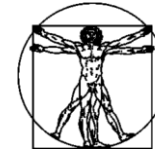


DOI: 10.15593/RZhBiomech/2019.3.02
УДК 531/534: [57+61]



**Российский
Журнал
Биомеханики**
www.biomech.ru

ПЕРЕСТРОЙКА СТРУКТУРЫ ГУБЧАТОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А.А. Киченко

Кафедра вычислительной математики, механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: kichenko.alex@inbox.ru

Аннотация. Костная ткань является неоднородным, анизотропным материалом и состоит из компактной и губчатой костных тканей. Структура губчатой костной ткани в различных отделах скелета неодинакова и подчиняется закону Вольфа: стремится стать оптимальной для действующей на соответствующую кость нагрузки, перестраивая себя посредством механизмов остеосинтеза и резорбции. Современные задачи биомеханики требуют изучения истории формирования костных структур во времени как при физиологических, так и при патологических нагрузках. Одной из наиболее подверженных внешнему и внутреннему изменению костей является нижняя челюсть. Она подвержена физиологическим изменениям, происходящим в процессе онтогенеза организма. Очень часто приходится сталкиваться с патологическими изменениями, вызванными неправильным нагружением различных участков костной ткани вследствие дисфункции зубного ряда, височно-нижнечелюстного сустава и т.п. Например, синдром Попова–Годона, связанный с потерей зуба, сопровождается патологической перестройкой окружающих костных тканей. Таким образом, математическое моделирование поведения губчатой костной ткани в зубочелюстной системе человека является актуальной задачей биомеханики и медицины. Структурные особенности губчатой костной ткани могут быть описаны посредством тензора структуры. Это возможно реализовать, имея как определяющее соотношение, связывающее тензор напряжений с тензорами структуры и деформации, так и кинетические уравнения, описывающие эволюцию тензора структуры и плотности костной ткани. В качестве таких уравнений были выбраны и подробно проанализированы феноменологические уравнения Cowin. Осуществлена постановка начально-краевой задачи о перестройке губчатой костной ткани, решение которой позволяет проследить изменение напряженно-деформированного состояния при формировании трабекулярной структуры согласно закону Вольфа. Разработаны эффективные численные алгоритмы ее решения, реализованные в виде пакетов проблемно-ориентированных программ, проведены верификация модели и идентификация её параметров. Все численные расчёты выполнялись с использованием программного продукта ANSYS. На ряде примеров показана эволюция губчатой костной ткани при изменении напряженно-деформированного состояния. Результаты показывают различный характер влияния изменения нагрузки на процесс формирования структуры и соответствуют закону Вольфа.

Ключевые слова: губчатая (трабекулярная) костная ткань, закон Вольфа, зубочелюстная система, нижняя челюсть, тензор структуры, определяющие соотношения, кинетические уравнения, начально-краевая задача о перестройке структуры губчатой костной ткани, ветвь нижней челюсти.

ВВЕДЕНИЕ

На развитие и функционирование костной системы человека влияют постоянно изменяющиеся нагрузки, имеющие различную (физиологическую и патологическую) природу. В частности, такое изменение может происходить вследствие врачебного вмешательства. Известно [11, 17, 20, 25–26, 31–33], что подобные изменения нагрузки имеют отдаленные во времени последствия и в первую очередь отражаются на организации структуры костной ткани. Костная ткань делится на компактную (кортикальную) и губчатую (трабекулярную) в зависимости от расположения трабекул. Структурной единицей губчатой костной ткани, образующей ее архитектуру, является трабекула.

Губчатая костная ткань является неоднородным пористым анизотропным материалом, механические свойства которого во многом определяются его внутренней архитектурой и подчиняются тем же принципам, что и инженерные конструкции [33, 54]. Губчатая костная ткань живого человека является динамической структурой, в которой непрерывно происходят различные адаптационные процессы. Адаптация (перестройка) структуры трабекулярной костной ткани представляет собой процесс поворота трабекул в сторону воздействия преобладающей силы на рассматриваемую область. В частности, под действием новой нагрузки в структуре трабекулярной костной ткани могут начаться адаптационные изменения, которые затем окажут влияние на кортикальную костную ткань. Механизм перестройки на клеточном уровне реализуется путем резорбции (рассасывания) отдельных старых трабекул остеобластами и образования новых трабекул (остеосинтеза) остеокластами.

Известно, что адаптационные процессы, протекающие в организме человека, подчиняются закону Вольфа (*Wolff's law*) [69]. Закон Вольфа применительно к живой костной ткани звучит следующим образом: *кость приспособливает свою внешнюю форму и внутреннюю структуру к тем механическим силам, которые она должна выдержать* [11, 13, 14, 20, 32, 33, 54]. В частности, закон Вольфа для костной ткани говорит о том, что архитектура губчатой кости в локальной области структурно приспособляется к местному напряженному состоянию костной ткани [13, 20, 32, 33]. При этом структурная адаптация в живой губчатой кости носит направленный характер: трабекулы располагаются закономерно, сообразно тому, какие внешние нагрузки испытывает данная кость [13, 20, 32, 33]. В частности, в областях, где приложена нагрузка и началась перестройка, происходит увеличение плотности, а трабекулы в процессе перестройки выстраиваются вдоль главных направлений тензора напряжений [13, 20, 32, 33].

Несмотря на существующие в настоящее время методы, позволяющие получать изображения губчатой костной ткани *in vivo* [47, 51, 52], их применение в клинической практике ограничено возможно и практически не обладает прогностической функцией. Таким образом, возникает необходимость в прогнозировании долговременного отклика структуры на внешнее вмешательство методами математического моделирования, т.е. необходимость в разработке модели перестройки (адаптации) губчатой костной ткани с учётом взаимовлияния напряжённо-деформированного состояния и структурных изменений. Математическое моделирование перестройки губчатой костной ткани по-прежнему остается одной из актуальных задач биомеханики.

Ранее автором данной статьи была описана модель перестройки губчатой костной ткани с учётом взаимовлияния напряжённо-деформированного состояния и структурных изменений, позволяющая спрогнозировать долговременный отклик структуры на внешнее вмешательство методами математического моделирования [13, 14, 64]. Данная модель может быть использована для решения прикладных задач о

перестройке губчатой костной ткани в различных отделах скелета человека [3–9, 14, 30] в прогностических целях, в частности применительно к различным отделам зубочелюстной системы человека [31]. Особый интерес представляет моделирование структуры в нижней челюсти человека.

ЗУБОЧЕЛЮСТНАЯ СИСТЕМА ЧЕЛОВЕКА – ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Нижняя челюсть человека является непарной и единственной подвижной костью лицевого скелета. К нижней челюсти крепится большое количество мышц, приводящих её в движение. Эти особенности определяют сложность строения нижней челюсти и её влияние на развитие лицевого скелета и покрывающих скелет мягких тканей [1, 2, 17].

Строение нижней челюсти с момента рождения и до глубокой старости изменяется в соответствии с испытываемой ею нагрузкой, имеющей различную природу [2]. При этом в процессе развития и роста нижней челюсти структура губчатой костной ткани также изменяется в соответствии с испытываемым костью нагружением, ее напряженным состоянием (рис. 1).

Для объективного учета этих изменений необходимо выяснить типовые особенности нормального строения, присущие челюсти в целом и подчиняющиеся различным ее анатомо-физиологическим законам в каждом возрастном периоде. Остановимся на этих изменениях подробнее.

Замечено, что тело нижней челюсти имеет ярко выраженную структуру губчатой костной ткани (рис. 2) [16]. Исследования трабекулярной структуры выявляют закономерности ее строения. Костные балки губчатого вещества располагаются по линиям действия сил при нагрузке. Всего выделяют до девяти таких траекторий [26].

Строение ветви нижней челюсти во всех возрастных периодах было подробно изучено в работах [2, 26]. Ветвь нижней челюсти человека растет в длину и ширину неравномерно [2]. Наиболее интенсивные периоды роста ветви в высоту (длину) отмечаются в возрасте от 3 до 4 лет и в 9–11 лет. Периоды значительного роста ветви в ширину наблюдаются в сроки прорезывания больших коренных зубов, т.е. в возрасте 9, 15 и 18 лет [26].

Наибольший прирост массы костного вещества восходящей ветви нижней челюсти происходит в период от 6 до 15 лет. Период от 25 до 45 лет включительно характеризуется наименьшим разбросом количества костного вещества ветви. С 50 лет и до глубокой старости количество костного вещества в восходящей ветви человека убывает. Наибольшее увеличение количества компактного вещества по отношению к губчатому происходит в четыре срока: от 9 месяцев до 1 года; от 2,5 до 4 лет; от 9 до 12 лет и от 15 до 18 лет [26].

