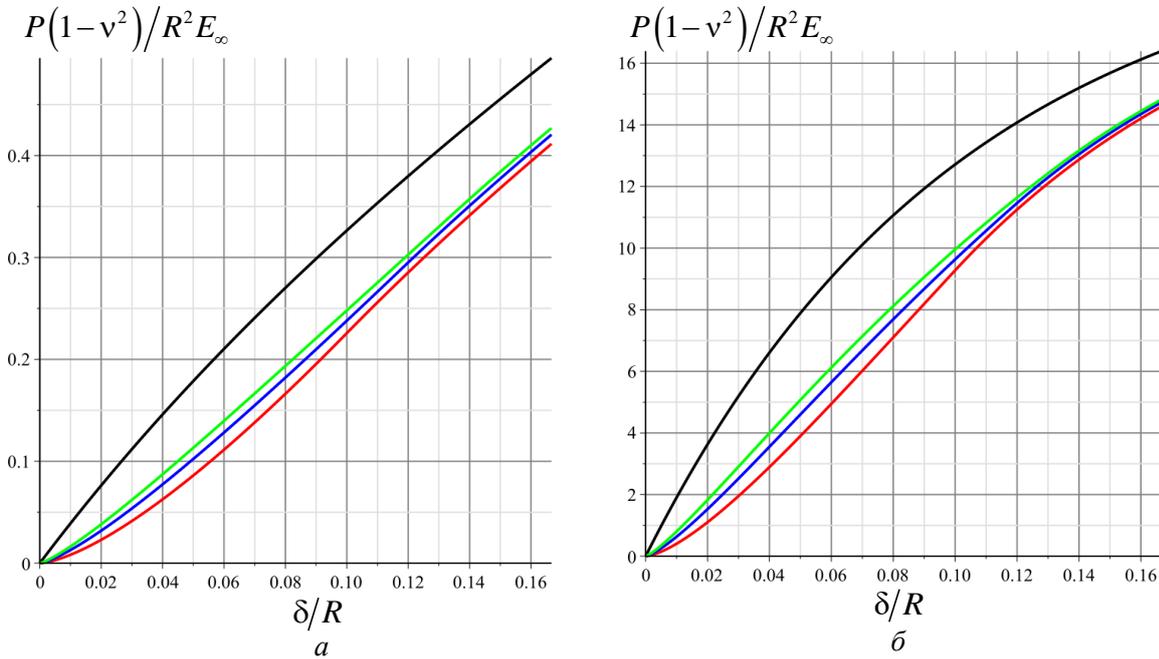


Рис. 5. Зависимость нагрузки от глубины внедрения $\tilde{P}(\tilde{\delta})$ при $n=2$ (красная линия), $n=3$ (синяя линия), $n=4$ (зеленая линия), $n=0$ (черная линия): (а) $T=2$; (б) $T=100$

внедрения для оснований с большим коэффициентом T , т.е. для более вязких материалов, распределение давлений для всех форм поверхности ближе к распределению давлений под поверхностью цилиндра с плоским основанием, особенно на краях области контакта. Следует отметить, что для цилиндра с коническим основанием бесконечно большие давления в центральной точке остаются в течение

всего процесса внедрения. После вступления в контакт с основанием угловых точек зависимость нагрузки от внедрения становится практически одинаковой для всех форм основания цилиндра.

Из анализа зависимости нагрузки от внедрения следует, что на одной и той же глубине значение нагрузки меньше для цилиндра с коническим основанием, а максимальное – для цилиндра с плоским основанием. Также при внедрении в материал с большим коэффициентом T разница между результатами для цилиндров с разными формами основания меньше при фиксированной глубине внедрения.

