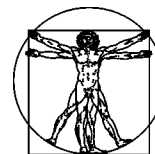


DOI: 10.15593/RZhBiomech/2020.1.07

УДК 531/534:[57+61]

**Российский
Журнал
Биомеханики**
www.biomech.ru

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ «ГИМНАСТА» В СВОБОДНОМ ПОЛЕТЕ И ПРИ ПЕРЕХОДЕ В РЕЖИМ КОНТАКТА С ОПОРОЙ

Э.К. Лавровский

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1, e-mail: lavrov@imec.msu.ru

Аннотация. В работе с теоретико-механических позиций обсуждаются некоторые аспекты соскока «спортсмена-гимнаста» (или «робота-гимнаста») с «перекладины». Рассматриваются все фазы соскока в плоском случае. Тело «гимнаста» моделируется трехзвенным физическим маятником, однако после отрыва его от «перекладины» и опускания «рук» моделью динамической системы становится уже двухзвенный маятник. Для двухзвенной модели в рамках режима «кинематического» управления изучается процесс опускания «рук», свободный полет, выход «ногами» на опору (абсолютно неупругий удар) и дальнейшее управление в опорной фазе с целью вертикальной стабилизации всей маятниковой системы. Режим «кинематического» управления означает возможность мгновенного изменения (в некоторых пределах) угла между звеньями тела. Для каждой из фаз движения найдены удобные формы описывающих ее динамических уравнений. Эти уравнения опираются на использование в качестве одной из переменных кинетического момента системы относительно различных точек тела или пространства. Порядок такой системы уравнений ниже, чем порядок полной системы. Стадия успокоения «гимнаста», возникающая после выхода ног на поверхность опоры, изучается также на основе специальной системы уравнений подобного типа. Показано, как с помощью численного анализа можно строить область управляемости для перехода двухзвенника в состояние стабилизации, отвечающее равенству горизонтальных координат опоры ног и центра тяжести двухзвенной маятниковой системы. Рассматривается методика построения стабилизирующего управления. Результаты представленного анализа задачи позволяют построить удобную приближенную модель явления в целом, а также использовать ее при управлении роботизированным аналогом. В качестве примера рассмотрен один из случаев движения, отвечающий антропоморфной модели.

Ключевые слова: соскок с перекладины, фазы движения, «кинематическое» управление, теоремы механики.

ВВЕДЕНИЕ

Турник и перекладина относятся к разряду наиболее популярных гимнастических снарядов. Естественно поэтому, что упражнения, которые человек способен выполнить на этих снарядах, методики тренировок спортсменов в стадии их освоения изучались с давних пор и являются материалом исследования до настоящего времени. Работе спортсмена на перекладине посвящены, в частности, монографии [1–5]. Еще более подробно представлен материал тренерских наработок, который, как правило, сопровождается подробными обучающими кинограммами работы спортсменов на перекладине [6–9]. На сайте [10], например, рассматриваются 42 наиболее популярных варианта соскока с перекладины. В ряде работ исследовался наиболее сложный тип соскока – с винтовыми вращениями вокруг оси тела [11–16].

Настоящая работа не ставит своей целью подробно изучать кинограммы всех стадий поведения спортсмена на перекладине и тем более различные сложные соскоки. В упомянутых выше работах достаточно полно представлена фактическая визуальная сторона самого упражнения. Но в них отсутствует какая-либо теоретико-механическая трактовка наблюдаемых движений спортсмена на различных его стадиях, имеющая как прикладной, так и естественно-научный интерес. Если принять во внимание упрощающее предположение о том, что наблюдаемое нами на перекладине реализуется за счет сочетания отдельных резких движений гимнаста и «замирания» его в достигнутых позах, то такой процесс может быть описан достаточно простыми формулами из теоретической механики. Такой подход, видимо, может быть успешно применен и для описания сложной фазы приземления гимнаста после соскока, которая в литературе практически не рассматривается. Строящаяся в результате математическая модель процесса достаточно проста, она может быть использована как в учебном процессе, так и для построения наглядного пособия «робота-гимнаста».

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Движение «гимнаста» моделируется в основном динамической системой, состоящей из двух весомых, с массами m_1, m_2 , скрепленных друг с другом стержней («корпус», «ноги»), совершающей свободное или управляемое плоское движение под действием единственной активной внешней силы – силы тяжести по оси y (рис. 1).

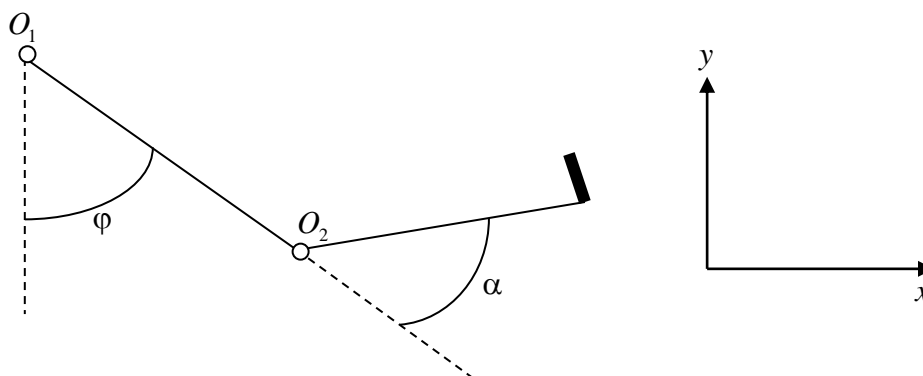


Рис. 1. Схема двухзвенной модели

Точка $O_1(x, y)$ – «вершина» первого (верхнего) стержня, точка O_2 – аналогичная вершина второго стержня и одновременно точка крепления стержней. Угол φ определяет наклон «верхнего» стержня к вертикали, угол α – межзвенный угол в точке контакта O_2 обеих стержней. Длины стержней l_1, l_2 ; величины r_1, r_2 определяют расстояния центров масс C_1, C_2 от соответствующих вершин. Не составляет особого труда выписать декартовы координаты точек O_2, C_1, C_2 и подсчитать затем кинетическую T и потенциальную W энергии всей системы. В результате могут быть построены уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} + Q,$$

где $L = T - W$, Q – управляющие моменты.

