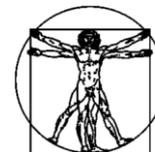


DOI: 10.15593/RZhBiomech/2020.1.04

УДК 531: 612



**Российский  
Журнал  
Биомеханики**  
www.biomech.ru

## **ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ САККАДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГЛАЗА**

**А.П. Кручинина**

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия, 119234, Москва, Ленинские горы, 1, e-mail: a.kruch@moids.ru

**Аннотация.** В данной статье обсуждается вопрос изучения быстрых целенаправленных движений глаз человека. Такие движения моделируются различными способами. Один из них – решение оптимальных задач. В предлагаемой работе рассматривается быстрое одиночное согласованное баллистическое движение глаз – саккада. Результатом решения задачи быстрого действия является уравнение движения глаза на саккаде. Система уравнений, описывающая движение глазного яблока и прилагаемого к нему со стороны глазодвигательной системы управляющего момента, основана на маятниковой модели. Особенность данной системы: все вводимые величины имеют физический смысл и выбраны на основе результатов опубликованных исследований. Ее основное отличие от имеющихся работ заключается в учете ограниченности скорости изменения управляющего момента, развиваемого парой глазодвигательных мышц. В этом случае разомкнутая система имеет два действительных корня и один нулевой. В статье проанализирован случай соотношения – частный случай соотношения действительных корней 1:3. В результате моделирования получены траектории, по своим характеристикам приближенные к наблюдаемым в экспериментальных исследованиях саккадам. На основе построенной модели проведено сравнение параметров синтезированных саккад с параметрами, полученными на экспериментальной выборке. Полученные модели могут использоваться как для задач физиологии и медицины, так и при построении сред виртуальной реальности. Например, при разработке пространственных интерфейсов использование математической модели позволяет оптимизировать расположение элементов путем применения теории игр.

**Ключевые слова:** саккада, движение глаз, задача быстрого действия, оптимальное управление, ограничение на скорость сокращения мышцы, моделирование движения, глазодвигательный аппарат.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Быстрые движения глаз человека относятся к наиболее сложным для изучения движениям в силу своей высокой скорости и труднодоступного для наблюдения расположения глазодвигательного аппарата. Тем не менее за последние десятилетия накоплен значительный экспериментальный и теоретический материал о движении глаз. Его осмысление и описание математическими моделями сегодня востребовано при создании тренажеров, имерсивных компьютерных сред и применении технологий виртуальной реальности, разработке и тестировании интерфейсов виртуальной реальности. При создании пространственного интерактивного интерфейса требования к его визуальной части возрастают. Процесс тестирования и настройки параметров

предлагается оптимизировать, применив симуляционные среды [10]. При подобном моделировании движения глаз человека можно имитировать, используя различные модели глазодвигательной системы и управления ею. При выборе математического описания одним из факторов является его чувствительность к возмущениям. В работе предложено моделирование быстрого движения глаза с использованием решения задачи быстрогодействия и проанализировано влияние возмущений в начальных условиях на траектории решения задачи.

В литературе опубликованы математические модели одиночных саккадических движений глаз [9]. Описание одиночной саккады в результате решения задачи быстрогодействия приведено в работе [4]. Однако эти работы не описывают некоторых существенных особенностей движения глаза. В частности, математические модели не описывают пре- и постсаккадические движения, описанные в работах [5, 7].

Анализ подобных особенностей движения глаз применяется в исследованиях высшей нервной деятельности человека, функционирования мозга и т.д. В связи с этим дальнейшее исследование задач моделирования представляет интерес.

### МОДЕЛЬ ГЛАЗА И ГЛАЗОДВИГАТЕЛЬНОГО АППАРАТА И ЕЕ ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Составим упрощенную модель, в которой глаз описывается твердым шаром. Учтем наличие сил вязкого сопротивления и силы упругости, действующей со стороны глазодвигательных мышц, глазного нерва и окружающих тканей. Считается, что вращение происходит вокруг геометрического центра шара. Оптический центр вращения глаза находится на расстоянии около 13 мм от передней вершины роговицы [12], и его можно считать неподвижным.

Рассмотрим движение глаза в горизонтальной плоскости. Необходимо отметить, что термин «горизонтальная плоскость» условен и означает движение, реализуемое парой внешней и внутренней прямых мышц.