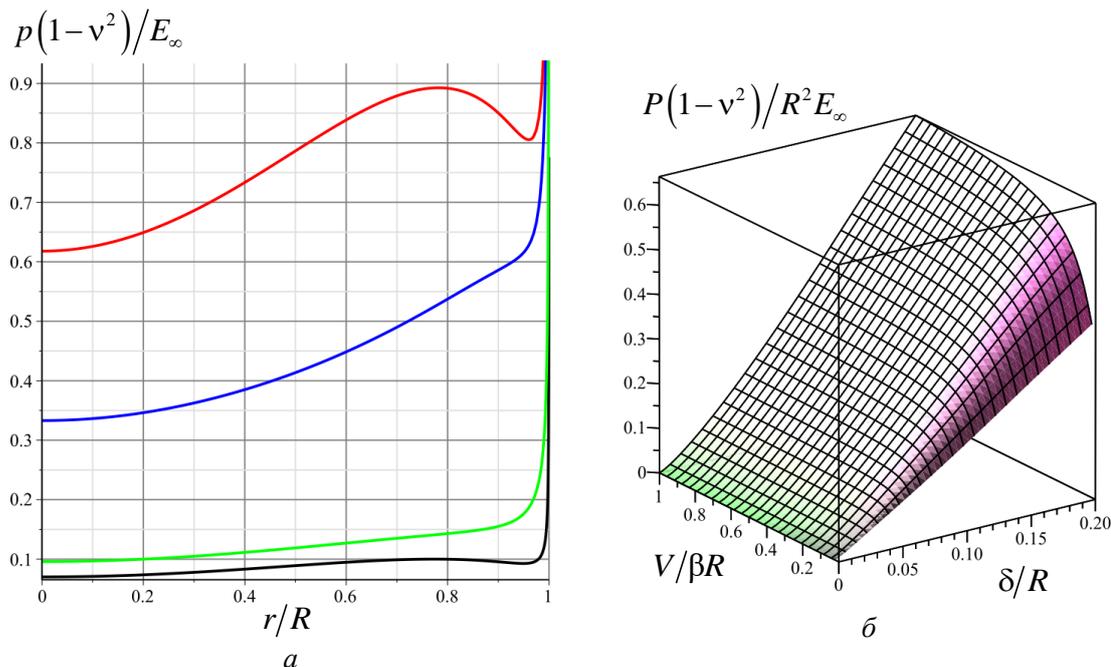


Рис. 6. Распределение давления при фиксированной глубине внедрения и зависимость нагрузки от глубины при $n = 4$ и различных значениях скорости внедрения: *a* – распределение контактного давления под поверхностью цилиндра при $T = 10$, $\tilde{\delta} = 1/6$ и $\tilde{V} = 1$ (красная линия), $\tilde{V} = 1/10$ (синяя линия), $\tilde{V} = 1/100$ (зеленая линия), $\tilde{V} = 1/1000$ (черная линия); *б* – зависимость нагрузки от глубины внедрения $\tilde{P}(\tilde{\delta})$ при $T = 10$ и $\tilde{V} = [0,1]$

Для анализа влияния скорости внедрения на рис. 6 представлены графики распределения давления при фиксированной глубине внедрения и зависимость нагрузки от глубины при $n = 4$ и различных значениях скорости внедрения. Если глубина внедрения фиксирована, то изменение скорости внедрения влияет на промежуток времени, за который цилиндр достигает этой глубины. Из графика распределения давления (рис. 6, *a*) следует, что при больших и малых скоростях внедрения результаты аналогичны упругому случаю с длительным и мгновенным модулями упругости. Для промежуточных значений скоростей распределение ближе к распределению для цилиндра с плоским основанием, так как при этом на краях области контакта не будет точек перегиба. Из анализа зависимости нагрузки от глубины внедрения (рис. 6, *б*) следует, что при фиксированной глубине внедрения значение прикладываемой нагрузки, как и значение контактного давления в каждой точке поверхности, меньше для меньших скоростей.