Динамическая система имеет четыре степени свободы $q = x, y, \varphi, \alpha$.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМЫ

Обратимся сначала к очевидным первым интегралам динамической системы. Найдем координаты центра масс системы стержней, имеем

$$\begin{aligned} x_c &= x + \frac{m_1 r_1 + m_2 l_1}{m_1 + m_2} \sin \varphi + \frac{m_2 r_2}{m_1 + m_2} \sin(\varphi + \alpha), \\ y_c &= y - \frac{m_1 r_1 + m_2 l_1}{m_1 + m_2} \cos \varphi - \frac{m_2 r_2}{m_1 + m_2} \cos(\varphi + \alpha). \end{aligned} \quad (1)$$

В свободном полете имеют место следующие интегралы движения; g – ускорение силы тяжести; t – время; $x_{c0}, \dot{x}_{c0}, y_{c0}, \dot{y}_{c0}$ – начальные значения соответствующих координат,

$$x_c = x_{c0} + \dot{x}_{c0} \cdot t, \quad y_c = y_{c0} + \dot{y}_{c0} \cdot t - 0,5gt^2. \quad (2)$$

В задаче существует также еще один интеграл, вытекающий из теоремы о кинетическом моменте при движении системы вокруг общего центра масс. Найдем координаты центров масс звеньев относительно этого общего центра масс системы:

$$x_{c1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \{(r_1 - l_1) \sin \varphi - r_2 \sin(\varphi + \alpha)\}; \quad y_{c1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \{(l_1 - r_1) \cos \varphi + r_2 \cos(\varphi + \alpha)\};$$

$$x_{c2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \{(l_1 - r_1) \sin \varphi + r_2 \sin(\varphi + \alpha)\}; \quad y_{c2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \{(r_1 - l_1) \cos \varphi - r_2 \cos(\varphi + \alpha)\},$$

и подсчитаем в осях Кенига кинетические моменты звеньев относительно общего центра масс. Например, для «первого» звена имеем $\bar{K}_1 = m_1[\bar{r}_{C1} \times \bar{v}_{C1}] + \bar{k}I_1(C_1)\dot{\varphi}$, где \bar{k} – орт оси z , перпендикулярный плоскости движения; $I_1(C_1)$ – центральный момент инерции звена; \bar{r}_{C1} и \bar{v}_{C1} – радиус-вектор и скорость центра масс звена. Обозначая через K_1, K_2 модули моментов первого и второго звена по орту \bar{k} , можем записать

$$K_1 = I_1(C_1)\dot{\varphi} + \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \Phi(\varphi, \alpha, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}), \quad K_2 = I_2(C_2)(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \Phi(\varphi, \alpha, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}),$$

где $\Phi(\varphi, \alpha, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}) \equiv \{\dot{\varphi}[(l_1 - r_1)^2 + r_2^2 + 2r_2(l_1 - r_1)\cos \alpha] + \dot{\alpha}[r_2^2 + r_2(l_1 - r_1)\cos \alpha]\}$, откуда вытекает, что искомым суммарный кинетический момент

$$K_\Sigma = [I_1(C_1) + I_2(C_2)]\dot{\varphi} + I_2(C_2)\dot{\alpha} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Phi(\varphi, \alpha, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}).$$

Поскольку силы веса относительно общего центра масс крутящего момента не создают, имеем еще один первый интеграл

$$K_\Sigma \equiv K_0. \quad (3)$$

Разумеется, соотношения (2) и (3) можно также получить из невыписанных ранее уравнений Лагранжа.

«ОТРЫВ» ГИМНАСТА ОТ «ПЕРЕКЛАДИНЫ»

Будем считать, что «гимнаст», моделируемый трехзвенным маятником («руки», «корпус» и «ноги»), первоначально находился в распрямленном состоянии («корпус», «ноги» и «руки» образуют прямую линию) при отрицательных значениях угла φ , с захватом руками «перекладины». За счет свободного «кача» вниз, сопровождаемого ростом угла φ , он набирает определенную кинетическую энергию, его руки в какой-то момент отрываются от перекладины, и пусть они очень быстро опускаются вниз, вдоль корпуса; после чего руки вместе с корпусом сливаются и в дальнейших фазах движения будут рассматриваться как единое, «верхнее» звено теперь уже двухзвенного маятника, нижнее его звено по-прежнему составляют ноги. С помощью интегралов движения опишем мгновенную фазу опускания рук, когда угол γ (отсчитываемый от «корпуса» до «рук» против часовой стрелки) меняется от значения π до нуля (либо до 2π).

