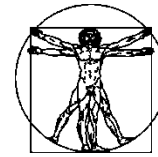


DOI: 10.15593/RZhBiomech/2019.4.02
 УДК 531/534:[57+61]



**Российский
Журнал
Биомеханики**
 www.biomech.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ РОГОВИЦЫ ГЛАЗА ПРИЛОЖЕННЫМ ИЗВНЕ ДАВЛЕНИЕМ

И.Н. Моисеева, А.А. Штейн

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: stein@imec.msu.ru

Аннотация. Рассматривается деформирование глазного яблока под действием внешнего давления, приложенного к роговице в ограниченной области, например, в результате нагружения струей воздуха. Роговица моделируется однородной изотропной безмоментной поверхностью и в общем случае считается линейно-вязкоупругой по фойгтовскому типу. Ее упругие свойства определяются квадратичной зависимостью энергии деформации от компонент тензора деформации, а вязкие – квадратичной диссипативной функцией от скоростей деформации. Склеральная область описывается дифференциальной связью между склеральным объемом и внутриглазным давлением. Детально рассмотрен процесс медленного деформирования, когда в определяющих соотношениях можно пренебречь производными деформационных характеристик по времени. Показано, что при определенном внешнем давлении в центральной области зоны его воздействия формируется участок, который с высокой точностью можно рассматривать как плоский. По внешнему давлению, при котором возникает эта зона, с хорошей точностью можно определять истинное внутриглазное давление, т.е. давление в ненагруженном глазу. На связь между этими давлениями слабо влияют упругие свойства как роговицы, так и склеральной области. В области внешних давлений, соответствующих «уплощению», меняется скорость проседания апекса роговицы при равномерном увеличении внешнего давления. Обсуждаются возможные обобщения модели и постановки задачи.

Ключевые слова: глаз, роговица, вязкоупругие свойства, внутриглазное давление, тонометрия, воздействие воздушной струей, математические модели.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время разработано и применяется в клинике немало устройств, основанных на воздействии на роговицу глаза струей воздуха и предназначенных как для измерения внутриглазного давления, так и для более детального исследования механических свойств глазного яблока. Непосредственно измеряются различные деформационные характеристики роговицы в зависимости от задаваемых параметров струи. В частности, может определяться смещение центральной точки роговицы (апекса) под действием приложенного давления. Во многих приборах оцениваются давление в струе или длительность ее воздействия, при которых достигается уплощение некоторой области роговицы, окружающей апекс. При более тонких исследованиях (например, в популярном в отечественных клиниках приборе *ORA* [11]) оценивается разность давлений, соответствующих уплощению при быстрых нагружении и разгрузке (корнеальный гистерезис).

© Моисеева И.Н., Штейн А.А., 2019

Моисеева Ирина Никитична, к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики МГУ, Москва

Штейн Александр Александрович, к.ф.-м.н., в.н.с. Института механики МГУ, Москва

Как и при других принятых в клинике непрямых офтальмологических измерениях, возникают две проблемы. Основной для медицины является возможность использования таких измерений для диагностики патологий, прежде всего глаукомы, и объективной оценки результатов лечения. Эта проблема решается в первую очередь накоплением статистических данных. Однако большой индивидуальный разброс механических свойств глазных тканей [12] и геометрических характеристик глазного яблока делает актуальным получение надежных результатов при обследовании конкретного пациента, что невозможно без решения другой задачи – отчетливой оценки механического смысла получаемых результатов. Для решения этой задачи оказывается необходимым математическое моделирование происходящих при выполнении измерения процессов.

В зависимости от характера нагружения и непосредственно измеряемых характеристик при исследовании механики струйного нагружения глаза может оказаться достаточным моделирование процесса либо в рамках чисто упругой модели, либо ее дополнение учетом вязкоупругого поведения глазных тканей. Последнее существенно, если измерения (как в *ORA*) предполагают получение результатов в быстрой развертке во времени. Авторами ранее был разработан [1] максимально упрощенный подход к механике глазного яблока, который характеризуется небольшим количеством подлежащих определению параметров и оказался полезен при моделировании различных типов тонометрии. В рамках этого подхода роговица представляется безмоментной (мягкой) изотропной однородной двумерной поверхностью, а склеральная область нульмерным элементом, откликающимся изменением объема на изменение внутриглазного давления. В базовом варианте зависимость деформации роговицы от напряжений и объема склеральной области от изменений давления считалась линейно-упругой. В дальнейшем были рассмотрены обобщения базовой модели на случаи пространственно неоднородной и нелинейно упругой роговицы [2, 3]. В предлагаемой работе авторы ограничиваются линейными определяющими соотношениями для роговицы и склеральной области, допуская в общем случае учет их вязкоупругого поведения фойгтовского типа. Однако многие вопросы могут исследоваться на основе чисто упругой модели.

Механические, в частности упругие, свойства глазных тканей не только сильно индивидуальны – им свойственны нелинейность, анизотропия и пространственная неоднородность. Особенно обширный материал накоплен по детальному исследованию механических свойств роговицы [4, 6, 8, 14]. В литературе нагружение глазного яблока струей воздуха обычно моделируется, как и для других способов его нагружения, на основе громоздких конечно-элементных моделей, содержащих много констант [5, 10]. Эти константы определяются, как правило, в экспериментах на трупном материале с осреднением результатов по многим глазам. При моделировании быстрых нестационарных процессов, имеющих место при струйном воздействии на роговицу, зачастую используются данные, полученные в опытах с существенно большими характерными временами. Все эти обстоятельства делают затруднительным эффективное решение обратной задачи непосредственно для обследуемого глаза.

В последние годы получило распространение использование на базе конечно-элементных моделей методов оптимизации с целью определения неизвестных параметров. Этот подход применялся и к струйному нагружению глаза [9]. Однако на таком пути плохо просматривается физический смысл используемых соотношений, причем оказывается, что выбор недоступных при прямых измерениях параметров может осуществляться в рамках моделей, некорректно учитывающих основные особенности механического поведения объекта.

Исследование на основе элементарной модели с небольшим набором определяющих параметров позволяет понять механизмы наблюдаемых явлений, выяснить физический смысл измеряемых величин и наметить пути минимально необходимых обобщений для описания более тонких, не описываемых этой моделью, эффектов. В этом преимущество такого подхода в сравнении с расчетными методиками, требующими задания множества характеристик, не могущих быть надежно оцененными, тем более для конкретного обследуемого глаза.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ: УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ РОГОВИЦЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

На рис. 1 схематически представлены глазное яблоко, не нагруженное извне (*а*), а также нагруженное внешним давлением, приложенным в ограниченной центральной области роговицы (*б*).