Формирование губчатого вещества восходящей ветви по возрастам подтверждает данные о различных типах организации костной ткани в двух соприкасающихся треугольных полях (вентральном и дорсальном) восходящей ветви. Для вентрального треугольного поля типично (в зрелом возрасте) преобладание дугообразных конструкций (в виде так называемых «опрокинутых арок»), для дорсального – веерообразных, расходящихся переключин [26].

Радиальные, расходящиеся структуры губчатого вещества ветви обнаруживаются уже к моменту рождения; количество их быстро нарастает к 3 годам и в дальнейшем увеличивается как в численном отношении, так и в отношении мощности составляющих их элементов. Дуговые переключины вентрального отдела восходящей ветви появляются позднее радиальных. К двум годам при наличии 16–18 зубов они впервые прорисовываются и развиваются в период от 3 до 6 лет.

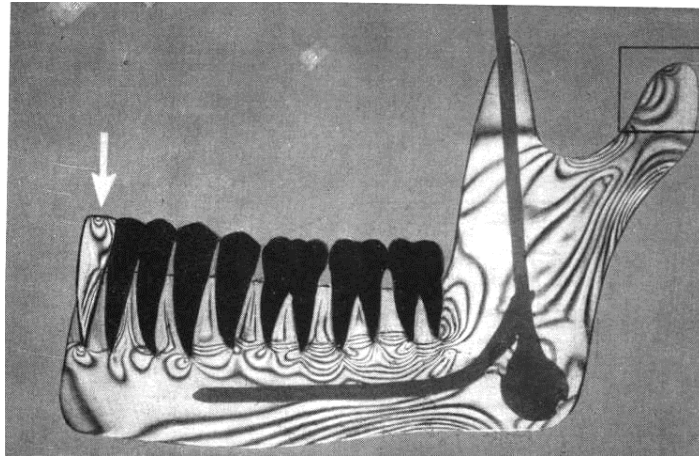


Рис. 1. Линии напряжений при нагрузке на фронтальном участке (напряжения возникают во всей челюсти) [16]

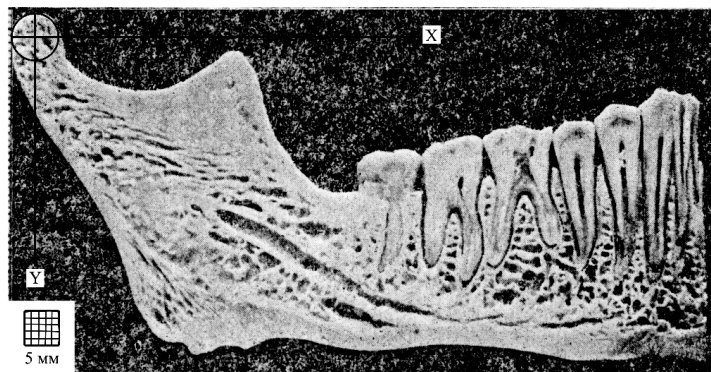


Рис. 2. Губчатая костная ткань нижней челюсти [16]

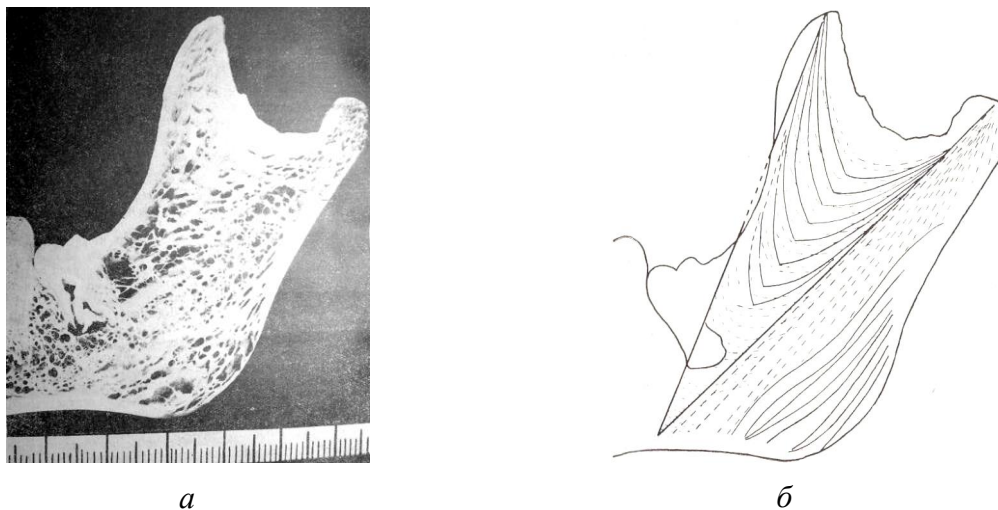


Рис. 3. Структура (а) и траектории (б) ветви нижней челюсти [2]

Затем сложившаяся система «опрокинутых арок» как бы созревает, становится более четкой, отшлифовывается в процессе жизнедеятельности в соответствии с меняющимися условиями существования (в том числе вследствие смены молочных зубов постоянными). К 15 годам губчатое вещество вентрального треугольника приближается по своему строению к кости зрелого возраста, а к 18 годам оно почти не

отличается от губчатого вещества 25-летнего человека (рис. 3). Выпадение зубов и старческая инволюция проявляются в наибольших изменениях губчатого вещества в вентральном треугольном поле восходящей ветви. Регрессивные процессы старческого возраста возникают в тех отделах кости, которые в онтогенезе оформляются позднее других.

Показано, что трабекулы в альвеолярном отростке и ветви нижней челюсти выстраиваются вдоль линий главных напряжений, т.е. вдоль главных направлений тензора напряжений, и образуют арочную архитектуру в ветви нижней челюсти [2, 27]. Данное утверждение согласуется с законом Вольфа для костной ткани. Отсюда видно, что необходимо иметь способ количественного описания формирующейся под воздействием изменяющегося биомеханического давления структуры костной ткани в различных отделах зубочелюстной системы. В частности, при постановке задач об определении напряжённо-деформированного состояния в нижней челюсти человека необходимо учитывать ее внутреннюю структуру [12–15, 24–26].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

С тех пор, как был сформулирован закон Вольфа, накопилось множество экспериментальных данных и математических моделей, описывающих этот механизм [11, 20, 30–41, 43, 44, 46, 53, 54, 56–59, 61, 62, 70]. В данной работе реализуется процесс перестройки губчатой костной ткани как упругого анизотропного тела, оснащенного структурой, согласно эволюционным соотношениям, впервые предложенным в работе [32] и примененным при практических расчетах в серии исследований [3–7, 9, 11–15, 20, 30, 31]. В качестве инструмента численного моделирования используются программный пакет конечно-элементного анализа *ANSYS* и пакет прикладных программ *MATLAB* [7].

На уровне органов и тканей (мезо- и макроуровнях) математически удобнее описывать губчатую структуру некоторой области тензорной величиной, пренебрегая свойствами отдельных трабекул. Известно, что одним из наиболее удачных способов [11–13, 20, 22, 26, 33, 38, 39, 45, 48, 49, 54, 56, 57, 60, 61, 63, 65–68] описания локальной структуры многих пористых и композиционных материалов является симметричный, положительно определенный тензор второго ранга, названный тензором структуры (*fabric tensor*) и обозначенный как \tilde{N} [11–13, 20, 22, 26, 33, 60, 63].

Тензор структуры, построенный для губчатой костной ткани в соответствии с ранее описанной методикой [11, 12, 20, 26, 63], позволяет компактно в тензорной форме описать анизотропию костной структуры, причём его главные значения позволяют охарактеризовать распределение материала вдоль главных направлений [14, 15, 26, 64]. Данный тензор позволяет сформулировать соотношения, способные количественно описать свойства материала с учётом его строения и адаптационные изменения, например, костной микроструктуры.

Ранее автором была рассмотрена измерительная процедура, позволяющая проводить стереологические исследования [22] для построения тензора структуры, и исследованы свойства тензора структуры и связанного с ним тензора анизотропии [12, 63]. Также была отработана методика экспериментального получения трёхмерных образцов трабекулярной костной ткани и дальнейшего построения тензора структуры [12, 63] – см. рис. 4.

Установлено [14, 33, 39, 64], что в состоянии гомеостаза (физиологического равновесия) ориентация трабекул в рассматриваемой области губчатой кости совпадает с главными направлениями тензора напряжений в этой же области, в этом случае тензоры напряжений и структуры должны быть соосны.