Будем описывать глаз и глазодвигательную систему следующим уравнением:

$$I\ddot{\varphi} + \nu R\dot{\varphi} + kR\varphi = \tilde{M}, \quad (1)$$

где  $I$  – момент инерции глаза  $I = 4,6 \cdot 10^{-7}$  кг·м<sup>2</sup>;  $\varphi$  – угол поворота глаза,  $\nu$  и  $k$  – коэффициенты вязкости и упругости соответственно,  $\nu = 0,0023$  Н·с/м и  $k = 0,0043$  Н/м;  $R$  – радиус глаза,  $R = 12$  мм, и  $\tilde{M}$  – управляющая составляющая момента горизонтальной пары глазодвигательных мышц. Сокращение и расслабление мышц данной пары, как и всех скелетных мышц, происходит за характерные времена, оцениваемые по данным работы [11], 10 мс. Максимальное усилие, развиваемое глазодвигательными мышцами, составляет 0,4 Н [13]. В соответствии с этими данными ограничение на скорость изменения величины  $\tilde{M}$  положим равным 0,04 Н/с, так как значение момента  $|\tilde{M} - \nu R\dot{\varphi} - kR\varphi| \leq 0,4$  Н·м/с. Опишем изменение момента  $\tilde{M}$  дифференциальным уравнением

$$\frac{d\tilde{M}}{dt} = U, \quad (2)$$

где  $U$  – скорость изменения величины  $\tilde{M}$ . Таким образом, к уравнениям (1) и (2) добавляется ограничение

$$U \leq U^*. \quad (3)$$

### ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Задача, решаемая при помощи движения глаз, – максимизация времени, когда на сетчатке формируется четкое изображение. Исследование параметров четкого видения было проведено еще в прошлом веке, например, в работе [8]. Характерные значения отклонения и скорости движения изображения объекта по сетчатке глаза не должны превышать  $2^\circ$  и  $4^\circ/\text{с}$  соответственно. Следовательно, время, когда эти условия нарушаются, должно быть минимально.

Рассмотрим задачу перевода взора с одного объекта на другой, т.е. наискорейшего поворота глазного яблока из положения покоя ( $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ) на угол  $\varphi(T) = \varphi_f$ , с нулевой угловой скоростью в конечный момент времени  $\dot{\varphi}(T) = 0$ . Известно, что на момент начала движения момент  $\tilde{M}$  имеет порядок 10–20% от максимального. Не нарушая общности рассуждения, будем считать, что саккада начинается из положения, при котором  $M(0) = 0$ . Значение момента в конце движения также определяется однозначно из требуемого угла поворота.

Объединяя уравнения (1)–(2) с начальными и конечными условиями, а также с ограничением (3), получим формальную систему для задачи оптимального быстрогодействия.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Изложим основные шаги решения этой задачи.

Проведем замену переменных  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$ ,  $x_3 = \frac{\tilde{M}}{I}$  и введем обозначения  $A_1 = \frac{2\nu R}{I}$ ,  $A_2 = \frac{2kR}{I}$ ,  $u = \frac{U}{I}$ . Приведем систему (1)–(2) к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -A_2 x_1 - A_1 x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= u. \end{aligned} \quad (4)$$

Ограничения на управление и граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 0, \\ x_1(T) &= A_T, \\ x_2(T) &= 0, \\ x_3(T) &= -A_2 A_T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} |u| &\leq u_{\max}, \\ T &\rightarrow \min_u. \end{aligned} \quad (6)$$

Как и ранее, в выражениях (4)–(6)  $A_T$  – амплитуда саккады;  $M_T$  – момент силы, необходимый для фиксирования глаза в новом положении,  $M_T = -A_2 A_T$ ;  $T$  – продолжительность саккады.