СРАВНЕНИЕ С УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛЬЮ

Для моделирования поведения вязкоупругого основания также используют упрощенные одномерные модели. Рассмотрим упрощенную модель основания, а именно стержневую модель стандартного вязкоупругого тела [8]. При этом основание моделируется не как полупространство, а как слой, состоящий из пружинно-демпферных блоков. Определяющие соотношения, связывающие вертикальные смещения границы слоя и контактные давления, для этой модели имеют вид

$$p(r,t) + T_{\sigma} \frac{dp(r,t)}{dt} = \frac{E_{\infty}}{h} \left(w(r,t) + T_{\varepsilon} \frac{dw(r,t)}{dt} \right),$$

где h – толщина слоя. Для цилиндра с плоским основанием получим следующие выражения для давления и прикладываемой нагрузки [3]:

$$p(r,t) = p(t) = \frac{E_{\infty} V}{h} \left(t - (T_{\sigma} - T_{\varepsilon}) \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{\sigma}}} \right) \right), \quad r \leq R,$$

$$P(t) = \frac{\pi E_{\infty} V R^2}{h} \left(t - (T_{\sigma} - T_{\varepsilon}) \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{\sigma}}} \right) \right).$$

Видно, что выражение для нагрузки совпадает с формулой (10), если принять, что $h/R = \pi/2$. Распределение же давления при этом будет различаться, так как для стержневой модели имеем равномерное распределение под поверхностью цилиндра с плоским основанием. Исследование внедрения цилиндра с плоским основанием в слой, для описания механического поведения которого используется модель сплошной среды, можно найти в работе [4].

Для цилиндра со сферическим основанием ($n=2$), решая задачу аналогично работе [15], где рассмотрено внедрение в слой сферического индентора, получим следующий результат:

$$p(r,t) = \frac{E_{\infty}}{h} \left(V \left(t - (T_{\sigma} - T_{\varepsilon}) \left(1 - e^{-\frac{Ar^2}{VT_{\sigma}} - \frac{t}{T_{\sigma}}} \right) \right) - Ar^2 \right), \quad r \leq a(t) \leq R,$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\pi E_{\infty} V^2}{2Ah} \left(t^2 - 2(T_{\sigma} - T_{\varepsilon}) \left(t - T_{\sigma} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{\sigma}}} \right) \right) \right), & t < t_*, \\ \frac{\pi E_{\infty}}{h} \left(R^2 V (t - T_{\sigma} + T_{\varepsilon}) + \frac{V^2}{A} (T_{\sigma} - T_{\varepsilon}) T_{\sigma} e^{-\frac{t}{T_{\sigma}}} \left(e^{\frac{AR^2}{VT_{\sigma}}} - 1 \right) - \frac{AR^4}{2} \right), & t \geq t_*. \end{cases}$$

При этом радиус области контакта $a(t) = \sqrt{Vt/A}$. Откуда для момента времени t_* найдем, что $t_* = AR^2/V$. Возьмем так же, как и в случае цилиндра с плоским основанием $h/R = \pi/2$, и посмотрим на разницу в сравнении с использованием модели сплошной среды с функцией релаксации, соответствующей модели стандартного вязкоупругого тела. На рис. 7 представлены распределение контактного давления в разные моменты времени и зависимость нагрузки от глубины внедрения для разного