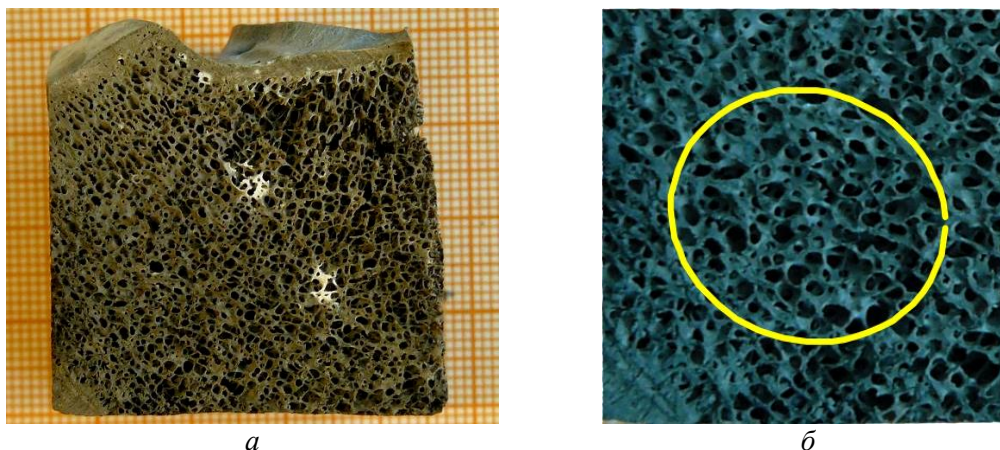


Рис. 4. Характерный вид костного образца после его извлечения из муфельной печи (а) и после его подготовки для построения тензора структуры с наложенным эллипсом структуры (б) [12]

Совпадение главных осей тензоров напряжения $\tilde{\sigma}^0$ и структуры \tilde{N}^0 имеет место в случае, когда их скалярное произведение коммутативно [20, 27, 33, 39], т.е. выполняется условие, что

$$\tilde{\sigma}^0 \cdot \tilde{N}^0 = \tilde{N}^0 \cdot \tilde{\sigma}^0. \quad (1)$$

В предыдущих работах [13, 64] было показано, что существует определяющее соотношение, включающее в себя тензор структуры и связывающее напряжённо-деформированное состояние в губчатой костной ткани с её строением (трабекулярной микроструктурой). При этом считается, что костный матрикс в губчатой кости (пористом упругом теле) изотропен [32, 33] и вся ее неоднородность связана со строением анизотропной микроструктуры трабекулярной костной ткани. В этом случае анизотропия губчатой кости может быть описана посредством тензора структуры, при этом упругие свойства материала будут зависеть от пористости губчатой кости и от ориентации трабекул.

Таким образом, на основе существующих подходов [8, 13, 14, 21, 23, 27, 28, 32–41], можно получить определяющее соотношение, позволяющее описать напряжённо-деформированное состояние губчатой кости с учётом её структуры:

$$\tilde{\sigma} = (g_1 + g_2 e)(\text{tr} \tilde{\epsilon}) \tilde{E} + (g_3 + g_4 e) \tilde{\epsilon} + g_5 (\tilde{\epsilon} \cdot \tilde{K} + \tilde{K} \cdot \tilde{\epsilon}) + g_6 (\text{tr}(\tilde{K} \cdot \tilde{\epsilon}) \tilde{E} + (\text{tr} \tilde{\epsilon}) \tilde{K}), \quad (2)$$

где \tilde{K} – девиатор тензора структуры \tilde{N} , нормированный таким образом, что $\text{tr} \tilde{K} = 0$ [8]; e – изменение доли твёрдого объёма кости относительно отсчётной величины v_0 ; g_1 – g_6 – константы [13, 32], ГПа. Эти константы были определены в работе [62] после серии экспериментов на различных образцах губчатых костей человека и крупного рогатого скота.

На основе закона Вольфа [13, 14, 20, 32, 33, 39, 64, 69] был также описан предполагаемый механизм перестройки трабекулярной микроструктуры, происходящий вследствие адаптационных процессов, перманентно протекающих в живой костной ткани. В соответствии с законом Вольфа для губчатой костной ткани [13, 14, 32, 33] были получены эволюционные соотношения, описывающие изменения в строении губчатой кости под воздействием различных нагрузок. Данные кинетические уравнения способны описать изменение девиатора тензора структуры \tilde{K} и доли твёрдого объёма кости e . А именно:

$$\frac{d\tilde{K}}{dt} = (h_1 + h_3 e)(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^0) + h_4 \operatorname{tr}(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^0) \tilde{K} +$$

$$+ h_2 \left(\left(\operatorname{tr}(\tilde{K} \cdot (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^0)) \right) \tilde{E} - \frac{3}{2} \left(\tilde{K} \cdot (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^0) + (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^0) \cdot \tilde{K} \right) \right), \quad (3)$$

и

$$\frac{de}{dt} = (f_1 + f_2 e)(\operatorname{tr} \tilde{\varepsilon} - \operatorname{tr} \tilde{\varepsilon}^0) + f_3 (\operatorname{tr}(\tilde{K} \cdot (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^0))), \quad (4)$$

где h_1 – h_4 и f_1 – f_3 – константы [14, 32], сут^{-1} , определяемые эмпирически так, чтобы перестройка костной ткани происходила за время, соответствующее природной действительности. В норме адаптация губчатой кости происходит примерно за 160 дней [14, 20, 33, 54, 64].

Для соотношений (2)–(4) была представлена постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани. Данная постановка может быть использована для решения вопросов об исследовании напряжённо-деформированного состояния губчатой костной ткани и протекающих в ней адаптационных процессов.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для представленной в работе математической модели перестройки губчатой костной ткани был разработан и протестирован численный алгоритм ее решения. Данный алгоритм был реализован в виде комплексов проблемно-ориентированных программ [14, 15, 30, 31].

В ряде вычислительных экспериментов были осуществлены идентификация и верификация параметров модели и на ряде примеров показана эволюция губчатой костной ткани при изменении напряжённо-деформированного состояния. Далее будут кратко описаны полученные результаты.

Для верификации разработанного алгоритма была решена классическая задача [32, 33], подробно разобранный в [14, 64]. Рассматривалась локальная область губчатой костной ткани (рис. 5), находящаяся в состоянии гомеостаза в течение достаточно долгого промежутка времени ($t < 0$). В момент времени $t = 0$ происходит однократное изменение условий нагружения, приводящее к перестройке трабекулярной микроструктуры. Новое напряжённое состояние в рассматриваемой области при этом не изменяется в течение достаточно долгого промежутка времени ($t > 0$) [14].

Данные, полученные по истечении 160 суток, показаны на рис. 6. В результате адаптационных процессов для нового напряженно-деформированного состояния была получена новая костная микроструктура [14, 64], при этом время и характер сходимости, полученные из решения, совпадают с известными [32] результатами.

Заметим, что представленный пример является комплексным: действующее на трабекулярную микроструктуру давление, изначально являясь неоднородным, изменяется как по величине, так и по направлению. Данный пример сложен для детального анализа и необходим лишь для сравнения с результатами работы [32] и верификации представленного решения. Серия примеров [3–6, 15, 64], рассмотренная автором и не представленная в данной работе, показала хорошую работоспособность модели.

Далее были рассмотрены классические задачи [18] о растяжении и изгибе консольно-защемленной балки, оснащенной структурой. Полученные результаты также свидетельствуют о работоспособности модели [4, 15, 30, 31].

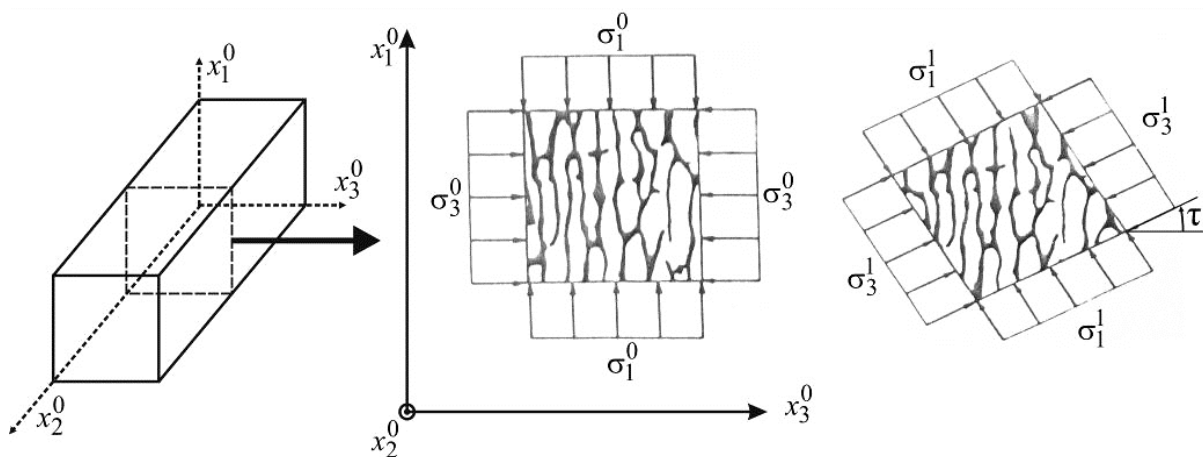


Рис. 5. Иллюстрация процесса перестройки структуры трабекулярной костной ткани из одного состояния физиологического равновесия в другое [14]