Решение задачи осуществляется с помощью принципа максимума Понтрягина [1]. Обозначим через вектор  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  сопряженные переменные. Тогда функция Понтрягина записывается в форме

$$H = x_2 \psi_1 + (-A_2 x_1 - A_1 x_2 + x_3) \psi_2 + u \psi_3. \quad (7)$$

Максимальность функции Понтрягина достигается при управлении  $u = u_{\max} \operatorname{sign} \psi_3$ . Вид  $\psi_3$  определяется из сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = A_2 \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + A_1 \psi_2, \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2. \end{cases} \quad (7^*)$$

Условия трансверсальности имеют тривиальный вид и здесь выписываться не будут. Так как условие  $\psi_3 \equiv 0$  влечет тривиальное решение системы (7\*), то управление представляет собой кусочно-разрывную функцию вида

$$u = \begin{cases} u_m, & 0 \leq t < t_1 \text{ (I)}, \\ -u_m, & t_1 \leq t < t_2 \text{ (II)}, \\ u_m, & t_2 \leq t \leq T \text{ (III)}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $u_m = u_{\max}$  или  $u_m = -u_{\max}$ . Можно показать, что  $u_m = -u_{\max}$  не является решением задачи, поэтому рассмотрим случай  $u_m = u_{\max}$ .

Римскими цифрами обозначим номера интервалов, моменты времени переключения и окончания саккады – неизвестны. Определим их исходя из условий на правом и на левом концах.

Обозначим  $C_i^j$  постоянные в решении, здесь  $i = 1, 2, j = \text{I, II, III}$ , а через  $\lambda_i$  обозначим ненулевые собственные числа системы (4). В данном случае существует два действительных корня. Ряд подобных задач рассматривался в работах [2, 3], но случай с одним нулевым корнем остался нерассмотренным.

Решение на интервалах I, II и III примет вид

$$\begin{aligned} x_1^I &= C_1^I e^{\lambda_1 t} + C_2^I e^{\lambda_2 t} + \frac{u_m t}{A_2} - \frac{A_1 u_m}{A_2^2}, \\ x_2^I &= \lambda_1 C_1^I e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2^I e^{\lambda_2 t} + \frac{u_m}{A_2}, \\ x_3^I &= u_m t, \\ x_1^{II} &= C_1^{II} e^{\lambda_1 t} + C_2^{II} e^{\lambda_2 t} - \frac{u_m t}{A_2} + \frac{2u_m t_1}{A_2} + \frac{A_1 u_m}{A_2^2}, \\ x_2^{II} &= \lambda_1 C_1^{II} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2^{II} e^{\lambda_2 t} - \frac{u_m}{A_2}, \\ x_3^{II} &= 2u_m t_1 - u_m t, \\ x_1^{III} &= C_1^{III} e^{\lambda_1 t} + C_2^{III} e^{\lambda_2 t} + \frac{u_m t}{A_2} + \frac{2u_m(t_1 - t_2)}{A_2} - \frac{A_1 u_m}{A_2^2}, \\ x_2^{III} &= \lambda_1 C_1^{III} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2^{III} e^{\lambda_2 t} + \frac{u_m}{A_2}, \\ x_3^{III} &= u_m t + 2u_m(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Данную систему уравнений необходимо разрешить относительно неизвестных времен переключения  $t_1$ ,  $t_2$  и  $T$ . Постоянные решения  $C_i^j$  ( $i=1, 2, j=I, II, III$ ) определяются из условий непрерывности и гладкости решения и граничных условий. Произведем замену  $n_1 = e^{t_1}$ ,  $n_2 = e^{t_2}$ ,  $n_3 = e^T$ . Такая замена позволяет перейти к системе полиномиальных уравнений. Переменная  $n_3$  выражается следующим образом:

$$n_3 = e^{M_T} \frac{n_2^2}{n_1^2}.$$

Особенность системы (4), описывающей движение глаза, заключается в том, что для собственных чисел справедливо соотношение  $\lambda_2 \approx 3\lambda_1$ . Для полуаналитического решения примем, что равенство  $\lambda_2 = 3\lambda_1$  выполняется. В этом случае замена переменных  $z_1 = n_2^{\lambda_1}$  и  $z_2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\lambda_1}$  приводит к системе двух полиномиальных уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(z_1, z_2, \lambda_1) = 0, \\ F_2(z_1, z_2, \lambda_1) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где функции  $F_1(z_1, z_2, \lambda_1)$  и  $F_2(z_1, z_2, \lambda_1)$  имеют вид