Для трехзвенного маятника («руки», «корпус» и «ноги»), нижние два звена которого всегда распрямлены, а дополнительное звено («руки») составляет с первыми двумя переменный угол γ , также нетрудно подсчитать положение общего центра масс системы, происшедшее после отрыва первоначально выпрямленных «рук» и сопровождавшееся изменением угла γ . Оно описывается соотношениями вида

$$\begin{aligned} x_{ca} &= x(\varphi, \gamma) + \lambda[m_1 r_1 + m_2(l_1 + r_2)] \sin \varphi + \lambda m_a [l_{sh} \sin \varphi + r_a \sin(\varphi + \gamma)] \equiv \\ &\equiv x(\varphi_0, \pi) + \lambda[m_1 r_1 + m_2(l_1 + r_2)] \sin \varphi_0 + m_a \lambda [l_{sh} \sin \varphi_0 + r_a \sin(\varphi_0 + \pi)], \\ y_{ca} &= y(\varphi, \gamma) - \lambda[m_1 r_1 + m_2(l_1 + r_2)] \cos \varphi - m_a \lambda [l_{sh} \cos \varphi + r_a \cos(\varphi + \gamma)] \equiv \\ &\equiv y(\varphi_0, \pi) - \lambda[m_1 r_1 + m_2(l_1 + r_2)] \cos \varphi_0 - m_a \lambda [l_{sh} \cos \varphi_0 + r_a \cos(\varphi_0 + \pi)], \end{aligned} \quad (4)$$

где l_{sh} – расстояние от «макушки» O_1 до «плеча» (точки крепления «рук»); m_a, r_a – соответственно масса «рук» и расстояние от «плеча» до центра масс «рук»; наконец, φ_0 – значение угла «корпуса» φ в момент отрыва «рук» от «перекладины», когда все три звена составляли одну прямую линию. Здесь x_{ca}, y_{ca} – координаты общего центра масс системы, остающиеся неизменными в течение быстрого маневра по углу γ , а $\lambda = 1/(m_1 + m_2 + m_a)$. Формулы (4) позволяют определить координаты макушки x, y как функций от φ, γ . Однако если значение угла γ после опускания рук известно, то величина другого угла φ еще подлежит определению. Заметим, что следует отличать, как, впрочем, и всюду в дальнейшем, движение гимнаста «махом вперед», когда угол γ из начального положения «хвата» $\gamma = \pi$ переходит в положение $\gamma = 0$. Для движения «махом назад» соответственно имеем $\gamma = \pi$ и $\gamma = 2\pi$. Характер движения опускания рук сказывается на угловом перемещении тела.

Можно показать, что кинетический момент «рук» относительно общего центра масс трехзвенника определяется выражением

$$\begin{aligned} K_3 &= I_a(\dot{\varphi} + \dot{\gamma}) + \dot{\varphi} m_a \{r_a^2(1 - \lambda m_a)^2 + (\lambda \eta - l_{sh})^2 + \cos \gamma \cdot 2r_a(\lambda m_a - 1)(\lambda \eta - l_{sh})\} + \\ &+ \dot{\gamma} m_a \{r_a^2(1 - \lambda m_a)^2 + \cos \gamma \cdot r_a(\lambda m_a - 1)(\lambda \eta - l_{sh})\}, \end{aligned}$$

а кинетический момент «корпуса» вместе с «ногами»

$$\begin{aligned} K_{12} &= I_{12}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}(m_1 + m_2)\{\lambda^2 m_a^2 r_a^2 + (\lambda \eta - r_{12})^2 + \cos \gamma \cdot 2m_a r_a \lambda(\lambda \eta - r_{12})\} + \\ &+ \dot{\gamma}(m_1 + m_2)\{\lambda^2 m_a^2 r_a^2 + \cos \gamma \cdot m_a r_a \lambda(\lambda \eta - r_{12})\}. \end{aligned}$$

Здесь I_a и I_{12} – соответствующие моменты инерции этих тел относительно центра масс трехзвенника, r_{12} характеризует положение центра масс тела «корпус» – «ноги», введено обозначение $\eta = m_1 r_1 + m_2 (l_1 + r_2) + m_a l_{sh}$; кроме того, предполагается, что в течение процедуры «присоединения» рук к корпусу положение центра масс (x_{ca}, y_{ca}) трехзвенника неизменно. В результате получаем следующий первый интеграл

$$K_{\Sigma} \equiv K_{12} + K_3 = I_{12} \dot{\phi} + I_a (\dot{\phi} + \dot{\gamma}) + \lambda m_a (m_1 + m_2) \{ \dot{\phi} [r_a^2 + (l_{sh} - r_{12})^2 + \cos \gamma \cdot 2r_a (l_{sh} - r_{12})] + \dot{\gamma} [r_a^2 + \cos \gamma \cdot r_a (l_{sh} - r_{12})] \} \equiv K_0 (> 0). \quad (5)$$

Этот суммарный кинетический момент имеет такую же структуру, как и выражение K_{Σ} в (3). Очевидна и сопоставимость обоих выражений кинетических моментов: с точностью до естественной замены обозначений здесь возникают все члены, так сказать, старого типа. Используя дифференциальное соотношение (5), нетрудно определить разворот тела по углу ϕ , когда процедура опускания рук задана. Другой, эквивалентный метод, заменяющий необходимость интегрирования именно этого дифференциального уравнения, представлен в следующем разделе; он чуть строже и проще.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ, СВОБОДНЫЙ ПОЛЕТ ТЕЛА