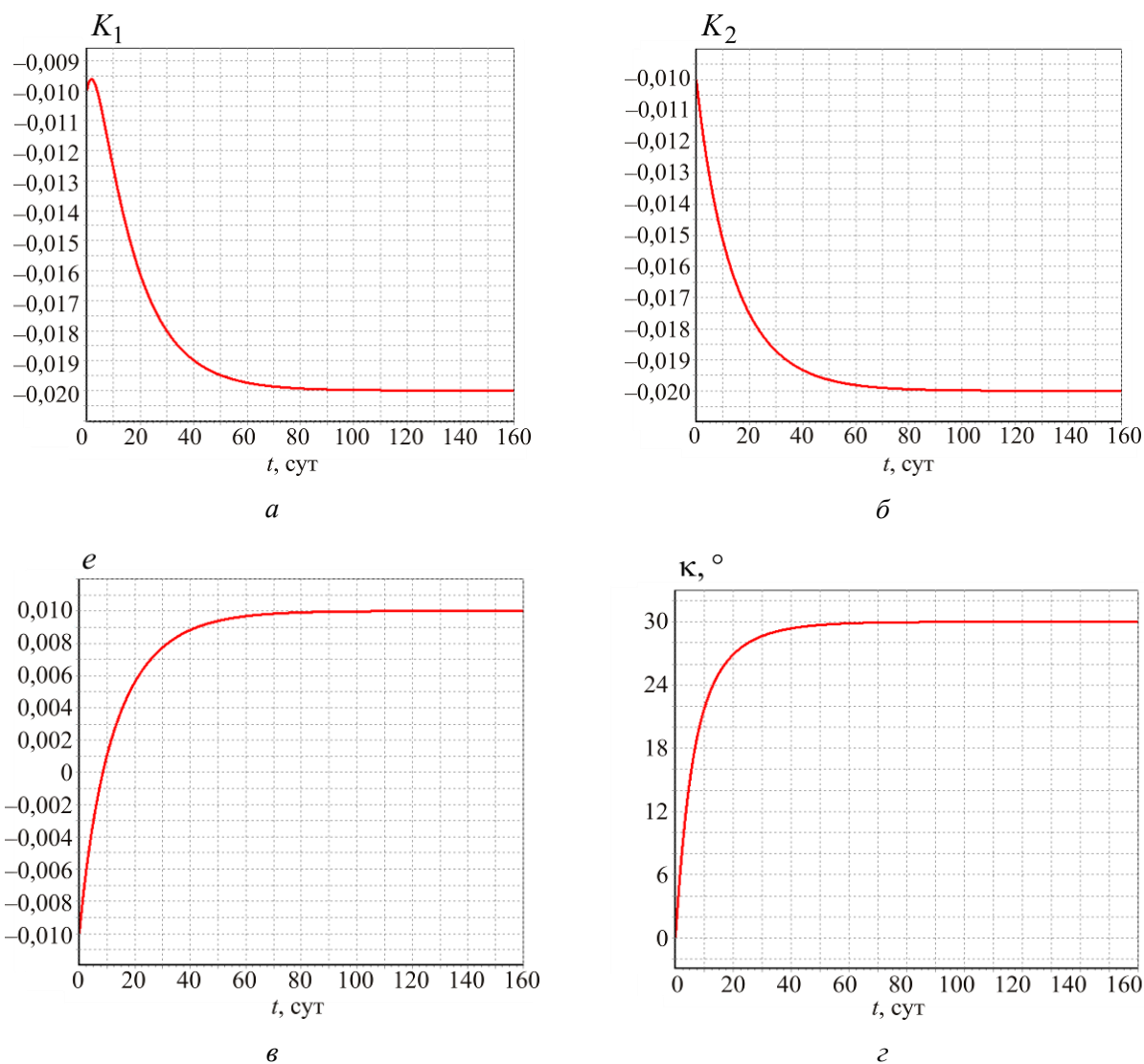


Рис. 6. Изменение компонент девиатора тензора структуры (a , $б$), плотности ($в$) и угла $\kappa(t)$ между главными осями тензора напряжений и девиатора тензора напряжений ($г$) [14]

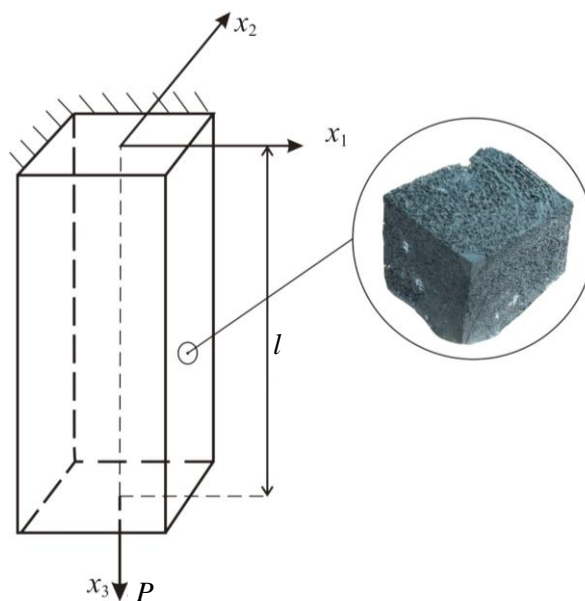


Рис. 7. Растяжение неоднородного стержня под действием осевой силы

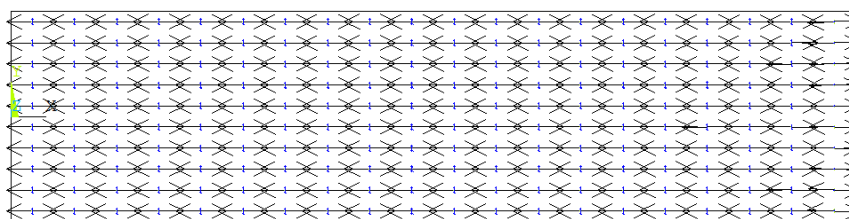


Рис. 8. Главные направления девiatorа тензора структуры после окончания перестройки

На примере растяжения ортотропного стержня [18] было показано влияние различной ориентации структуры материала на его напряженно-деформированное состояние. В задаче консольно-защемленная балка растягивалась осевой силой P (см. рис. 7), при этом в каждой точке бруса задавалась структура, соответствующая полученному в работах [12, 63] значению тензора структуры для трехмерного образца губчатой костной ткани.

В результате первоначально несоосные тензор напряжений и девiator тензора структуры стали соосными (рис. 8), а новая костная микроструктура изменилась так, как показано на рис. 9 [6, 15, 30]. Значения перемещений, напряжений и деформации также совпали со значениями, определенными в работе [18] для двумерного и трехмерного случаев (рис. 10–11).

На примере изгиба консольно-защемленной балки, оснащенной структурой [18], было показано влияние различной ориентации структуры материала на его напряженно-деформированное состояние [4]. Было также показано качественное совпадение результатов численного моделирования с результатами, полученными в работе [46], где консольно-защемленная балка при изгибе принимает характерную форму языка: утолщается в области заделки и становится тоньше в области приложения изгибающей нагрузки, – а линии главных напряжений образуют характерные траектории (рис. 12). В рассмотренной автором статьи задаче изначально однородная балка изгибалась силой F (рис. 13).