Поскольку в общем случае предполагается рассмотрение достаточно быстрых процессов, необходимо оценить, возможно ли в этом случае использовать статические соотношения, т.е., во-первых, пренебрегать инерционными членами в динамических уравнениях для глазных тканей и, во-вторых, не рассматривать нестационарные процессы в жидкости. Первое заведомо возможно, если выполнено условие $t^* \gg L(E/\rho)^{-1/2}$, а второе – если $t^* \gg L/a$, где t^* и L – характерное время процесса и характерный размер объекта соответственно; E – наименьший из характерных упругих модулей; ρ – характерная плотность тканей (практически равная плотности воды) и a – скорость звука в воде. Принимая $L \sim 1$ см, $a \sim 1500$ м/с, $E \sim 0,3$ МПа [1], получаем, что нестационарность процессов в жидкости становится существенной для глазного яблока при временах порядка микросекунд, а нестационарность для тканей – при временах, меньших миллисекунды. Поскольку рассматриваемые процессы имеют характерное время не менее десятков миллисекунд, оба предположения выполняются. Допущение о стационарности процессов перераспределения жидкости заведомо выполняется с очень высокой точностью, тогда как для тканей оболочки нестационарные эффекты могли бы вносить поправку лишь при точных расчетах, каковые для практического исследования рассматриваемых процессов не имеют смысла. С другой стороны, на таких временах, как показывают эксперименты, становятся существенны эффекты немгновенности деформирования (фойгтовской вязкоупругости) [11]. Малость вызываемых внешним воздействием

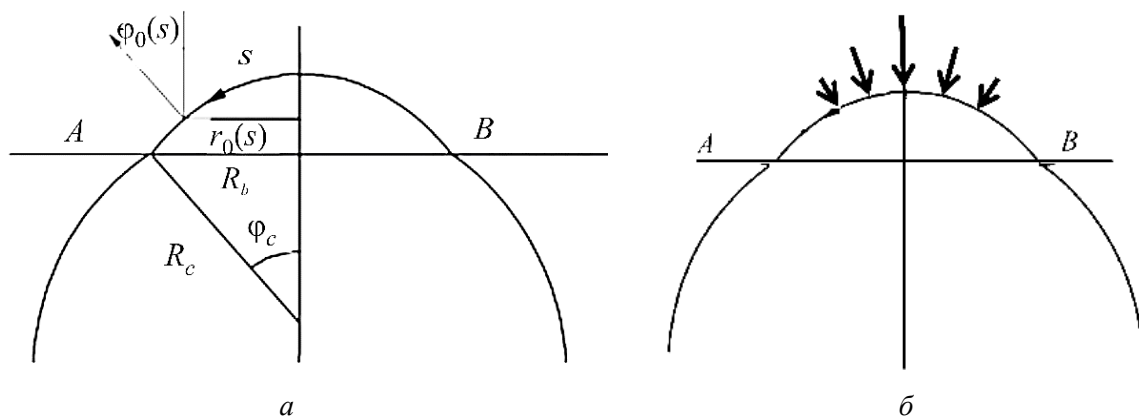


Рис. 1. К постановке задачи: *а* – глазное яблоко до нагружения; *б* – роговица нагружена внешним давлением. Плоскость *АВ* отграничивает роговицу от склеральной области. Стрелки (*б*) показывают область действия внешнего давления. Остальные обозначения в тексте

при тонометрии смещений жидкости позволяет также пренебрегать эффектами вязкости маловязкой жидкости (по существу, воды) в передней камере под роговицей и полагать, что давление устанавливается в ней мгновенно.

Поэтому будем пользоваться для роговицы статическими уравнениями, которые с сохранением предположений, сформулированных в [1], приобретают в случае присутствия распределенного внешнего давления, например, создаваемого струей, следующий вид:

$$(r_0 T_1)' - T_2 \cos \varphi = 0, \quad (1)$$

$$-T_2 \sin \varphi - r_0 \varphi' T_1 + \lambda r_0 (p - p_*) = 0, \quad (2)$$

$$r' = \lambda \cos \varphi, \quad (3)$$

$$r_0 = R_c \sin \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{s}{R_c}, \quad \lambda = 1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r}{r_0} - 1. \quad (4)$$

Здесь r – расстояние точки поверхности, представляющей роговицу, от оси; φ – угол между нормалью к этой поверхности и осью симметрии; s – длина дуги образующей роговицы в начальном состоянии, отмеряемая от точки пересечения роговицы с осью симметрии (апекса) и играющая роль независимой переменной; p – текущее внутриглазное давление; T_1 и T_2 – касательные усилия в меридиональном и перпендикулярном к нему (окружном) направлениях; ε_1 и ε_2 – деформации в направлениях главных осей, отсчитываемые от начального состояния ненагруженной извне роговицы. Последнее считается условно соответствующим некоторому сферическому пространственно однородному сегменту радиусом R_c (радиус роговицы) с внутренним давлением p_0 , которое в дальнейшем будет отождествляться с внутриглазным давлением до нагружения. До начала деформирования ($t = 0$) усилия T_1 и T_2 равны между собой и определяются формулой $T_1 = T_2 = T_0 = p_0 R_c / 2$. Функция радиальной координаты и времени $p_*(r, t) \geq 0$ определяет приложенное к роговице внешнее давление. В случае струйного воздействия эта функция отлична от нуля при $t > 0$ в ограниченной области $-r_j < r < r_j$, где r_j – радиус области, в которой струя воздуха действует на роговицу. Тангенциальной составляющей воздействия струи на роговицу будем пренебрегать в сравнении с нормальной силой, обеспечиваемой внешним давлением.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим теперь линейные определяющие соотношения для усилий T_1 и T_2 с учетом вязкоупругости фойгтовского типа. Остаемся в рамках базового для нашего подхода представления роговицы двумерной безмоментной, изотропной и однородной поверхностью. В рамках такого подхода поверхность не сопротивляется изгибу и существенны лишь деформации и напряжения в плоскости, касательной к этой поверхности, которые характеризуются тензорами второго ранга в двумерном пространстве. В задачах, для которых в процессе деформации сохраняется условие осевой симметрии, присутствуют лишь компоненты этих тензоров, направленные по главным осям, соответствующим в каждой точке меридиональному и перпендикулярному к нему направлениям. Введенные выше деформации ε_1 и ε_2

оказываются главными компонентами двумерного тензора деформаций, а усилия T_1 и T_2 – главными компонентами двумерного тензора напряжений.