$$\begin{aligned} F_1(z_1, z_2, \lambda_1) &= D_1 z_1^3 + D_2 z_1 z_2^4 + D_3 z_1^3 z_2^6 + D_4 z_2^9 - D_5 z_2^7 + D_6 z_2^6, \\ F_2(z_1, z_2, \lambda_1) &= 3\lambda_1 D_1 z_1^3 + 3\lambda_1 D_2 z_1 z_2^4 + 3\lambda_1 D_3 z_1^3 z_2^6 + D_7 z_2^9 - D_8 z_2^7 - D_9 z_2^6. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $D_i$  зависят исключительно от постоянных системы, начальных и конечных условий. Выражения этих коэффициентов громоздки, поскольку получаются при помощи пакетов символьных вычислений. Разность уравнений  $F_2(z_1, z_2, \lambda_1) - F_1(z_1, z_2, \lambda_1)3\lambda_1 = 0$  оказывается в силу  $\lambda_2 = 3\lambda_1$  линейным уравнением относительно  $z_1$ . Тогда  $z_1$  выражается следующим образом:

$$z_1 = \frac{2v_*(z_2 - 1)z_2^2 m^{\lambda_1} (3a_1 \lambda_1 + a_2)}{3a_1 \lambda_1 v_* z_2^2 m^{\lambda_1} - 3a_1 A_T \lambda_1 + a_2 v_* z_2^2 m^{\lambda_1} + 3a_2 \lambda_1 M_T - a_2 v_*}.$$

Подставив это выражение в одно из выражений (10), перейдем к уравнению девятого порядка относительно  $z_2$ :

$$a_1 z_2^9 + a_2 z_2^8 + \dots + a_0 = 0. \quad (11)$$

Аналогично коэффициентам  $D_i$  коэффициенты  $a_i$  уравнения (11) зависят от исходных коэффициентов системы. Для решения задачи оптимального управления необходимо найти наименьший положительный корень уравнения (11), превышающий единицу. Решение уравнения получено численно с помощью пакета *Wolfram Mathematica*.

Решение уравнения получено численно путем выбора действительного положительного корня больше единицы из девяти корней соответственного полинома.

Таким образом, возможно получить решение задачи быстрогодействия.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДИНОЧНОГО САККАДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГЛАЗА

Параметры модели движения глаза выберем, используя физиологические данные [8],  $\nu = 0,0023$  Н·с/м и  $k = 0,0043$  Н/м. Проведем расчет траекторий по формуле (9).

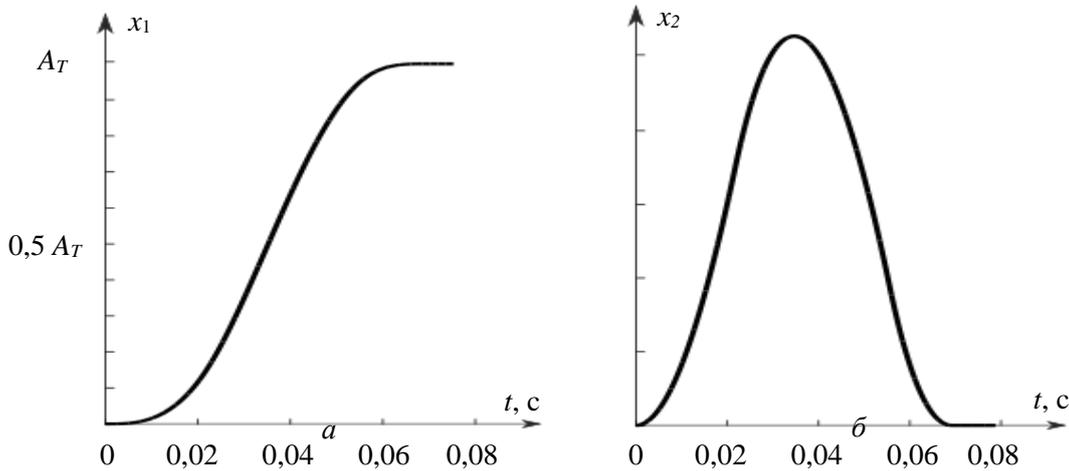


Рис. 1. Временная зависимость угла поворота глаза ( $a$ ) и скорости поворота глаза ( $b$ ) при нулевых начальных условиях

На рис. 1 показаны траектория глаза и график скорости при точном соответствии предполагаемых и реальных начальных условий.