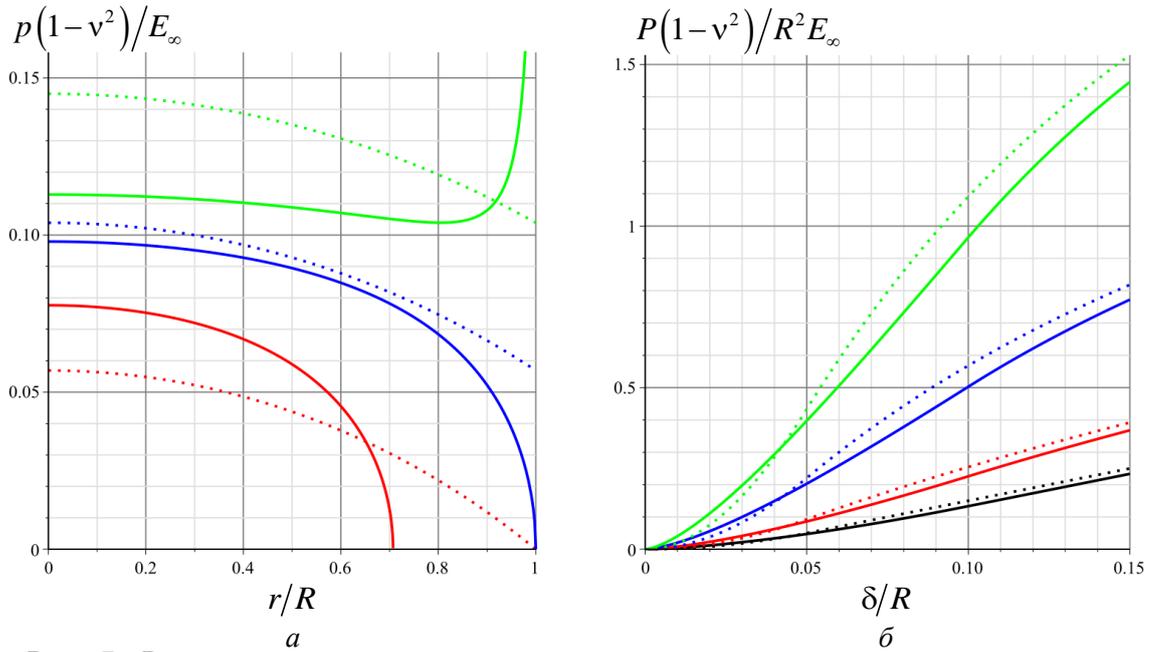


Рис. 7. Распределение контактного давления в разные моменты времени и зависимость нагрузки от глубины внедрения для разного отношения времен релаксации и ползучести при $\tilde{A} = 1/20$ и $\tilde{V} = 0,1$: *a* – распределение контактного давления $\tilde{p}(\tilde{r}, \tilde{t})$ под поверхностью цилиндра со сферическим основанием при $T = 2$ в разные моменты времени ($\tilde{t} = 1/2$ – красная линия, $\tilde{t} = 1$ – синяя линия, $\tilde{t} = 3/2$ – зеленая линия); *б* – зависимость нагрузки от глубины внедрения $\tilde{P}(\tilde{\delta})$ для цилиндра со сферическим основанием при $T = 1$ – черная линия, $T = 2$ – красная линия, $T = 5$ – синяя линия, $T = 10$ – зеленая линия

отношения времен релаксации и ползучести при $\tilde{A} = 1/20$ и $\tilde{V} = 0,1$. На графиках линия соответствует модели сплошной среды, а точки – упрощенной одномерной модели. При этом считалось, что длительный модуль упругости E_∞ упрощенной модели равен величине $E_\infty/(1-\nu^2)$ модели сплошной среды.

Из результатов следует, что упрощенная модель основания при исследовании зависимости нагрузки от глубины внедрения дает результаты, близкие к результатам, полученным с использованием модели сплошной среды. Однако одномерная модель не подходит для анализа распределения контактного давления под поверхностью цилиндра, так как она не учитывает резкое возрастание давлений на краях области контакта при вступлении в контакт с основанием угловых точек цилиндра.

Для цилиндра с коническим основанием ($n = 1$) получим следующий результат:

$$p(r, t) = \frac{E_\infty}{h} \left(V \left(t - (T_\sigma - T_\varepsilon) \left(1 - e^{-\frac{Ar}{VT_\sigma} \frac{t}{T_\sigma}} \right) \right) - Ar \right), \quad r \leq a(t) \leq R,$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\pi E_\infty V^3}{A^2 h} \left(\frac{t^3}{3} - (T_\sigma - T_\varepsilon) \left(t^2 - 2T_\sigma \left(t - T_\sigma \left(1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right) \right) \right), & t < t_*, \\ \frac{\pi E_\infty}{h} \left(V \left(R^2 t - (T_\sigma - T_\varepsilon) \left(R^2 - \frac{2VT_\sigma}{A} e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \left(R e^{\frac{AR}{VT_\sigma}} + \frac{VT_\sigma}{A} \left(1 - e^{-\frac{AR}{VT_\sigma}} \right) \right) \right) \right) - \frac{2AR^3}{3} \right), & t \geq t_*. \end{cases}$$