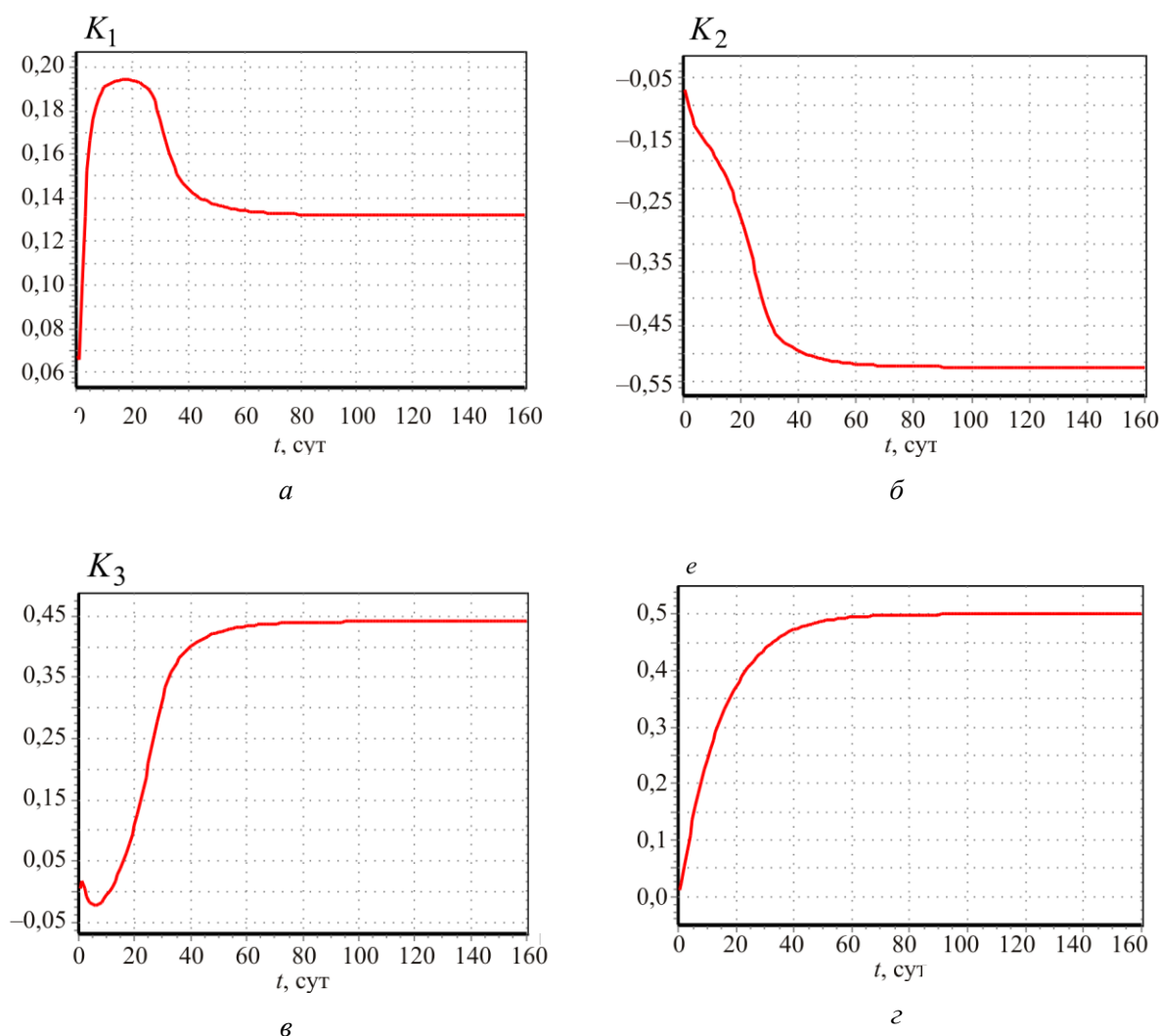


Рис. 9. Изменение структуры (компонент девиатора тензора структуры $K_1(t)$ (а), $K_2(t)$ (б) и $K_3(t)$ (в)) и доли твердого объема $e(t)$ трабекулярной микроструктуры (з)

В результате начальный тензор структуры \tilde{N}^0 , соответствующий однородной структуре, перестал быть шаровым. В процессе перестройки главные оси девиатора тензора структуры стали соосными главным осям тензора напряжений (рис. 14) [3]. Изначально одинаковая плотность балки увеличилась в области консольного заземления и уменьшилась в области приложения нагрузки (рис. 15), что можно интерпретировать как приобретение балкой характерной формы, показанной на рис. 12. Значения перемещений, напряжений и деформации [30] также совпали со значениями, определенными в работе [18] (рис. 16–17).

ЗАДАЧА О ФОРМИРОВАНИИ ГУБЧАТОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ В ВЕТВИ НИЖНЕЙ ЧЕЛЮСТИ

Рассмотрим задачу о формировании и дальнейшей перестройке губчатой костной ткани в ветви нижней челюсти человека. Общая постановка данной задачи может быть представлена в следующем виде (рис. 18):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad t \geq 0; \quad (5)$$

$$\vec{\sigma} = \tilde{\tilde{C}}(\tilde{K}, e) \cdot \vec{\varepsilon}, \quad \vec{x} \in V \cup S, \quad t \geq 0; \quad (6)$$

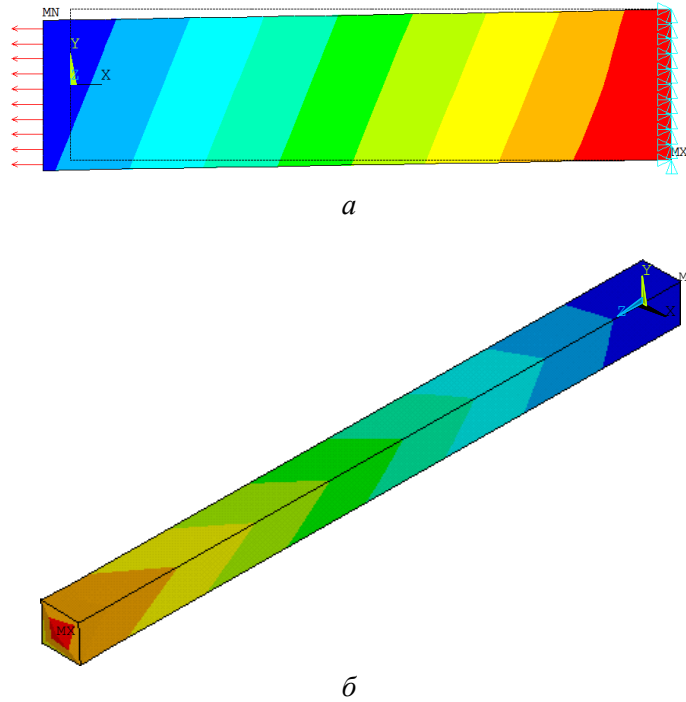


Рис. 10. Изолинии перемещений в неоднородном стержне после завершения перестройки для двумерного (а) и трехмерного (б) случаев

$$\frac{d\tilde{K}}{dt} = \tilde{f}_1(\tilde{\varepsilon}, \tilde{K}, e), \quad \text{tr} \tilde{K} = 0, \quad \bar{x} \in V, \quad t \geq 0; \quad (7)$$

$$\frac{de}{dt} = f_2(\tilde{\varepsilon}, \tilde{K}, e), \quad \bar{x} \in V, \quad t \geq 0; \quad (8)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla}), \quad \bar{x} \in V \cup S, \quad t \geq 0; \quad (9)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma}|_{S_{\sigma k}} = \vec{P}_k, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2, 3; \quad (10)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma}|_{S_{\sigma 4}} = 0, \quad t \geq 0; \quad (11)$$

$$\vec{u}|_{S_u} = 0, \quad t \geq 0; \quad (12)$$

$$t = 0: \quad \tilde{K} = \tilde{K}^0, \quad e = e^0, \quad \bar{x} \in V; \quad (13)$$

$$t = 0: \quad \vec{P}_k = \vec{P}_k^0, \quad \bar{x} \in S_{\sigma k}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \vec{u} = 0, \quad \bar{x} \in S_u. \quad (14)$$

В начальный момент времени структура губчатой костной ткани в ветви нижней челюсти считалась однородной и была задана шаровым тензором структуры, т.е.

$$\tilde{K}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

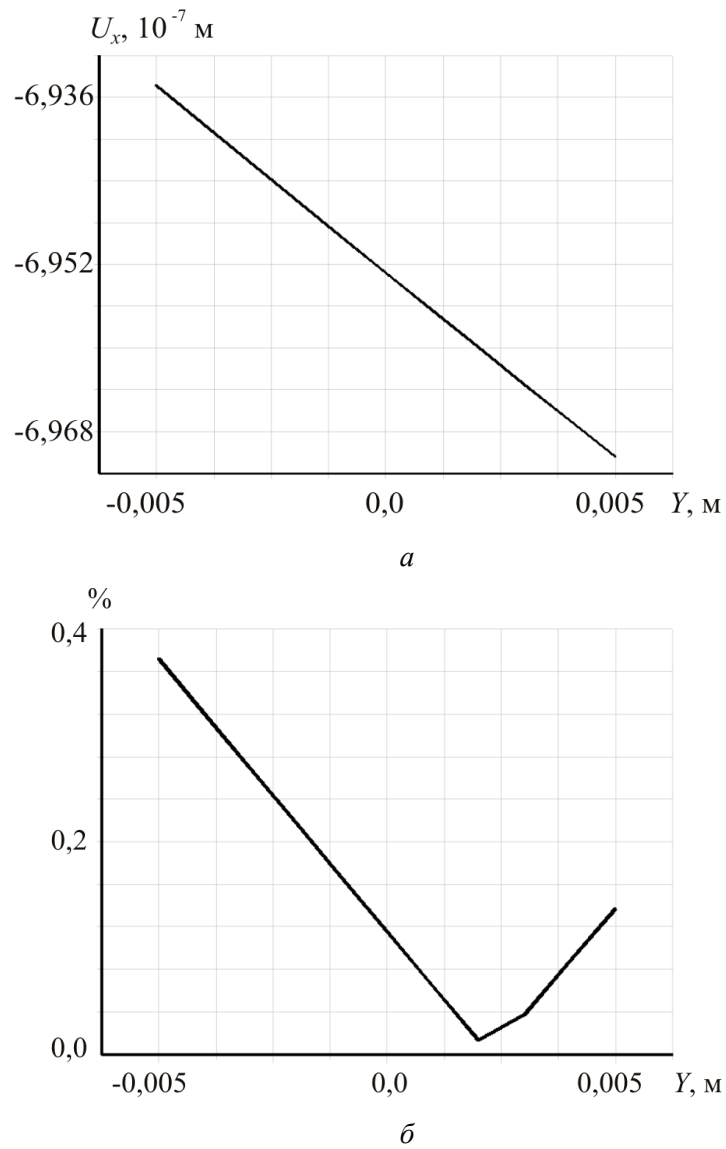


Рис. 11. Перемещения точек средней линии (а) и относительная погрешность (б) численного решения в сравнении с аналитическим [5]