При рассматривании объекта глаз совершает микросаккады, т.е. разворачивается на малые углы. Фактические начальные условия отличаются от нейтральных. Рассмотрим ситуацию, когда присутствует отклонение от нуля в начальных условиях при сохранении вида управления. Проанализируем отклонения в начальных условиях по каждой из компонент вектора состояния. На рис. 2 приведены графики для случаев, когда  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) < 0$ ,  $x_3(0) < 0$  ( $a, b$ ) и  $x_1(0) = 0,1A_T$ ,  $x_2(0) < 0$ ,  $x_3(0) < 0$  ( $в, z$ ).

При наличии подобных возмущений форма траектории меняется и можно говорить, что имеется траектория, схожая с наблюдаемой на экспериментальных записях. В работе [6] приведён способ аппроксимации экспериментальных записей гладкой функцией, и предложено несколько коэффициентов, описывающих форму саккады. Для сравнения теоретических результатов моделирования рассчитаем предложенные в работе [5] величины амплитуд пре- и постдвижений для модельных данных.

При возмущении в моменте или в начальной скорости получим, что пресаккада составляет 10% длительности и 10% продолжительности. Аналогичные параметры наблюдаются для саккад амплитудой 20–30 градусов [5, 6].

Таким образом модель оптимального управления, основанного на модели третьего порядка, позволяет описать появления пре- и постсаккад в результате управления, состоящего в решении задачи быстрогодействия при наличии возмущений в начальных условиях. Данное решение может использоваться для симуляции и моделирования перевода взора человеком с одной точки на другую. Такая задача возникает при проектировании и тестировании объемных интерактивных интерфейсов.