Вслед за опусканием рук и далее, вплоть до режима успокоения при постановке ног на опору, тело гимнаста будем рассматривать как двухзвенный маятник. Сначала он совершает свободный полет. Станем всюду на точку зрения кинематической постановки задачи и будем считать, что управлением является не момент сил, а сам угол α , изменяющийся в ограниченных пределах:

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad \alpha_{\min} \leq 0 \leq \alpha_{\max} < \pi. \quad (6)$$

Тогда интегралы (2) являются апостериорными, т.е. служат для определения координат x, y . Основным же является интеграл (3), который для удобства несколько преобразуем:

$$K_0 = \dot{\phi} [a + b \cos \alpha] + \dot{\alpha} [A + B \cos \alpha],$$

$$\text{где } a = I_1(C_1) + I_2(C_2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [(l_1 - r_1)^2 + r_2^2], \quad b = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} 2(l_1 - r_1)r_2, \quad A = I_2(C_2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_2^2,$$

$$B = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (l_1 - r_1)r_2.$$

Все значения A, a, B, b по физике задачи – положительные величины. Деля обе части интеграла на $(a + b \cos \alpha)$ и вводя в рассмотрение [17,18] новую переменную

$$p = \phi + \int \frac{A + B \cos \alpha}{a + b \cos \alpha} d\alpha,$$

получаем наряду с интегралом (3) дифференциальное соотношение

$$\frac{dp}{dt} = \frac{K_0}{a + b \cos \alpha}. \quad (7)$$

Удобство рассмотрения переменной p состоит в том, что она не рвется в отличие от угловых переменных ϕ, α , которые рвутся, когда управление α меняется скачком. В случае же плавного изменения α переменная p просто реализует связь углов ϕ, α ; поскольку $a > b$ и $2B = b$, имеем

$$p = \varphi + \frac{\alpha}{2} + (2A - a) \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{I_1(C_1) + I_2(C_2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (l_1 - r_1 + r_2)^2}. \quad (8)$$

При кинематической постановке задачи алгоритм ее решения на стадии свободного полета выглядит следующим образом: задавая закон управления $\alpha = \alpha(t)$, удовлетворяющий неравенству (6), интегрируем уравнение (7). При этом в каждый момент времени определяется значение p , по нему с помощью (8) находим текущее φ . Наконец, используя (1) и (2), определяем величины x_c, y_c , а учитывая, что известны значения углов φ, α , находим и величины x, y . Таким образом, знание шести постоянных – пяти интегралов $x_{c0}, \dot{x}_{c0}, y_{c0}, \dot{y}_{c0}, K_0$ и начального значения угла φ_0 позволяет полностью построить все решение на этом этапе.

Одним из условий зрелищности полета гимнаста является «набор» им в фазе полета при $t \in [T_1, T_2]$ максимально большого угла разворота корпуса φ . Суммарное изменение угла φ складывается из его скачков в моменты T_1 и T_2 (поскольку переход в полет и выход на опору могут сопровождаться скачком по углу α) и из изменения его внутри интервала $t \in (T_1, T_2)$, которое связано с характером управления по α на этом интервале. Если интервал (T_1, T_2) достаточно протяженный, то в первую очередь надо стремиться к максимальному «набору» разности $p(T_2 - 0) - p(T_1 + 0)$, т.е. к движению, например, в случае «махом вперед» в режиме $\alpha \equiv \alpha_{\max}$, при котором маятник максимально «сложен», а правая часть уравнения (7) максимальна.

«СОСКОК» – ВЫХОД СИСТЕМЫ НА ОПОРУ

Прежде чем исследовать ситуацию выхода тела на опору после фазы свободного полета, которая сопровождается наложением связи и ударом, следует оговорить ряд предположений. Будем считать удар абсолютно неупругим, а связь удерживающей – «гимнаст» как бы приземляется на мягкие маты без отскока. Тело «гимнаста» перед самым выходом на опору может мгновенно, скачком (по углу α), изменить свою конфигурацию с тем, чтобы ноги оказались почти в ситуации контакта с поверхностью; затем как твердое тело выйти непосредственно с ударом на опору и уже, оказавшись на опоре, может снова скачком изменить конфигурацию, а затем продолжить свое движение далее, управляясь неким образом и оставаясь на опоре, вплоть до его окончания.

Условия, приводящие к успешному завершению всего процесса соскока, можно также трактовать по-разному. Если считать, что «гимнаст» обладает достаточно мощной управляемой (и при этом невесомой) стопой, то распределение скоростей в динамической системе после удара, видимо, не представляет интереса – достаточно только, чтобы горизонтальная координата центра масс системы x_c в момент удара была близка к координате P – условной точки контакта ноги с поверхностью. Иными словами, считается, что в случае жесткой фиксации межзвенного угла двухзвенник в дальнейшем не опрокинется. Это – успешный соскок в «грубом», статическом смысле.