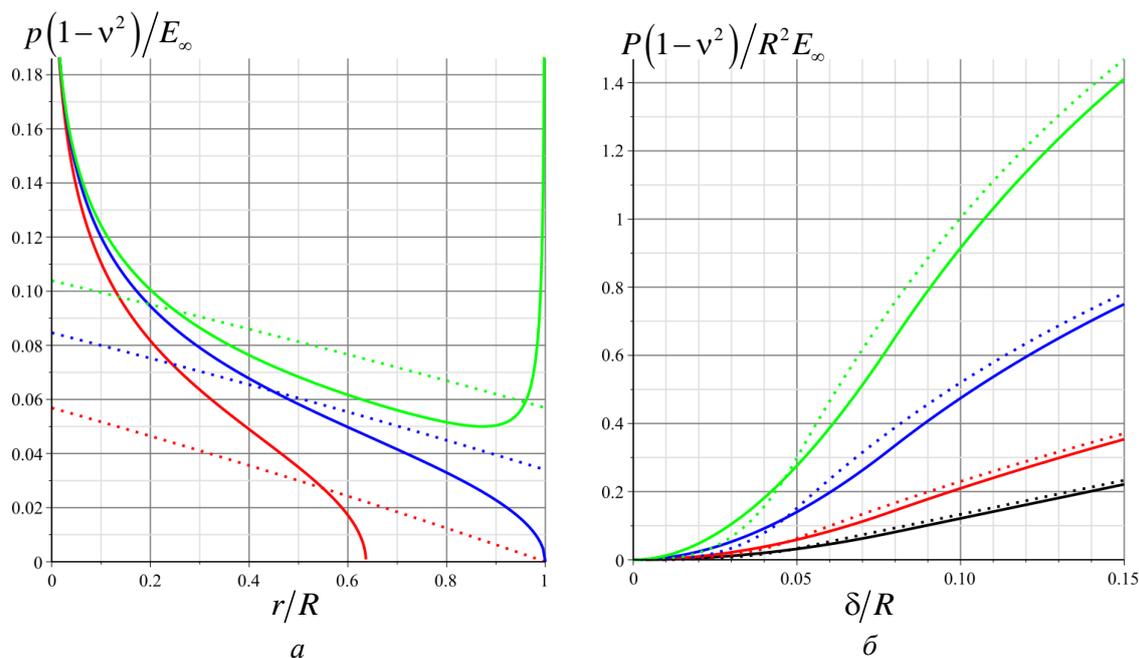


Рис. 8. Распределение контактного давления в разные моменты времени и зависимость нагрузки от глубины внедрения для разного отношения времен релаксации и ползучести: *a* – распределение контактного давления $\tilde{p}(\tilde{r}, \tilde{t})$ под поверхностью цилиндра с коническим основанием при $T = 2$, $\tilde{A} = 1/20$ и $\tilde{V} = 0,1$ в разные моменты времени ($\tilde{t} = 1/2$ – красная линия, $\tilde{t} = \pi/4$ – синяя линия, $\tilde{t} = 1$ – зеленая линия); *б* – зависимость нагрузки от глубины внедрения $\tilde{P}(\tilde{\delta})$ для цилиндра с коническим основанием при $\tilde{A} = 1/20$, $\tilde{V} = 0,1$ и $T = 1$ – черная линия, $T = 2$ – красная линия, $T = 5$ – синяя линия, $T = 10$ – зеленая линия