Введем энергию деформации $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и диссипативную функцию $\Theta(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2)$, зависящую от скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_2$. В силу малости скоростей деформаций правомерно отождествлять их с производными по времени от ε_1 и ε_2 соответственно, безразлично частными или субстанциональными. Отсутствие сопротивления изгибу проявляется в том, что из числа аргументов этих функций исключены параметры, отвечающие за изменение кривизны поверхности. Тогда связь напряжений с деформациями определяется общими формулами

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\varepsilon}_1}, T_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\varepsilon}_2}. \quad (5)$$

С учетом изотропии материала роговицы в тангенциальных направлениях будем задавать энергию деформации и диссипативную функцию в виде квадратичных функций, симметричных по своим аргументам:

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2} k_1 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \varepsilon_2^2 + k_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + T_0 \varepsilon_1 + T_0 \varepsilon_2, \quad (6)$$

$$\Theta(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\varepsilon}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varepsilon}_2^2 + m_2 \dot{\varepsilon}_1 \dot{\varepsilon}_2,$$

где коэффициенты k_1 , k_2 , m_1 , m_2 – постоянные. Зависимость энергии деформации и диссипативной функции от главных значений соответствующих тензоров обеспечивает инвариантность этих зависимостей.

Определяющие соотношения получаются в виде

$$T_1 = k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + m_1 \dot{\varepsilon}_1 + m_2 \dot{\varepsilon}_2 + T_0, \quad (7)$$

$$T_2 = k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_1 + m_1 \dot{\varepsilon}_2 + m_2 \dot{\varepsilon}_1 + T_0.$$

Положительная определенность свободной энергии и диссипативной функции приводит к неравенствам

$$k_1 > 0, k_1 > |k_2|, m_1 > 0, m_1 > |m_2|. \quad (8)$$

Соотношения (7) приводятся к виду

$$\varepsilon_1 + \tau \dot{\varepsilon}_1 + \kappa \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{E_c^*} [T_1 - v_c T_2 - T_0(1 - v_c)], \quad (9)$$

$$\varepsilon_2 + \tau \dot{\varepsilon}_2 + \kappa \dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E_c^*} [T_2 - v_c T_1 - T_0(1 - v_c)],$$

где

$$E_c^* = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1}, v_c = \frac{k_2}{k_1}, \tau = \frac{E_c^*}{1 - v_c} (m_1 - v_c m_2), \kappa = \frac{E_c^*}{1 - v_c} (m_2 - v_c m_1). \quad (10)$$

Очевидно, $E_c^* > 0, v_c < 1$. Если дополнительно потребовать, что $v_c > 0$ (т.е. $k_2 > 0$, что не следует из термодинамических неравенств), то $\tau > 0$. Знак κ не определен, даже

если дополнительно потребовать $m_2 > 0$ (по аналогии с k_2). В силу (8) и (10) выполняются неравенства

$$\tau > |k| \geq k. \quad (11)$$

Коэффициенты E_c^* и ν_c имеют смысл упругих модулей (модуля растяжения и коэффициента Пуассона) роговицы как двумерной упругой поверхности при медленных процессах.

Будем заменять склеральную область с окружающими ее тканями вязкоупругим элементом, поведение которого описывается зависимостью

$$\Delta V_s + \tau_1 (\Delta V_s)' = K(p - p_0), \quad (12)$$

где ΔV_s – приращение склерального внутриглазного объема (части внутреннего объема, ограниченной склерой и плоскостью, отграничивающей склеру от роговицы) вследствие изменения давления, а точкой обозначена производная по времени. Строго говоря, обобщенное соотношение (12) учитывает не только вязкоупругое поведение склеры и окружающих ее тканей, но и вязкие свойства заполняющей ее среды (стекловидного тела), а при детальном анализе давление в этой среде может оказаться не только отличным от внутриглазного давления p (т.е. давления в передней камере), но и пространственно неоднородным.

Полное приращение объема жидкости во внутриглазном пространстве определяется как сумма ΔV_s и приращения «подроговичного» объема ΔV_c (части объема, лежащей выше плоскости AB). Приращение ΔV_c вычисляется исходя из функций $r(s)$ и $\varphi(s)$, рассчитанных при решении краевой задачи для роговицы.

В рассматриваемой задаче полное приращение объема равно нулю вследствие возможности пренебречь притоком и оттоком внутриглазной жидкости за время тонометрии:

$$\Delta V = \Delta V_c + \Delta V_s = 0. \quad (13)$$

В силу симметрии решение краевой задачи для роговицы ищется только в одной полуплоскости ($0 \leq s \leq \varphi_c R_c$). Условие закрепления роговицы в плоскости AB внешней окружности, по которой она контактирует со склерой, и условия в точке ее пересечения с осью – коллинеарности нормали оси и ограниченности меридиональной деформации – совпадают с использованными в [1]:

$$\begin{aligned} r(\varphi_c R_c) &= R_b = \text{const}, \\ \varphi(0) &= 0, \\ s \rightarrow 0: r &\sim s(1 + \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее из условий (14) является более общим, чем приведенное в [1] условие для напряжений, которое может быть получено из (14) в рамках использованной в [1] линейно-упругой модели.

Упругие константы далее переобозначены по формулам $E_c^* = \delta E_c$, $K = (\zeta E_s)^{-1}$, где $\delta = 0,5$ мм – средняя в норме толщина роговицы, а $\zeta = 1,44 \cdot 10^{-5}$ мм⁻³ [1]. Будем называть E_c и E_s роговичной и склеральной жесткостями соответственно.