Другая, «динамическая», версия условий завершения процесса требует учета явления удара. Пусть «гимнаст» не имеет или не использует стопу. Обратимся к рис. 2 и введем в рассмотрение, помимо φ, α , еще и угол ψ . Точка P («пятка») – точка контакта двухзвенника с опорой. Перенесем начало координат в точку P и найдем

координаты точек O_2, C_1, C_2 через углы ψ, α , используя зависимость между всеми тремя углами $\pi/2 - \varphi = \pi - (\psi - \alpha)$. Аналогичным ранее описанному способом нетрудно подсчитать кинетические моменты звеньев системы относительно точки P и их суммарный момент:

$$K_{\Sigma}^{\bullet} = [I_2(C_2) + m_2 \dot{r}_2^2] \dot{\psi} + I_1(C_1)(\dot{\psi} - \dot{\alpha}) + m_1 [\dot{\psi}(l_2^2 + \dot{r}_1^2 + 2l_2 r_1 \cos \alpha) - \dot{\alpha}(\dot{r}_1^2 + l_2 \dot{r}_1 \cos \alpha)] \equiv \dot{\psi} \{a_{\bullet} + b_{\bullet} \cos \alpha\} - \dot{\alpha} \{A_{\bullet} + B_{\bullet} \cos \alpha\},$$

где $\dot{r}_1 = l_1 - r_1$, $\dot{r}_2 = l_2 - r_2$ и $a_{\bullet} = I_1(C_1) + I_2(C_2) + m_1(l_2^2 + \dot{r}_1^2) + m_2 \dot{r}_2^2$, $b_{\bullet} = 2m_1 l_2 \dot{r}_1$, $A_{\bullet} = I_1(C_1) + m_1 \dot{r}_1^2$, $B_{\bullet} = m_1 l_2 \dot{r}_1$.

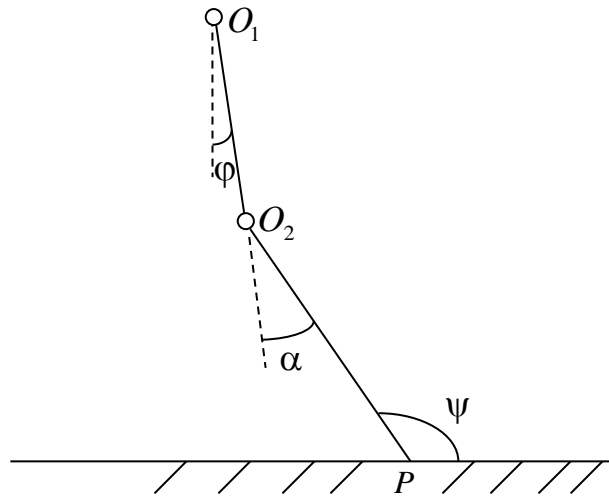


Рис. 2. Схема двухзвенника в фазе опоры

Вводя в рассмотрение новую переменную p_{\bullet} взамен прежней p , приходим к системе условий

$$\frac{dK_{\Sigma}^{\bullet}}{dt} = g \{-m_2 \dot{r}_2 \cos \psi - m_1 [l_2 \cos \psi + \dot{r}_1 \cos(\psi - \alpha)]\}, \quad \frac{dp_{\bullet}}{dt} = \frac{K_{\Sigma}^{\bullet}}{a_{\bullet} + b_{\bullet} \cos \alpha},$$

$$p_{\bullet} = \psi - \int \frac{A_{\bullet} + B_{\bullet} \cos \alpha}{a_{\bullet} + b_{\bullet} \cos \alpha} d\alpha \equiv \psi - \frac{\alpha}{2} - (2A_{\bullet} - a_{\bullet}) \frac{1}{\sqrt{a_{\bullet}^2 - b_{\bullet}^2}} \times$$

$$\times \arctg \frac{\sqrt{a_{\bullet}^2 - b_{\bullet}^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{I_1(C_1) + I_2(C_2) + m_1(l_2 + \dot{r}_1)^2 + m_2 \dot{r}_2^2}.$$

Уравнения (9) описывают управляемую опорную фазу двухзвенника, т.е. события, которые происходят после «приземления» в момент T_2 . Осталась неосвещенной фаза самого удара в этот момент. В отличие от управляемых фаз полета и опоры, когда угол α может меняться скачком, эта фаза сопровождается только скачком скоростей – углы φ, α, ψ остаются такими же, как и накануне выхода на контакт с опорой. Вычислив данные скачки, можно найти начальное значение величины кинетического момента K_{Σ}^{\bullet} и, воспользовавшись (9), исследовать всю фазу опоры.

Запишем закон изменения кинетического момента [19] относительно произвольной точки; здесь – точки контакта двухзвенника P с опорой:

$$\frac{d\bar{K}_P}{dt} + M[\bar{v}_P \times \bar{v}_C] = \sum [\bar{r}_P \times \bar{F}_P] + [\bar{r}'_C \times M\bar{g}] + \bar{M}, \quad (10)$$

где \bar{K}_P – кинетический момент динамической системы в точке P (построенный на относительных радиусах-векторах и абсолютных скоростях материальных точек тела); $\bar{v}_P = 0$ – абсолютная скорость точки P ; \bar{v}_C – абсолютная скорость центра масс системы. Правая часть соотношения – суммарный момент действующих на систему внешних сил и моментов. Активный внешний импульсный момент $\bar{M} = 0$ ввиду отсутствия стопы. На систему действуют также две внешние силы: ударная \bar{F}_P и конечная сила тяжести $M\bar{g}$, приложенные соответственно в точке P и в центре масс. $\bar{r}_P = 0$ – радиус-вектор в точку прилагаемой силы реакции \bar{F}_P из полюса P ; \bar{r}'_C – относительный радиус-вектор центра масс. Интеграл по времени правой части соотношения (10) очевидно стремится к нулю вместе с временем фазы удара. Тем самым кинетический момент $\bar{K}_P(t)$ в течение фазы удара не меняется: он остается тем же, каким стал после управляемого участка со скачком угла α при $t = T_2 - 0$, обеспечивающим двухзвеннику опору. Этот кинетический момент можно подсчитывать относительно упрежденной точки P еще до участка скачка угла α при $t = T_2 - 0$: ведь по той же формуле во время скачка на систему действуют только моменты внутренних сил и сила веса.