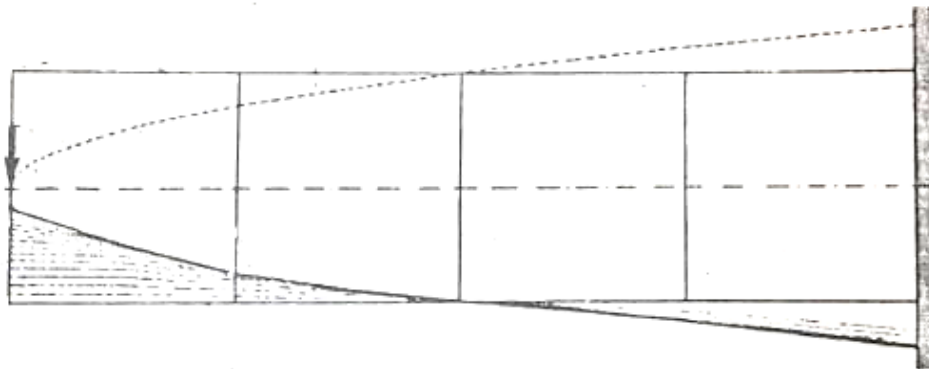


Рис. 12. Адаптация формы консольно-защемленной балки, нагруженной изгибающей силой [46]

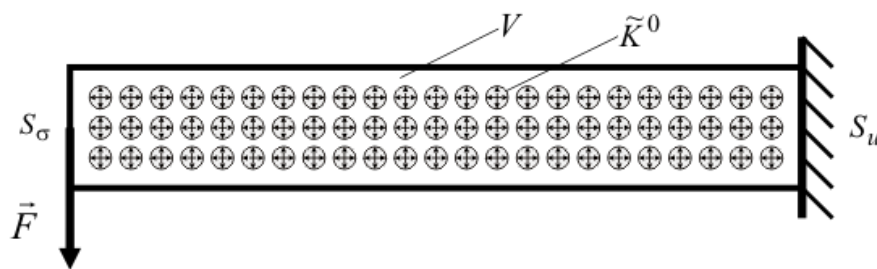


Рис. 13. Изгиб консольно-защемленной балки, оснащенной в начальный момент времени однородной структурой \tilde{N}^0 (или \tilde{K}^0)

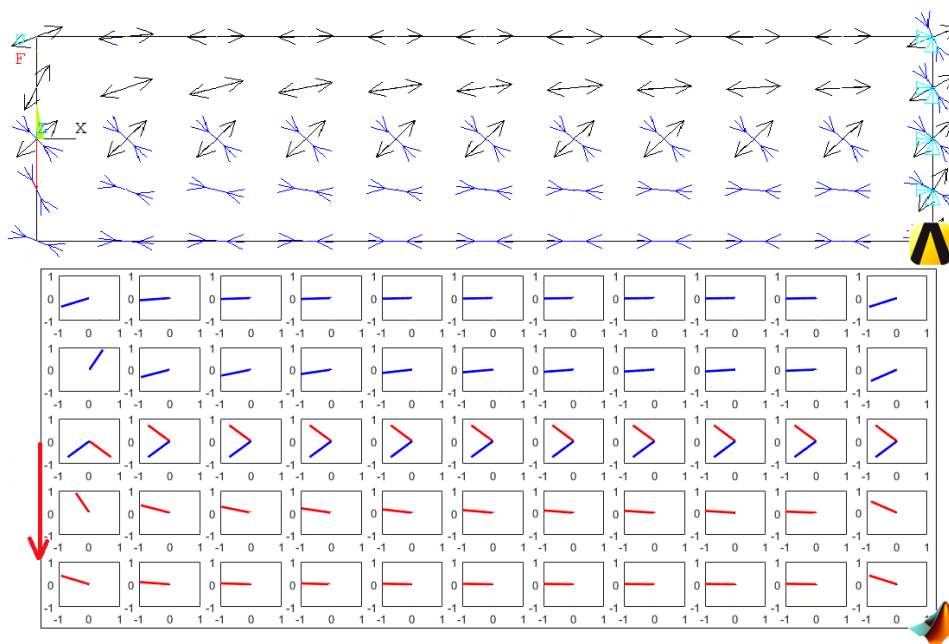


Рис. 14. Сравнение направления главных осей тензора напряжений и девиатора тензора структуры после завершения перестройки

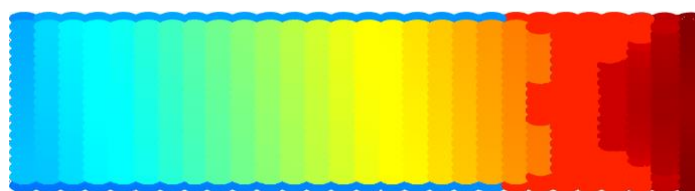


Рис. 15. Изменение плотности (доли твердого объема) балки после завершения перестройки: ■ – более плотные зоны; ■ – менее плотные зоны

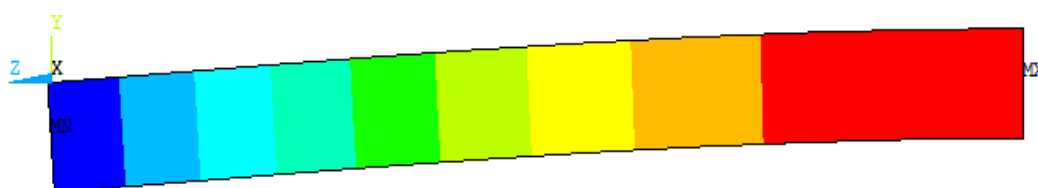


Рис. 16. Изолинии перемещений в неоднородном стержне после завершения перестройки