Геометрические характеристики роговицы (см. рис. 1, *a*) принимаются равными $R_c = 8$ мм, $R_b = 5,8$ мм, что соответствует стандартным для человеческого глаза значениям.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕДЛЕННОГО НАГРУЖЕНИЯ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Характерное время установления деформаций равно τ , поскольку второе присутствующее в соотношениях (9) характерное время $|\kappa| < \tau$ в силу неравенств (11). Надежные оценки для этого времени отсутствуют. Наличие эффектов вязкоупругости при струйном нагружении [11] позволяет предположить, что для соответствующих процессов оно имеет порядок десятков миллисекунд. Более точно параметр τ может быть оценен при сопоставлении результатов моделирования с данными экспериментов. В настоящей работе далее будут рассматриваться относительно медленные процессы, для которых характерное время $t^* \gg \tau$. В этом случае можно ограничиться упругой моделью. В соответствии с этим в соотношениях (9) будем полагать $\tau = \kappa = 0$. Таким образом, изучаемая в этом разделе модель роговицы, по существу, совпадает с линейно-упругой моделью [1] с различием лишь в уравнении (2) (отличное от нуля давление p_*). Если считать, что за характерное время задачи успевает установиться также склеральный объем (в соотношении (12) $\tau_1 \ll t^*$, и можно положить $\tau_1 = 0$), отсутствие жесткого нагружающего устройства с заменой его отличным от нуля внешним давлением p_* остается единственным отличием от реализовавшейся ранее постановки. Далее рассматривается тонометрическая задача для такого нагружения. Изучается изменение геометрии роговицы. В центре внимания оценка внешнего давления, приводящего к уплощению примыкающей к апексу области роговицы (размер этой области заранее не известен и на практике, как правило, не отслеживается). Все линейные размеры далее обезразмерены по невозмущенному радиусу роговицы R_c , в соответствии с чем независимая переменная s меняется в диапазоне от 0 до $s_* \approx 0,8$.

Распределение давления вблизи поверхности роговицы определяется конструкцией устройства и эволюцией струи в процессе ее распространения. По экспериментальным данным для *ORA*, представленным в [5], это распределение имеет общий вид, показанный на рис. 2.

Будем базироваться на распределении такого вида, используя для его моделирования функцию

$$p_*(r) = \begin{cases} p_j (\cos(\pi r/r_j) + 1)/2 & (-r_j < r < r_j), \\ 0 & (r \notin [-r_j, r_j]), \end{cases}$$

где p_j – максимальное значение действующего на роговицу давления, которое далее для определенности будем называть давлением в струе. В дальнейшем давление p_j будет варьироваться, а полуширина зоны влияния струи (т.е. области где $p_*(r)$ положительно) r_j полагается равной 0,385, если не оговорено противное. Эта величина соответствует размерному значению, приведенному в [5]. Малость деформаций и узость области непосредственного струйного воздействия позволяют по мере надобности предполагать совпадение зависимостей $p_*(r)$ и $p_*(s)$ в области действия струи, а также отождествлять расчетные функции от r , характеризующие форму

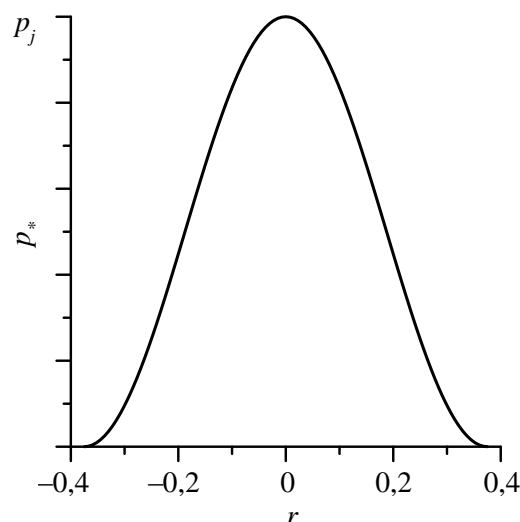


Рис. 2. Принятая в расчетах зависимость приложенного извне давления p_* от безразмерного расстояния до центральной оси r . При $r=0$ давление p_* достигает максимального значения $p_* = p_j$

роговицы в этой области, с соответствующими функциями от s . Упругие характеристики глазного яблока будут варьироваться, но, если особо не оговорено, полагаются равными характеристикам «стандартного» глаза: $E_c = 0,3$ МПа, $E_s = 10$ МПа [1]. Коэффициент Пуассона во всех случаях считается равным $\nu_c = 0,45$.

На рис. 3 представлена зависимость угла φ , характеризующего наклон моделирующей роговицу поверхности к центральной оси для пяти различных давлений в струе при одних и тех же значениях упругих констант и истинного внутриглазного давления. Видно, что этот угол (а следовательно, и форма роговицы) при рассмотренных давлениях заметно меняется лишь в области непосредственного воздействия струи $-r_j < r < r_j$. При возрастании p_j формируется область, в которой роговица становится вогнутой (т.е. область отрицательных φ). Радиус этой области зависит от давления в струе и на этапе ее формирования, т.е. при давлениях, не слишком отличающихся от того давления, при котором появляются значения $\varphi < 0$, и имеет порядок, не превышающий $r_j / 2$.

На рис. 4 прослежен процесс вдавливания роговицы в центральной области в характерном для этого процесса масштабе. На рис. 4, а продемонстрировано изменение $\varphi(s)$ в зависимости от давления в струе, а на рис. 4, б показана эволюция собственно формы. Из рис. 4, б хорошо видно, что при некотором давлении p_j в самом деле имеется практически плоский участок, который при расчетных значениях параметров приблизительно соответствует давлению 14 мм рт. ст. и имеет полуширину $s \sim 0,1$. На графике $\varphi(s)$ (см. рис. 4, а) видно, что углы в этой области близки к нулю (при $s < 0,1$ выполняется неравенство $|\varphi(s)| < 0,01$).