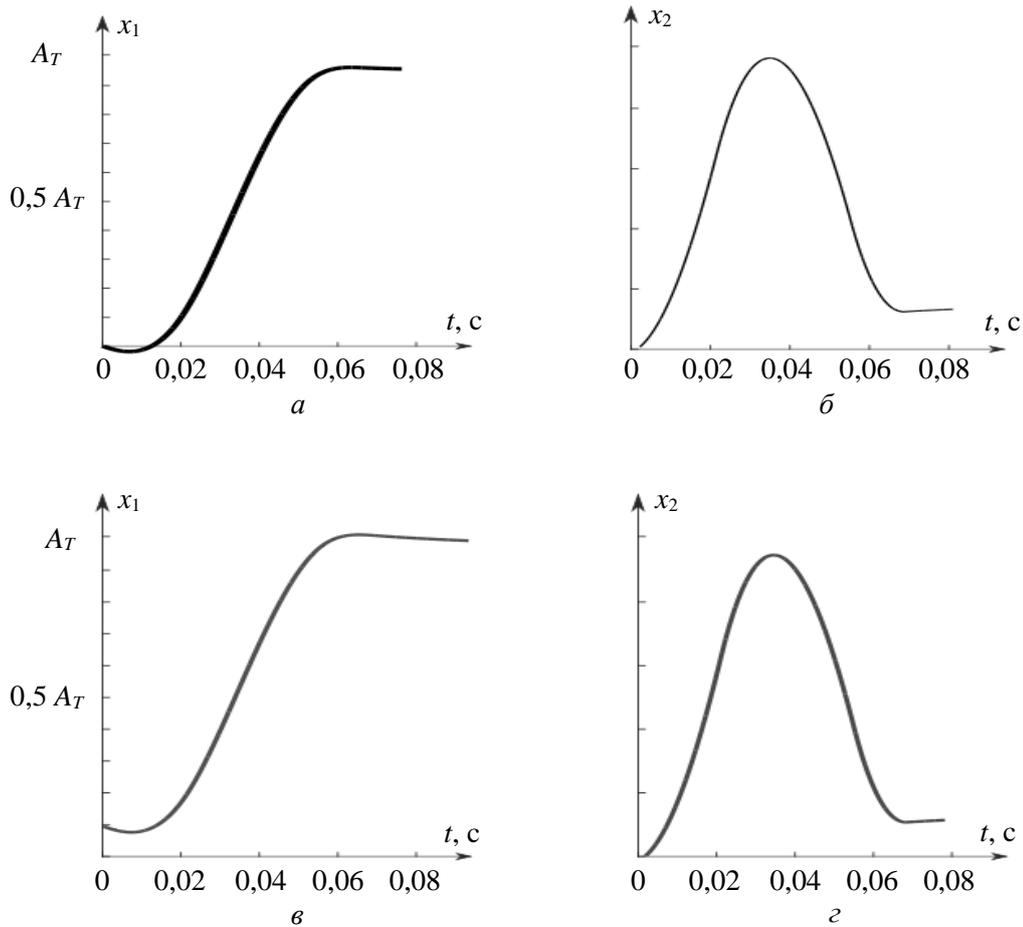


Рис. 2. Графики угла поворота глазного яблока и скорости при наличии отклонений в начальных условиях

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана грантом РФФИ 18-00-01590.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением: учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2005. – 376 с.
2. Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
3. Кручинин П.А., Касаткин Е.А. Стабилометрический тест со ступенчатым воздействием и задача оптимального быстрогодействия // Изв. ЮФУ. Техн. науки. – 2014. – № 10. – С. 254–260.
4. Кручинина А.П., Якушев А.Г. Математическая модель оптимального саккадического движения глаза, реализуемого парой мышц // Биофизика. – 2018. – Т. 63, № 2. – С. 334–341.
5. Кручинина А.П., Якушев А.Г. Параметризация траектории саккадического движения глаза // Вестн. Моск. ун-та. – 2018. – № 2. – С. 68.
6. Кручинина А.П., Якушев А.Г. Статистическое исследование форм одиночного саккадического движения глаза // Фундаментальная и прикладная математика. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 195–207.
7. Araujo C., Kowler E., Pavel M. Eye movements during visual search: the costs of choosing the optimal path // Vision Research. – 2001. – Vol. 41. – P. 3613–3625.
8. Burr D.C., Ross J. Contrast sensitivity at high velocities // Vision Research. – 1982. – Vol. 28. – P. 479–484.
9. Happee R. Time optimality in the control of human movements // Biological Cybernetics. – 1992. – Vol. 66. – P. 357–366.

10. Höllerera T., Feinera S., Hallawaya D., Bella B., Lanzagortab M., Brownb D., Julierb S., Baillotb Y., Rosenblumb L. User interface management techniques for collaborative mobile augmented reality // Computers & Graphics. – 2001. – Vol. 25, no. 5. – P. 799–810.
11. Marieb E., Hoehn K. Human anatomy and physiology. – San Francisco: Benjamin Cummings, 2010. – 8th edition. – 1114 p.
12. Moore K.L., Dalley A.F., Agur A.M.R. Clinically oriented anatomy. – Baltimore: Wolters Kluwer, 2013. – 7th ed. – 906 p.
13. Pfann K.D., Keller E.L., Miller J.M. Muscle tension during unrestrained human eye movements // Annals of Biomedical Engineering. – 1995. – Vol. 23. – P. 346–358.

## OPTIMAL TIME TASK IN SACCADIC EYE MOVEMENT

**A.P. Kruchinina (Moscow, Russian Federation)**

This article is devoted to fast goal-directed human eye movements. Such movements are described in few ways. One of them is the time-optimal problem model. In this work, the saccade – fast single conformable ballistic eye movement, is under consideration. Saccadic eye trajectory is described by time-optimal task solution. Differential equations system are based on pendulum model. It defines control moment applied from extraocular muscles to eye globe and movement of it. Main feature of the system is all values in suggested system have physical meaning and were found in published experimental investigations. Consideration of the moment applied from extraocular muscles to eye globe as control is main difference of the system from other models for eye movement in submitted works. In this case, the open-loop system has two real roots and one zero. The particular case of the ratio of real roots of 1:3 is analyzed in the article. As a result of modelling, trajectory characteristics closed to the saccades observed in experimental studies is obtained. On the basis of the constructed model, the parameters of the synthesized saccades were compared with the parameters obtained on the experimental sample. The obtained models can be used both for problems of physiology and medicine, and for constructing virtual reality environments. For example, when developing 3D interfaces, the use of a mathematical model makes it possible to optimize the elements arrangement using game theory.

**Key words:** saccade, eye movement, time-optimal problem, optimal control, single saccade.

*Получено 31 июля 2019*