При этом радиус области контакта будет $a(t) = Vt/A$, а для момента времени t_* получим, что $t_* = AR/V$. Примем, как и в случае цилиндра с плоским основанием, $h/R = \pi/2$ и сравним результаты, полученные с использованием двух моделей вязкоупругого материала для конической формы основания цилиндра. На рис. 8 представлены распределение контактного давления в разные моменты времени и зависимость нагрузки от глубины внедрения для разного отношения времен релаксации и ползучести при $\tilde{A} = 1/20$ и $\tilde{V} = 0,1$. Линия соответствует модели сплошной среды, а точки – одномерной модели. Длительный модуль упругости E_∞ упрощенной модели считался равным величине $E_\infty/(1-v^2)$ модели сплошной среды.

Выводы

В работе построена модель внедрения с постоянной скоростью жесткого цилиндра с различной формой торцевой поверхности в вязкоупругое полупространство. При этом в рассмотрение брались формы основания, описываемые степенной функцией. Для моделирования механического поведения материала использовалась линейная теория вязкоупругости.

При решении осесимметричной контактной задачи получены аналитические зависимости прикладываемой к цилиндру нагрузки от времени (или глубины внедрения) для всех рассматриваемых форм поверхности цилиндрического основания.

Также аналитические выражения получены для распределения контактного давления, но только для двух форм основания цилиндра: плоской и сферической. Для остальных форм основания цилиндра (коническая и форма, описываемая степенной функцией с показателем степени больше двух) получены выражения, позволяющие численно получить распределение давления в каждый момент времени. В качестве модели, описывающей вязкоупругие свойства материала полупространства, была выбрана модель стандартного вязкоупругого тела, функция релаксации которой имеет экспоненциальный вид.

Представленные численные результаты позволили исследовать влияние скорости внедрения, формы контактирующей поверхности и вязкоупругих свойств материала на распределение контактного давления под поверхностью цилиндра и на прикладываемую нагрузку. Получено, что наиболее сильное влияние формы контактирующей поверхности цилиндра наблюдается на стадии, когда область контакта изменяется с глубиной. В стадии полного контакта эта разница становится меньше. Анализ распределения контактного давления показал, что в стадии полного контакта с увеличением глубины внедрения распределение давлений под поверхностью цилиндра всех форм стремится к распределению, характерному для случая цилиндра с плоским основанием. Причем при фиксированной глубине внедрения чем больше вязкоупругий коэффициент полупространства T , тем распределение давления ближе к распределению под поверхностью цилиндра с плоским основанием, особенно на краях области контакта.

Анализ зависимости нагрузки от глубины внедрения показал, что с увеличением показателя степени функции, описывающей форму торцевой поверхности цилиндра, значение нагрузки на одной и той же глубине увеличивается. Однако для более вязких материалов (большой коэффициент T) разница в прикладываемой нагрузке между результатами для цилиндров с разной формой основания меньше. К увеличению нагрузки также приводит увеличение скорости внедрения. На распределение контактного давления изменение скорости также оказывает влияние: при фиксированной глубине увеличение скорости ведет к тому, что давление в каждой точке возрастает и с дальнейшим увеличением скорости распределение давления стремится к случаю упругого полупространства с мгновенным модулем упругости.