Строго говоря, области, где у роговицы появляется плоский участок, не существует, но визуально он присутствует. В практически используемых устройствах область «уплощения» определяется по пику интенсивности светового сигнала, отраженного от роговицы. Ширина светового пучка определяется конструкцией

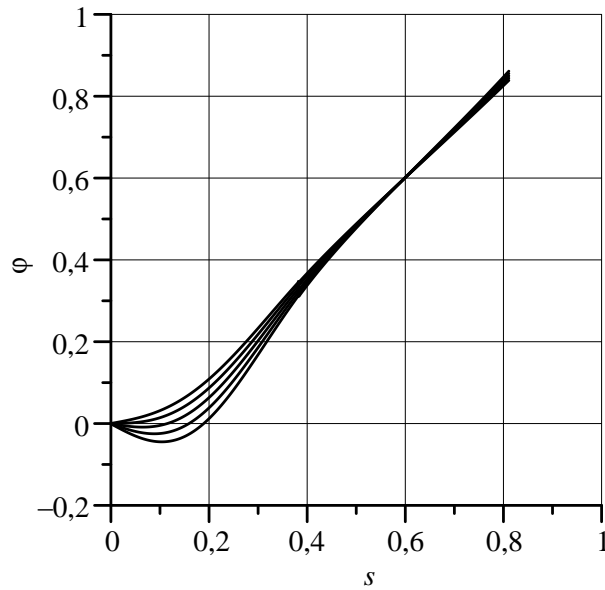


Рис. 3. Зависимость угла φ от максимального значения давления в струе для «стандартного» глаза: $p_0 = 12$ мм рт.ст.; $E_c = 0,3$ МПа; $E_s = 10$ МПа. Значения давления в струе $p_j = 11, 13, 15, 17, 19$ мм рт.ст. (сверху вниз)

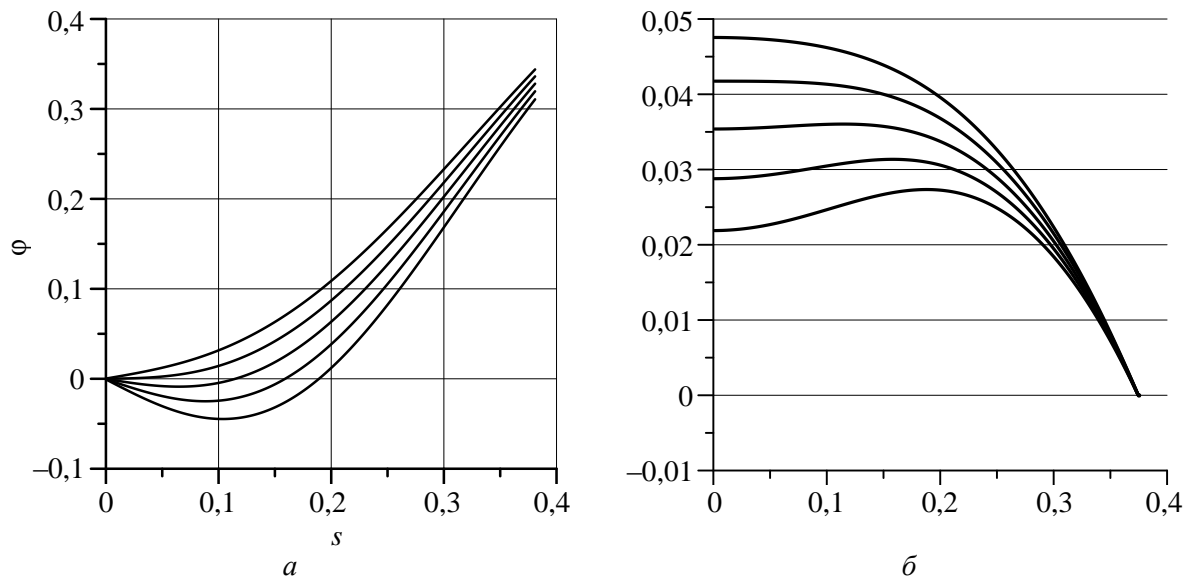


Рис. 4. Распределение угла отклонения нормали к роговице от оси $\varphi(s)$ (а) и форма роговицы в области воздействия струи (б) при давлениях $p_j = 11, 13, 15, 17, 19$ мм рт. ст. (сверху вниз). На рис. б по осям расстояния указаны в безразмерных единицах

прибора и обычно подбирается эмпирически. Расчеты, проведенные нами в широком диапазоне физиологически допустимых значений параметров, показали, что в рамках используемой модели целесообразно исследовать процесс уплощения в области с безразмерным радиусом $r_f \approx s_f \sim 0,1$. Если выбрать эту область существенно уже, зона «уплощения», сформировавшись в этой области, продолжает при увеличении давления в струе расширяться до значительно большего размера. Тогда диапазон давлений, соответствующих «уплощению», окажется слишком широким. При существенно же

большем радиусе выбранной области она будет захватывать участок, где роговица при любых внешних давлениях остается заметно выпуклой, что существенно исказит общую картину. В дальнейшем всегда полагаем, что $s_f = 0,1$.

О точном значении давления, при котором достигается «уплощение», говорить нельзя, а можно лишь о диапазоне давлений, в котором на участке выбранного радиуса $r_f \approx s_f$ отклонение нормали от оси достаточно мало. Это допущение соответствует неравенству

$$|\varphi(s)| < \vartheta, \quad (15)$$

где ϑ выбирается достаточно малым, т.е. таким, чтобы диапазон давлений струи, в котором это неравенство выполняется, был бы достаточно узким и приемлемым в соответствии с требуемой точностью измерений. Можно также воспользоваться критерием

$$\Sigma = \int_0^{s_f} |\varphi(s)| ds < \theta. \quad (16)$$

При соответствующем выборе констант ϑ и θ оба критерия эквивалентны. Заметим, что эти константы не могут быть выбраны сколь угодно малыми, поскольку точное уплощение не достигается.

В дальнейшем будем выбирать в качестве давления уплощения p_{jf} такое давление $p_j = p_{jf}$, при котором достигается минимум функции $\Sigma(p_j)$. Этот подход удобен тем, что нет необходимости задавать критерий малости ϑ или θ , выбор которого представляет самостоятельную (требующую расчетов) задачу, поскольку такой критерий не может быть задан произвольно малым.

Из рис. 5, а непосредственно видно, что при выборе $s_f = 0,1$ значение $p_j = p_{jf}$, при котором достигается минимум функции $\Sigma(p_j)$, определяется достаточно отчетливо: $p_j \approx 13,8$. Для такого значения p_j угол φ на отрезке $0 < s < s_f$ удовлетворяет неравенству (16) с $\theta = 0,2 \cdot 10^{-3}$. При этом давление уплощения p_{jf} оценивается достаточно грубо: зависимости $\varphi(s)$ при изменении s в диапазоне шириной порядка 1 мм рт. ст. различаются незначительно (рис. 5, б). Названное обстоятельство практически важно: оно позволяет не требовать от процедуры измерений чрезмерной точности.