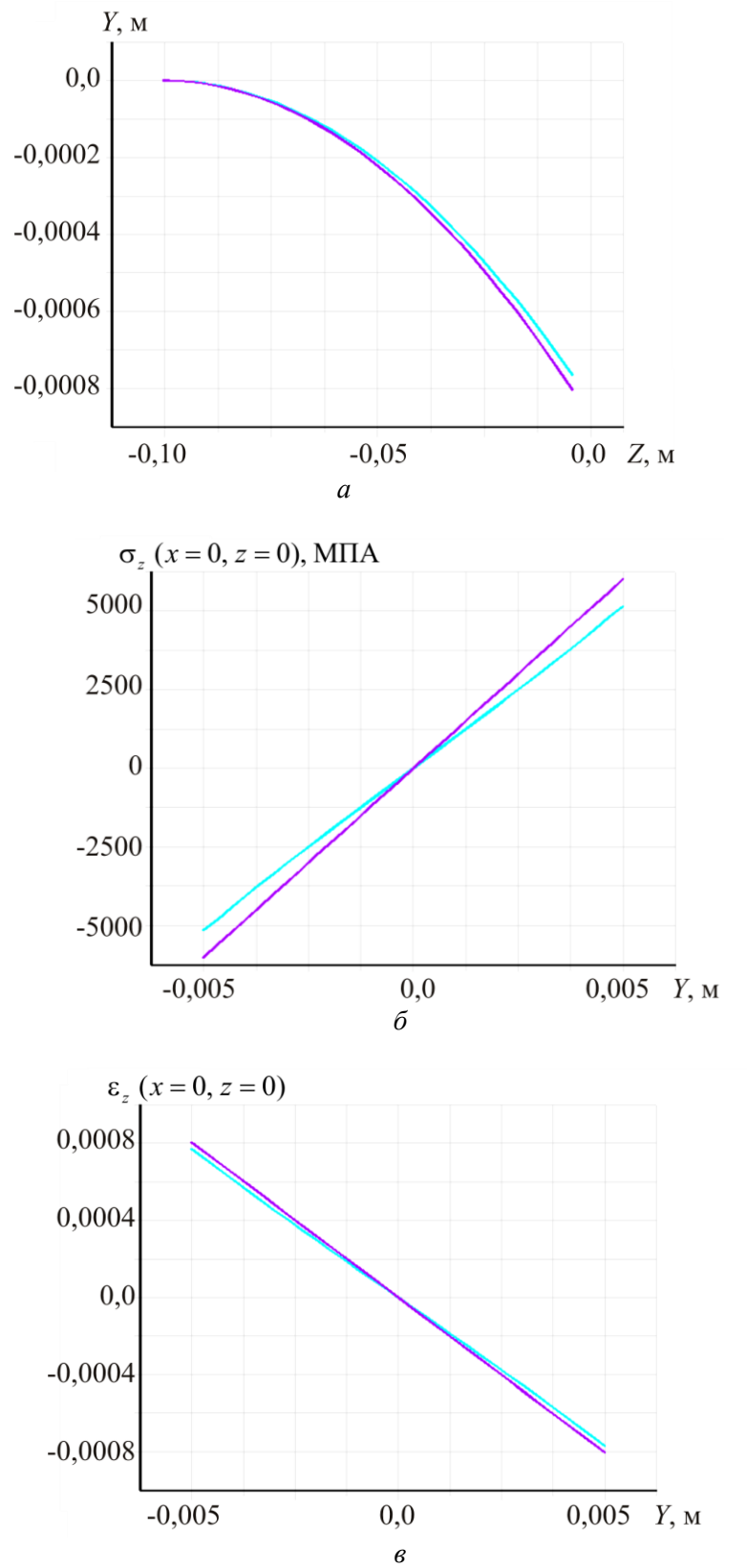


Рис. 17. Сравнение аналитического [4] и численного решений: перемещения точек средней линии U_y (а), напряжения σ_z (б) и деформации ε_z (в) в сечении, перпендикулярном средней линии при $z = l / 2$

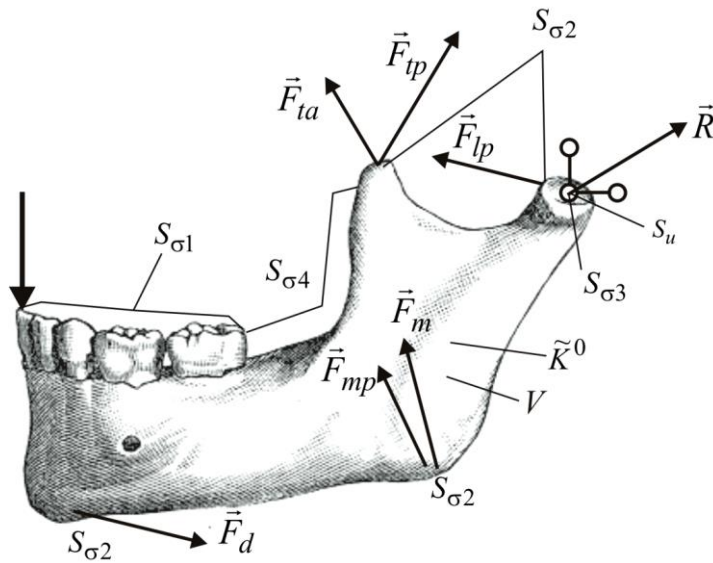


Рис. 18. Постановка задачи о перестройке губчатой костной ткани в ветви нижней челюсти человека

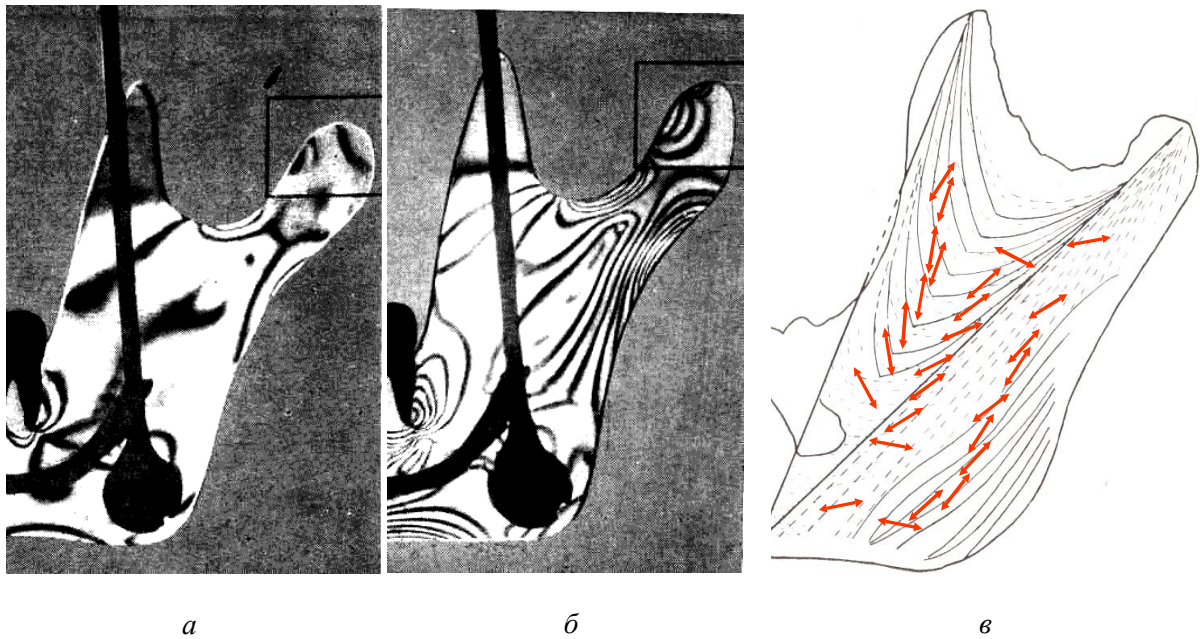


Рис. 19. Сравнение траекторий напряжения, полученных методом фотоупругости [55] (а и б), траекторий ветви нижней челюсти [2] и главных направлений тензора структуры (в) [27]

Такая структура может соответствовать ситуации, когда на нижнюю челюсть не оказывали влияния никакие нагрузки, т.е. челюсти новорожденного ребенка. В дальнейшем при приложении нагрузок структура нижней челюсти должна приобрести характерный вид (см. рис. 3).

Ранее было показано [20, 26], что тензор структуры с достаточной степенью точности может описывать структуру ветви нижней челюсти, при этом главные оси тензора структуры совпадали с траекториями трабекул, полученными в работе [2], и траекториями напряжений из работы [55] (рис. 19).