Помимо модели сплошной среды (вязкоупругое полупространство) для описания поведения вязкоупругого материала рассмотрена одномерная стержневая модель. Для таких форм основания цилиндра, как плоская, коническая и сферическая, получены аналитические зависимости контактного давления и нагрузки от времени или глубины внедрения. Произведено сравнение результатов с результатами, полученными с использованием модели сплошной среды. Показано, что упрощенные модели неприменимы для исследования распределения контактного давления под поверхностью индентора на стадии полного контакта, но они дают удовлетворительные результаты для зависимости нагрузки от глубины внедрения.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Выражаю благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору МГУ и МФТИ, академику РАН Горячевой Ирине Георгиевне за ценные советы и замечания при постановке и решении задачи, за необходимые исправления и внесенные правки, а также за рекомендации по оформлению статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-58-52004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1953. – 264 с.
3. Горячева И.Г., Досаев М.З., Селюцкий Ю.Д., Яковенко А.А., Hsiao C.-H., Huang C.-Yu., Ju M.-S., Yeh C.-H. Об управлении внедрением индентора в вязкоупругую ткань // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2020. – Т. 21, № 5. – С. 304–311.
4. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Моделирование внедрения цилиндра в вязкоупругий слой // Механика твердого тела. – 2020. – № 5. – С. 64–75.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 341 с.
6. Маховская Ю.Ю. Моделирование адгезионного взаимодействия деформируемых тел: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 2017. – 47 с.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 753 с.
8. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
9. Холявин А.И., Аничков А.Д. Методы наведения в современной стереотаксической нейрохирургии. – М.: Изд-во Рос. акад. наук, 2017. – 170 с.
10. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
11. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1964. – 344 с.
12. Cheng L., Xia X., Scriven L.E., Gerberich W.W. Spherical-tip indentation of viscoelastic material // *Mechanics of Materials*. – 2005. – Vol. 37, no. 1. – P. 213–226.
13. Cheng L., Xia X., Yu W., Scriven L.E., Gerberich W.W. Flat-punch indentation of viscoelastic material // *Journal of Polymer Science: Polymer Physics*. – 2000. – Vol. 38, no. 1. – P. 10–22.
14. Fu G. Theoretical study of complete contact indentations of viscoelastic materials // *Journal of Materials Science*. – 2004. – Vol. 39, no. 8. – P. 2877–2878.
15. Lyubicheva A. Closed-form solution of axisymmetric contact problem for a viscoelastic base within cycle of increasing and decreasing of load on the indenter // *Journal of Friction and Wear*. – 2018. – Vol. 38, no. 2. – P. 138–143.
16. Özkaya N., Nordin M., Goldsheyder D., Leger D. Mechanical properties of biological tissue // *Fundamentals of Biomechanics*. – Cham: Springer International Publishing, 2017. – P. 361–387.
17. Ting T.C.T. The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space // *Journal of Applied Mathematics*. – 1966. – Vol. 33, no. 4. – P. 845–854.
18. Vandamme M., Ulm F.-J. Viscoelastic solutions for conical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43, no. 10. – P. 3142–3165.

INDENTATION OF A CYLINDER WITH DIFFERENT SHAPE OF THE BASE INTO VISCOELASTIC HALF-SPACE

A.A. Yakovenko (Moscow, Russian Federation)

During developing medical equipment and processing results of experiments on the study of biomaterials, it is necessary to describe the process of interaction of the working tool with soft tissues. With this, it is important to take into account not only the mechanical properties of the tissue under study, but also the technical characteristics of the equipment, such as the shape of the tool surface and the speed of the interaction process. For this purpose, a contact model describing the indentation of an axisymmetric rigid cylinder with different foundation surface shape into viscoelastic half-space at a constant speed was constructed. The theory of linear viscoelasticity was used to describe the mechanical behavior of the half-space. A three-parameter model of a standard viscoelastic body was chosen as a viscoelastic model that defines the type of relaxation function of the half-space material. The distribution of contact pressure under the cylinder surface and the dependence of the applied load on the depth of indentation for various forms of the contact surface of the cylinder were obtained. The influence of the shape of the cylinder base surface, the indentation speed and the relaxation properties of the half-space on the characteristics of the contact interaction was

studied. For describing the mechanical behavior of biological tissues, a one-dimensional model of a standard viscoelastic body was also considered. For this simplified model, the distribution of the contact pressure under the surface of cylinder with different shape of the base and the dependence of the applied load on time were also obtained. The results obtained using the continuous model and the one-dimensional model were compared. It was shown when it is more appropriate to use the simplified models to describe the interaction of an instrument with biological tissue.

Key words: contact problem, indentation, viscoelasticity, Volterra principle, axisymmetric indenter, rotation body, cylinder.

Получено 7 июля 2020