В принципе можно не оговаривать радиус области, для которой исследуется уплощение, заранее, а искать при каждом давлении в струе p_j область, в которой выполняется критерий (15) или (16), затем находить давление уплощения как такое давление p_j , при котором эта область максимально широка. Однако использованный нами метод проще и ввиду продемонстрированной грубости определения p_{jf} не приведет к существенному изменению результата. Заметим, что, хотя ширина области уплощения и может быть определена в рамках используемой модели, в реальности (как и при тонометрии по Гольдману) эта величина сильно зависит от распределения упругих свойств по толщине и поэтому вряд ли может играть роль достаточно эффективного критерия для оценки внутриглазного давления.

На рис. 6 показано при тех же значениях параметров, что и в предыдущих расчетах, изменение с ростом давления в струе расстояния по оси от центральной точки

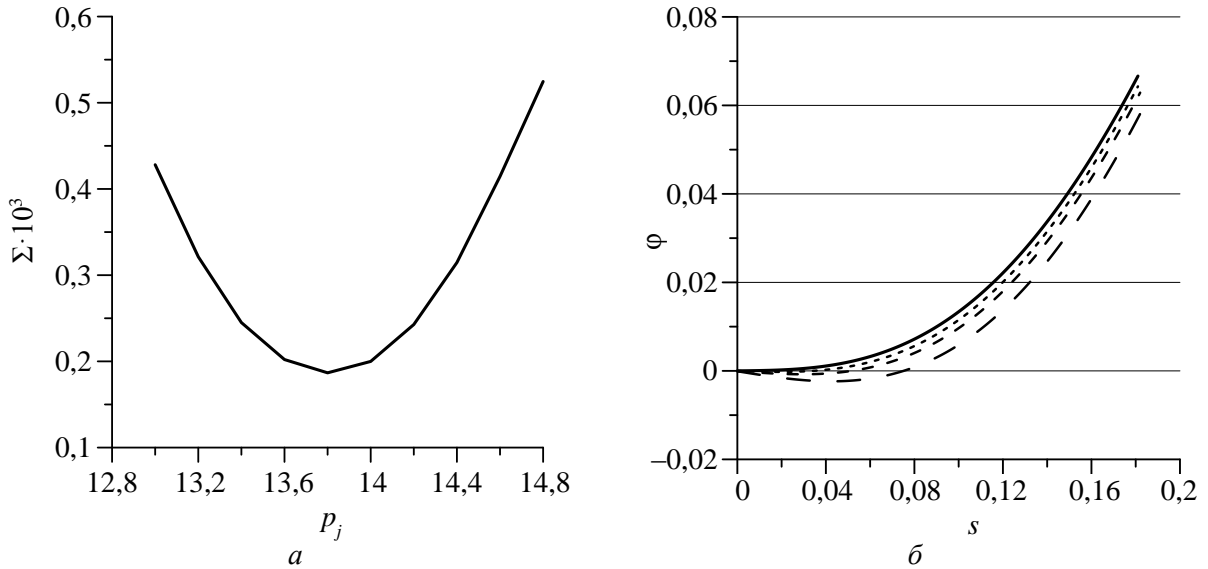


Рис. 5. Расчетный график функции $\Sigma(p_j)$ (а) и распределение $\phi(s)$ в области $s < r_j/2$ при $p_j = 13,1; 13,3; 13,5; 13,9$ (сверху вниз) (б)

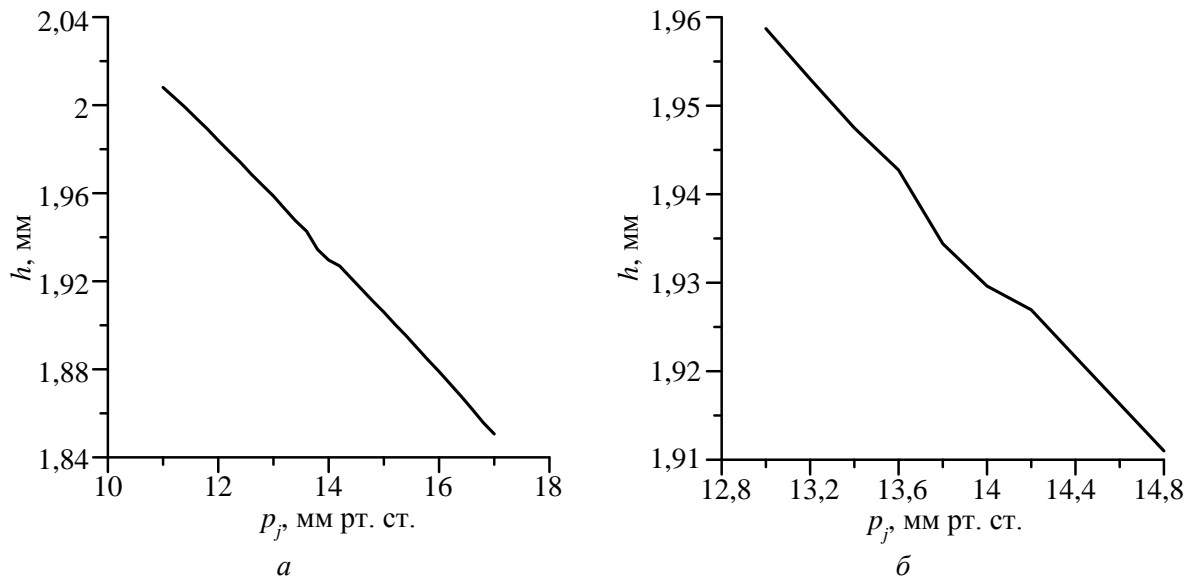


Рис. 6. Зависимость (в разных масштабах) высоты апекса над границей роговицы со склерой от давления в струе: а – в широком диапазоне давлений; б – в области давлений, близких к давлению уплощения

(апекса) роговицы до ее границы со склерой, т.е. проседание апекса под действием струи. При равномерном увеличении действующего на роговицу давления апекс проседает практически равномерно, но в области давлений, где достигается уплощение, наблюдается сначала ускорение, а затем замедление проседания апекса. По выходе из этого интервала давлений равномерное проседание возобновляется. Этот эффект в принципе может быть использован для обнаружения давления уплощения.

Далее будем исследовать связь давления уплощения с параметрами, характеризующими механические свойства и механическое состояние глазного яблока. В рамках применяемой модели таких параметров три: истинное внутриглазное давление p_0 , т.е. давление в ненагруженном глазу, а также упругие характеристики роговицы и склеральной области E_c и E_s .