УСПОКОЕНИЕ ТЕЛА В ФАЗЕ ОПОРЫ

Сформулируем теперь условие корректности соскока с точки зрения «динамического» подхода. Значения $K_{\Sigma}^{\bullet}, p_{\bullet}$ в момент $(T+0)$ начала фазы опоры известны. Нужно стремиться так управлять углом α , чтобы в момент времени, когда величина K_{Σ}^{\bullet} в первый раз обратится в нуль (это «предварительное» условие успокоения), горизонтальная координата центра масс системы x_{cP} относительно точки P равнялась бы соответствующей координате $x_p = 0$ точки опоры. На этапе окончательного успокоения допускается дополнительный «скачок» угла α за счет внутренних моментов сил, он не меняет получившегося нулевого значения кинетического момента K_{Σ}^{\bullet} . Требуется, чтобы в конце существовало такое значение α в его возможном диапазоне изменения $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, при котором $x_{cP}(p_{\bullet}, \alpha) = x_p$. Иными словами, в конце этапа «предварительного успокоения» должны выполняться условия

$$x_p = 0 = x_{cP} = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1(l_2 \cos \psi + \dot{r}_1 \cos(\psi - \alpha)) + m_2 \dot{r}_2 \cos \psi], \quad (11)$$

$$\psi = p_{\bullet} + \frac{\alpha}{2} + (2A_{\bullet} - a_{\bullet}) \frac{1}{\sqrt{a_{\bullet}^2 - b_{\bullet}^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_{\bullet}^2 - b_{\bullet}^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{I_1(C_1) + I_2(C_2) + m_1(l_2 + \dot{r}_1)^2 + m_2 \dot{r}_2^2},$$

т.е. величина p_{\bullet} в результате должна оказаться в пределах некоторого интервала Δ , который позволял бы построить требуемые величины углов ψ , α , связанные условиями (11).

Чтобы понять, возможно ли это, необходимо ходом назад строить достижимые экстремальные значения по p_{\bullet} – $p_{\bullet\max}$ и $p_{\bullet\min}$ в каждый момент времени на этапе «предварительного успокоения»; это делается, например, с помощью метода «фазовой воронки» [17]. Детали данного метода ниже поясняются на численном примере. Он связан с рассмотрением антропоморфной модели [17, 20], имеющей следующие масс-инерционные характеристики:

- корпус вместе с головой – однородный стержень массой 38,4 кг и длиной от таза до макушки 0,8 м;
- вытянутые руки – однородный стержень массой 9 кг и длиной 0,69 м, соединенный с корпусом в плече, расстояние от плеча до макушки 0,3 м;
- ноги – стержень массой 26 кг и длиной 0,95 м, расстояние от таза до центра масс ног 0,415 м, момент инерции ног в точке таза 6,3 кг·м²;
- общий рост (руки опущены) 1,75 м, общая масса 73,4 кг. Наконец, $\alpha \in [0, 2\pi/3]$ при движении «махом вперед» и $\alpha \in [-2\pi/3, 0]$ при движении «махом назад».

При данных антропоморфных параметрах рассмотрим случай отрыва от перекладины, закрепленной на высоте 2,5 м от горизонтали, в положении вертикального виса $\varphi_0 = 0$ тела, имеющего полную энергию, равную примерно 2,5 потенциальной энергии виса распрямленного тела в верхнем положении, т.е. головой вниз с опорой на перекладину. Это высокоэнергетическое условие, обуславливающее сложный режим успокоения. При движении «махом вперед» за счет процедуры опускания рук угол φ увеличивается примерно на 0,1 радиана. В стадии свободного полета он увеличивается еще примерно на 4π радиан (гимнаст делает два оборота). Гимнаст касается опоры через 0,42 с, точка касания P по горизонтали отклонена от уровня перекладины примерно на 5 м. Начальные величины динамических параметров двухзвенника в фазе опоры следующие:

$$(K_{\Sigma}^{\bullet})^0 \approx -134 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}, p_{\bullet}^0 \approx 5,33 \text{ рад.} \quad (12)$$

Из уравнений (9) вытекает, что переменная $p_{\bullet} > 0$ и ввиду $(K_{\Sigma}^{\bullet})^0 < 0$ убывает, а

$$\frac{d\chi}{dp_{\bullet}} = -2Mg \cdot x_{cP}(p_{\bullet}, \alpha) \cdot (a_{\bullet} + b_{\bullet} \cos \alpha), \quad \chi = (K_{\Sigma}^{\bullet})^2. \quad (13)$$

Обозначим правую часть дифференциального условия в (13) как $f(p_{\bullet}, \alpha)$. К примеру, будем ориентироваться на движение «махом вперед». Поскольку для данной модели $a_{\bullet} > b_{\bullet} > 0$, то знак $f(p_{\bullet}, \alpha)$ зависит исключительно от знака горизонтальной координаты центра масс x_{cP} . За счет перебора различных значений α можно оценить при каждом p_{\bullet} наименьшее и наибольшее значения этой координаты – $x_{cP}^{\min}, x_{cP}^{\max}$. Численные расчеты показывают, что при движении «махом вперед» разные знаки у $x_{cP}^{\min}(p_{\bullet}), x_{cP}^{\max}(p_{\bullet})$ при переборе по α наблюдаются только в диапазоне величин $p_{\bullet} \in [4,59, 4,71]$ ($\pm k\pi$ одновременно для обеих величин в квадратной скобке). Это и есть искомый диапазон Δ . Всюду при $2\pi > p_{\bullet} > 4,71$ экстремальные значения функции f по $\alpha \in [0, 2\pi/3]$ – $f_{\max}(p_{\bullet})$ и $f_{\min}(p_{\bullet})$ – неотрицательны, т.е. функция χ убывает. Из точки $\chi = 0, p_{\bullet} = 4,59$, где $f_{\max} = 0$ (x_{cP}^{\min} переходит с плюса на минус), можно ходом