Основная задача любой тонометрии – определение истинного внутриглазного давления p_0 . На рис. 7 представлена зависимость давления уплощения от p_0 . Зависимость эта близка к линейной. Давление уплощения p_j всегда больше p_0 , и разность между этими величинами Δp возрастает с давлением: $\Delta p \sim 2$ мм рт. ст. при $p_0 = 12$ мм рт. ст. и 4 мм рт. ст. при $p_0 = 30$ мм рт. ст. Если оценивать внутриглазное давление по давлению в струе, полагая разность между ними средней между этими значениями величиной $\Delta p = 3$ мм рт. ст., ошибка не превысит 1 мм рт. ст., что для практических целей приемлемо. Более корректно учитывать в соответствии с зависимостью, представленной на рис. 7, реальные значения Δp , соответствующие разным p_j .

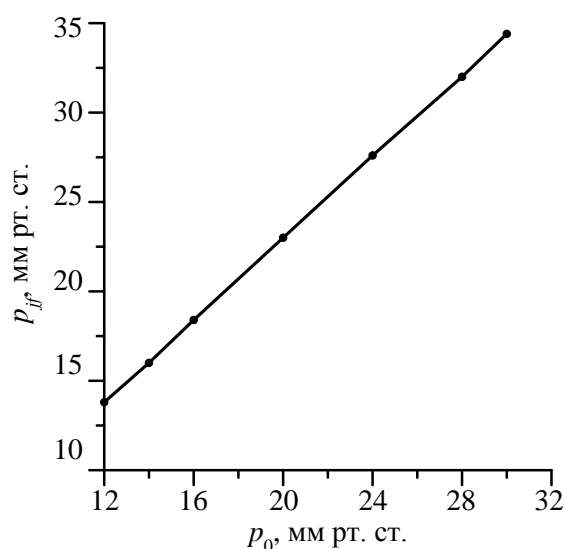


Рис. 7. Зависимость давления уплощения от истинного давления; $E_c = 0,3$ МПа, $E_s = 10$ МПа

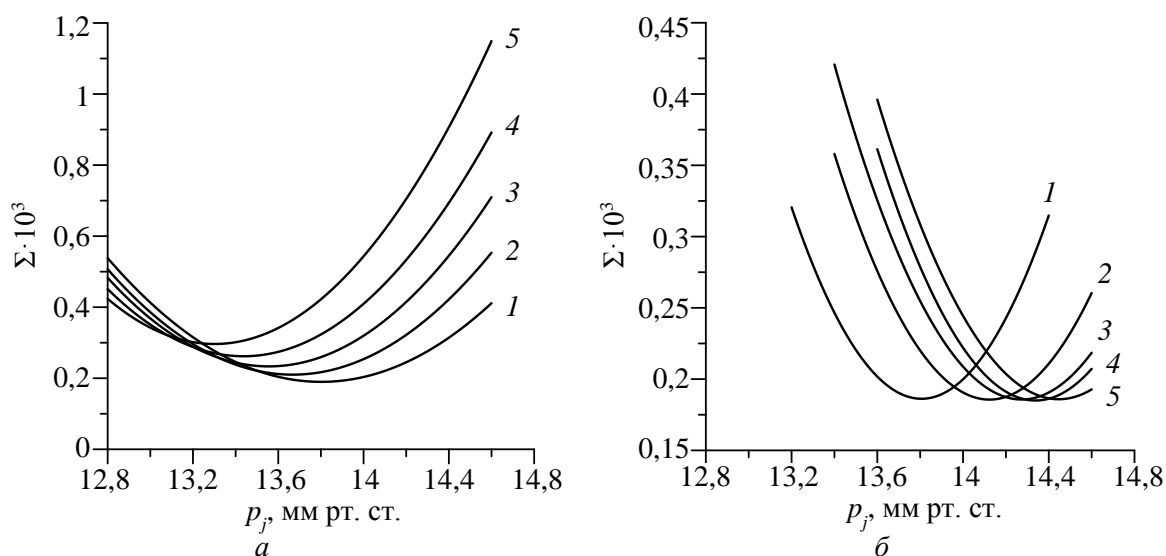


Рис. 8. Функция $\Sigma(p_j)$ при $p_0 = 12$ мм и различных значениях упругих констант: $a - E_s = 10$ МПа, $E_c = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$ МПа (1–5); $b - E_c = 0,3$ МПа, $E_s = 10, 20, 30, 40, 60$ МПа (1–5)

Оценим теперь влияние на давление уплощения упругих характеристик глазного яблока. На рис. 8 представлены зависимости $\Sigma(p_j)$ при значительных превышениях нормальных значений: на рис. 8, а роговичной жесткости E_c и на рис. 8, б склеральной жесткости E_s . Минимумы кривых соответствуют давлению уплощения. С увеличением роговичной жесткости давление уплощения, соответствующее тому же истинному давлению, уменьшается, а с возрастанием склеральной жесткости растет, т.е. ужесточения обеих структур действуют, как и при тонометрии по Маклакову, разнонаправленно. В обоих случаях различие со стандартным глазом невелико и не превышает в рассмотренном диапазоне значений величины порядка 0,5 мм рт. ст.

Таким образом, при медленном нагружении внешним давлением внутриглазное давление с практической точностью может быть определено по внешнему воздействию, приводящему к определенной специфической деформации (давлению уплощения). Индивидуальные механические свойства роговицы и склеральной области, в отличие от статической тонометрии, влияют на связь между истинным давлением и давлением уплощения незначительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках разработанного авторами общего подхода, основанного на представлении роговицы двумерной безмоментной поверхностью, а склеральной области нульмерным элементом, откликающимся изменением объема на изменения внутриглазного давления, разработана модель, учитывающая вязкоупругие (фойгтовского типа) свойства глазных тканей. Поставлена задача о деформировании глазного яблока под действием приложенного к роговице извне в ограниченной области давления, в частности, вследствие воздействия струей воздуха.

Подробно рассмотрены относительно грубые эффекты, проявляющиеся при медленном нагружении, когда возможно пренебречь вязкостью роговицы и склеральной области. Модель воспроизводит ряд важнейших особенностей струйного воздействия на роговицу глаза. Показано, что при определенном давлении в струе в центральной области зоны ее воздействия формируется участок, который с высокой точностью можно рассматривать как плоский. Именно формирование зоны уплощения отслеживают многие используемые в медицинской практике приборы. По давлению в струе, при котором возникает эта зона, с хорошей точностью можно определять истинное внутриглазное давление, т.е. давление в ненагруженном глазу. Практическую важность имеет слабое влияние на соотношение, связывающее эти давления, упругих свойств как роговицы, так и склеральной области. В области внешних давлений, соответствующих «уплощению», меняется скорость проседания апекса роговицы при равномерном увеличении внешнего давления: эта скорость, приблизительно постоянная вне этой области, сначала растет, затем падает, снова выходя на постоянное значение за ее пределами.

Представленная выше модель, учитывающая вязкоупругость, позволяет получать более тонкие оценки и моделировать поведение глаза в высоком временном разрешении при его быстрых нагружении и разгрузке. Именно быстрые процессы, для которых эффект вязкоупругости существен, реализуются в большинстве современных приборов, осуществляющих струйное воздействие на роговицу. Легко показать, что модель в этом случае описывает различие давлений, соответствующих уплощению в этих процессах (т.н. корнеальный гистерезис). Соответствующие детальные расчеты будут представлены в последующих публикациях.

Дальнейшая модификация модели позволит учесть неоднородность толщины роговицы, которая, как показывают многочисленные исследования [5, 7, 10, 13], имеет

существенное значение для оценки реальных механических характеристик глаза, в первую очередь внутриглазного давления, по данным тонометрии. Первым этапом такого исследования может служить разработанный авторами ранее подход [2], при котором неоднородность толщины и механических свойств роговицы учитывается через интегральную характеристику – эффективную жесткость. Однако тот факт, что воздействие струи в основном сосредоточено в достаточно узкой области (ширина которой сравнима с толщиной роговицы), скорее всего, потребует разработки менее грубой модели, учитывающей неоднородность толщины отдельно от неоднородности жесткости.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 17-01-00380.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Анализ зависимости давление–объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 5. – С. 3–15.
2. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Влияние пространственной неоднородности роговицы на деформационные свойства глазного яблока и результаты аппланационной тонометрии по Маклакову // Биофизика. – 2017. – Т. 62, № 6. – С. 1193–1203.
3. Штейн А.А., Моисеева И.Н., Любимов Г.А. Математическая модель роговицы глаза с учетом экспоненциальной нелинейности ее упругих свойств при условии геометрической малости деформаций // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 375–390.
4. Corneal biomechanics and refractive surgery. Ed. by F.A. Guarnieri. – Berlin: Springer, 2015. – 146 p.
5. Elsheikh A., Alhasso D., Kotecha A., Garway-Heath D.F. Assessment of the ocular response analyzer as a tool for intraocular pressure measurement // J. Biomech. Eng. – 2009. – Vol. 131. – ArticleID 081010. – P. 1–9.
6. Fernandez D.C., Niazy A.M., Kurtz R.M., Djotyán G.P., Juhasz T. Finite element analysis applied to cornea reshaping // J. Biomed. Opt. – 2005. – Vol. 10, № 6. – 064018. – P. 1–11.
7. Goebels S.C., Seitz B., Langenbucher A. Precision of ocular response analyzer // Current Eye Res. – 2012. – Vol. 37, № 8. – P. 689–693.
8. Hjortdal J.Ø. Regional elastic performance of the human cornea // J. Biomech. – 1996. – Vol. 29, № 7. – P. 931–942.
9. Jannesari M., Kadkhodaei M., Mosaddegh P., Kasprzak H., Behrouz M.J. Assessment of corneal and fatty tissues biomechanical response in dynamic tonometry tests by using inverse models // Acta Bioeng. Biomech. – 2018. – Vol. 20, № 1. – P. 39–48.
10. Joda A.A., Shervin M.M.S., Kook D., Elsheikh A. Development and validation of a correction equation for Corvis tonometry // Comp. Meth. Biomech. Biomed. Eng. – 2016. – Vol. 19, № 9. – P. 943–953.
11. Luce D.A. Determining in vivo biomechanical properties of the cornea with an ocular response analyzer // J. Cataract Refract. Surg. – 2005. – Vol. 31, № 1. – P. 156–162.
12. Pallikaris I.G., Kymionis G.D., Ginis H.S., Kountis G.A., Tsilimbaris M.K. Ocular rigidity in living human eyes // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 2005. – Vol. 46, № 2. – P. 409–414.
13. Ramm L., Herber R., Spoerl E., Raiskup F., Pillunat L.E., Terai N. Intraocular pressure measurement using Ocular response analyzer, dynamic contour tonometer, and scheimpflug analyzer Corvis ST // J. Ophthalmol. – 2019. – Vol. 2019. – ArticleID 3879651. – 9p.
14. Shin T.J., Vito R.P., Johnson L.W., McCarey B.E. The distribution of strain in the human cornea // J. Biomech. – 1997. – Vol. 30, № 5. – P. 497–503.

MATHEMATICAL MODELLING OF EYE CORNEA DEFORMATION BY EXTERNAL PRESSURE

I.N. Moiseeva, A.A. Stein (Moscow, Russian Federation)

The deformation of the eyeball under the effect of external pressure applied to the cornea in a limited area, for example, as a result of loading with an air jet, is considered. The cornea is modeled by a homogeneous, isotropic, momentless surface and, in the general case, is considered to be linearly Voigt-type viscoelastic. Its elastic properties are determined by the quadratic dependence of the strain energy on the components of the strain tensor, and viscous by the quadratic dissipative function of the strain rates. The scleral region is described by the differential relationship between the scleral volume and intraocular pressure. The process of slow deformation is considered in detail, when the derivatives of the deformation characteristics with respect to time can be neglected in the constitutive relations. It is shown that, at a certain external pressure, a section is formed in the central region of the zone of its influence, which can be considered to be flat with high accuracy. From the external pressure at which this zone occurs, the true intraocular pressure, i.e., pressure in an unloaded eye, can be determined with good accuracy. The relationship between these pressures is weakly affected by the elastic properties of both the cornea and the scleral region. In the area of external pressures corresponding to “flattening”, the rate of subsidence of the corneal apex at external pressure uniformly increasing changes. Possible generalizations of them and the problem formulation are discussed.

Key words: eye, cornea, viscoelastic properties, intraocular pressure, tonometry, action of an air jet, mathematical models.

Получено 4 декабря 2019