назад «вытянуть» решение – график интеграла $\mu(p_{\bullet}) = \int_{4,59}^{p_{\bullet}} f_{\max}(q) dq$; а из точки $\chi = 0,$

$p_{\bullet} = 4,71$, где $f_{\min} = 0$ (с плюса на минус переходит x_{cP}^{\max}), – график $\nu(p_{\bullet}) = \int_{4,71}^{p_{\bullet}} f_{\min}(q) dq$.

Пусть начальная точка $(p_0^0, \chi_0 = (K_\Sigma^*)^0)$ при $1,5\pi \approx 4,71 \leq p_0^0 \leq 2\pi$ лежит между графиками $\mu(p_0)$ и $\nu(p_0)$ – именно это имеет место для начальной точки (12). Тогда существует бесконечно большой набор управлений $\alpha^*(t)$, при которых в конце реализуется («успешная» для процесса успокоения) точка $(K_\Sigma^* = 0, \tilde{p}_0)$ из Δ . Сказанное иллюстрирует схематический график на рис. 3.

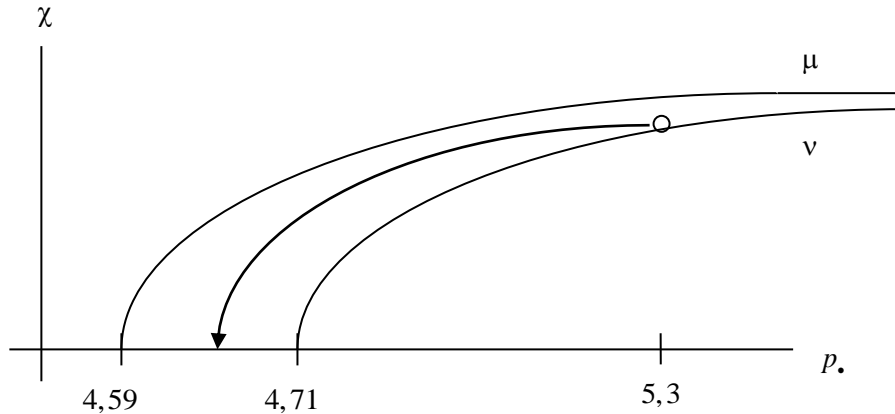


Рис. 3. Схема успокоения двухзвенника в фазе опоры

Любое решение системы (9) в прямом времени – с убывающими величинами χ и p_0 – не может пересечь кривую μ сверху, так как для этого оно должно иметь еще большую производную $d\chi/dp_0$ в точке пересечения: это, как показал режим построения решения в обратном времени, невозможно. Точно так же не может пересечь оно и кривую ν снизу, обладающую наименьшей той же производной. Иными словами, все внешние режимы движения – слева от кривой μ и справа от кривой ν – не могут быть «успешными», поскольку при $\chi = 0$ они не приводят переменную p_0 внутрь диапазона Δ . В то же время обратное утверждение неверно, т.е. за счет неудачного режима управления изображающая точка (χ, p_0) может нарушить границу, так сказать, «успешной» зоны, и вернуть ее назад уже не удастся.

Сказанное выше позволяет разными способами построить и синтезирующее управление $\alpha^*(K_\Sigma^*, p_0)$, сводящее процесс успокоения к некоторой «успешной» точке на отрезке Δ в случае выбора начальной точки внутри – между кривыми μ и ν (точнее между кривой μ и осью p_0 , если $p_0 \in (4,59, 4,71)$). Действительно, полоса управляемости, лежащая между кривыми μ и ν , достаточно широка, и следует лишь стараться удерживать точку (p_0, χ) в стороне от границ этой области. При заданном p_0 для выбора такого управления α^* есть целая полоса значений между $\alpha_{\max}^*(p_0)$ и $\alpha_{\min}^*(p_0)$, отвечающих величинам $f_{\max}(p_0)$, $f_{\min}(p_0)$; если точка (p_0, χ) расположена «ближе» к графику $\mu(p_0)$, то следует больше ориентироваться на управление $\alpha_{\min}^*(p_0)$, и, наоборот, следует ориентироваться на управление $\alpha_{\max}^*(p_0)$, если ближе другой график $\nu(p_0)$. Даже возможны различные варианты построения непрерывного управления $\alpha^*(p_0)$.

Из сказанного следует, что предшествующие фазы соскока играют важную роль при завершении соскока, поскольку они должны обеспечить нужную точку (p_*, χ_0) в начале этапа успокоения. Спортсмен-гимнаст «вырабатывает» чувство необходимых величин p_* за счет многочисленных тренировочных прыжков. В случае «гимнаста-робота» необходимые p_* определяются за счет предварительного численного моделирования всего процесса.

Выводы

1. В предположении кинематического характера управления телом спортсмена, рассматриваемого при соскоке с перекладины как двух- или трехзвенный маятник, все этапы этого упражнения описываются достаточно простыми (иногда даже конечными формулами) теоретической механики. В основе предлагаемой модели лежит рассмотрение поведения кинетического момента динамической системы. Соскок рассматривается как плоский, происходящий в сагиттальной плоскости.

2. Наиболее сложным этапом упражнения с точки зрения описания его в механике является успокоение гимнаста после приземления. С помощью рассмотрения «фазовой воронки» в пространстве «угол – кинетический момент» удается построить область для начальной фазы успокоения, которая обеспечивает при правильном управлении в дальнейшем успешное завершение соскока. В данной постановке не учитываются дополнительные возможности спортсмена за счет использования им, например, момента в голеностопе.

3. Рассматривая весь процесс с конца, т.е. с этапа успокоения после соскока, несложно построить все упражнение, найти начальные условия после отрыва от перекладины, которые обеспечивают успешное выполнение тех или иных вариантов упражнения. Это обстоятельство следует иметь в виду прежде всего при построении в учебных целях гимнаста-робота.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баршай В.М., Курьсь В.Н., Павлов И.Б. Гимнастика. – М.: КРОНУС, 2016. – 312 с.
2. Воронов А.В., Лавровский Э.К. Определение масс-инерциальных характеристик ноги человека // Физиология человека. – 1998. – № 2. – С. 91–101.
3. Гавердовский Ю.К. Упражнения на перекладине. – М.: ФиС, 1975. – 133 с.
4. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 719 с.
5. Журавин М.Л., Загрядская О.В., Казакевич Н.В. [и др.]. Гимнастика: учебник. – М.: Академия, 2002. – 449 с.
6. Загревский В.И., Загревский О.И. Биомеханика. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2007. – 274 с.
7. Курьсь В.Н. Биомеханика. Познание телесно-двигательного упражнения. – М.: Советский спорт, 2013. – 368 с.
8. Лавровский Э.К. О некоторых оптимальных задачах быстрогодействия для маятниковых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2007. – № 2. – С. 72–82.
9. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Синтез оптимального управления раскачиванием и торможением двухзвенного маятника // ПММ. – 2001. – Т. 65, №2. – С. 225–234.
10. Назаров В.Т. Упражнения на перекладине. – М.: ФиС, 1973. – 135 с.
11. Сучилин Н.Г. Гимнаст в воздухе (соскоки прогрессирующей сложности). – М.: ФиС, 1978. – 120 с.
12. Упражнения на перекладине [Электронный ресурс]. – URL: bartendaz.ru (дата обращения: 20.01.2019).
13. Упражнения на перекладине [Электронный ресурс]. – URL: detivsporte.ru (дата обращения: 20.01.2019).
14. Упражнения на перекладине [Электронный ресурс]. – URL: referatwork.ru (дата обращения: 20.01.2019).
15. Упражнения на перекладине [Электронный ресурс]. – URL: studopedua.ru (дата обращения: 20.01.2019).

16. Уткин В.Л. Биомеханика. – М.: Просвещение, 1989. – 207 с.
17. Элементы на перекладине: соскоки [Электронный ресурс]. – URL: bartendaz.ru (дата обращения: 20.01.2019).
18. Bartee H., Dowell L. A cinematographical analysis of twisting about longitudinal axis when performers are free of support // Journal of Human Movement Studies. – 1982. – Vol. 8. – P. 41–54.
19. Biesterfeldt H.J. Jr. Twisting mechanics I // Gymnast. – P. 28–31.
20. Frohlich C. The physics of somersaulting and twisting // Scientific American. – 1980. – Vol. 242, iss. 3. – P. 154–164.

THE PROBLEM OF “GYMNAST” MOTION CONTROL IN FREE FLIGHT AND DURING THE TRANSITION IN THE STATE OF CONTACT WITH THE SUPPORT

E.K. Lavrovskii (Moscow, Russian Federation)

The study from the position of theoretical mechanics discusses some aspects of the jump down of the “athlete-gymnast” (or the “robot-gymnast”) from the “crossbar”. We discuss all phases of the jump in the planar case. “Gymnast” body is modeled as three-links physical pendulum, however, after departing from the “crossbar” and lowering the “hands” model the dynamic system becomes two-links pendulum. For a two-links model in the regime of “kinematic” control, we deal with the process of lowering hands, free flight, the output of the “legs” on the frame (absolutely inelastic impact) and holding operation in support phase with the aim of vertical stabilize of the pendulum system. Mode “kinematic control” means the ability to instantly change the angle between the links of the body (in some limits). For each of the phases of movement, we found a convenient form of describing dynamical equations. These equations are based on the use as a variable momentum of the system relative to various points of the body or space. The order of this system of equations is lower than for the full order system. The stage of calm “gymnast” that occurs after the foot on the surface of the support, will also be examined on the basis of special system of equations of this type. It was shown, that we can use numerical analysis to build the region of controllability for transition of the two-links model in a state of stabilization, corresponding to the equality of the horizontal coordinate of the support foot and the center of gravity of the two-links pendulum system. The algorithm of stabilizing control is designed. The results of presented of the analysis of the problem allow us to construct a convenient approximate model of the phenomenon as a whole, and to use it to control a robotic counterpart. As an example, it is considered one of the cases of motion that corresponds to the anthropomorphic model.

Key words: jump from the crossbar, phases of motion, kinematic control, theorems of mechanics.

Получено 21 января 2019