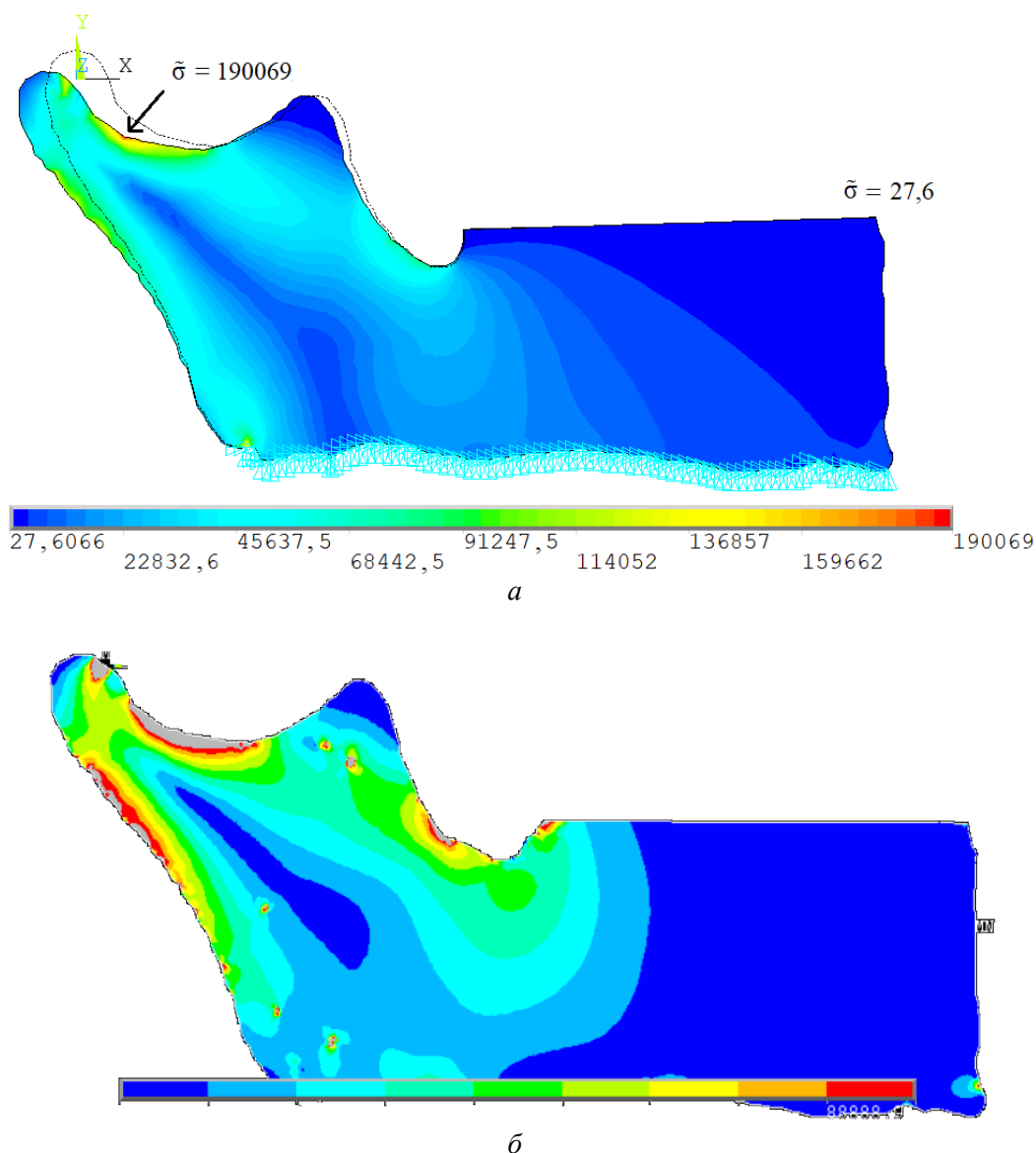


Рис. 20. Интенсивность напряжений по Мизесу (а) и ее сравнение с данными из работы [19] (б)

Расчёт напряженно-деформированного состояния производился с помощью метода конечных элементов в пакете *ANSYS* [7, 31], определение параметров структуры (доли твердого объема кости и девиатора тензора структуры) осуществлялось в *MATLAB*. Была построена двумерная конечно-элементная модель нижней челюсти, её размеры были определены из работы [2], свойства костного матрикса взяты из работы [50], координаты точек прикрепления жевательных мышц и нагрузка от их действия на кость – из работ [10, 19]. Для задания конечно-элементной сетки использовался двумерный конечный элемент *Plane182*, поддерживающий задание анизотропных свойств. Численное интегрирование кинетических уравнений осуществлялось методом Рунге – Кутты четвёртого порядка.

Были рассмотрены различные варианты приложения нагрузки в начальный момент времени. Необходимо отметить, что наиболее наглядно начальное напряженное состояние позволял представить вариант области без учета зубного ряда (нагрузка прикладывается непосредственно к кости челюсти между предполагаемым нахождением второго и первого премоляра) – см. рис. 20.

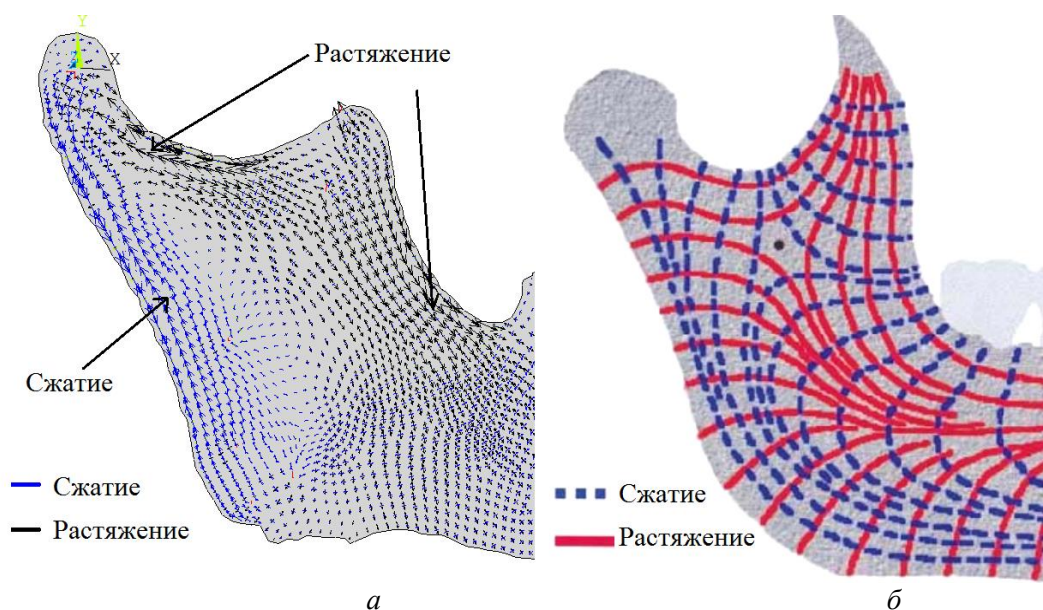


Рис. 21. Упрощенное представление распределения напряжений: главные направления, полученные в ANSYS (а) [31], и траектории, в среднем наблюдаемые в челюсти (б) [50]

Видно, что полученная картина интенсивности напряжений в ветви нижней челюсти (см. рис. 20, а) качественно совпадает с траекториями напряжений, полученными методом фотоупругости [55] (см. рис. 1 и 19, а и б). Полученные результаты совпадают также с данными из работы [19] для заданной области без учета параметров структуры (см. рис. 20, б).

Ещё одним наглядным и удобным для последующих вычислений способов иллюстрации напряжённого состояния является изображение главных направлений тензора напряжений, которые показывают, как ориентированы трабекулы внутри костной ткани (рис. 21).

Полученная по истечении 160 суток доля твердого объема кости показана на рис. 22. Результаты распределения плотности костного вещества, полученные для геометрии челюсти с учетом зубов и без них, при рассматриваемых условиях нагружения качественно совпадают. Видно сходство в распределении пористости в сравнении с рис. 3, а.

Что касается распределения трабекул в ветви нижней челюсти, то, как показали вычислительные эксперименты, отведенных 160 дней недостаточно для того, чтобы главные оси девиатора тензора структуры стали соосными с главными осями тензора напряжений. По всей видимости, структуре в ветви нижней челюсти требуется больше времени для ее адаптации к физиологическому напряженному состоянию. Это соответствует известным фактам: полностью трабекулярная структура формируется лишь к 16–18 годам. Определение параметров модели и времени перестройки является предметом нашего дальнейшего исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена модель перестройки губчатой костной ткани с учётом определяющего соотношения и кинетических уравнений феноменологической теории [12], описывающих изменения трабекулярной архитектуры на мезоуровне с помощью тензора структуры. Осуществлена постановка задачи о перестройке губчатой костной ткани, и на ряде модельных примеров показана ее работоспособность.

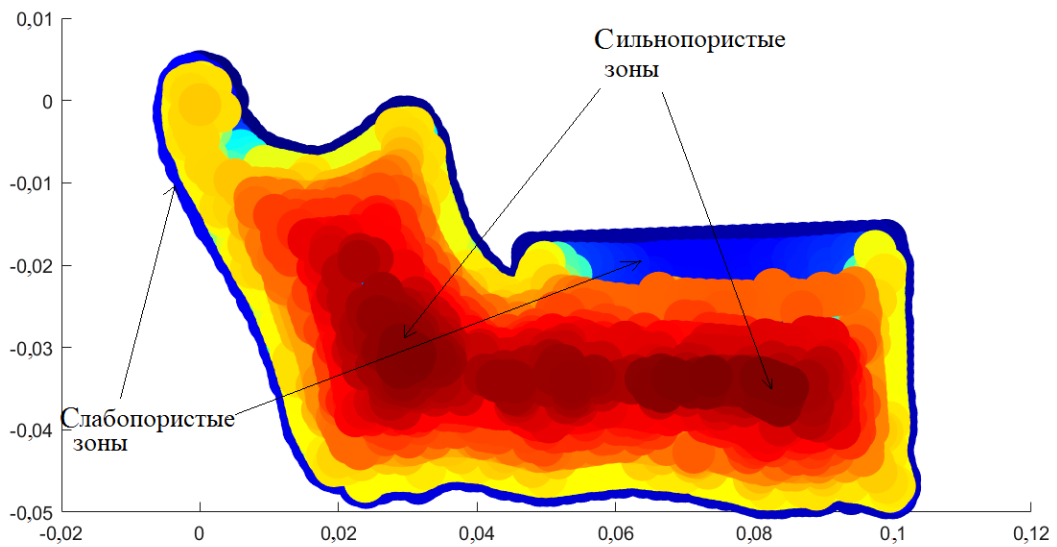


Рис. 22. Распределение доли твердого объема кости по истечении 160 суток

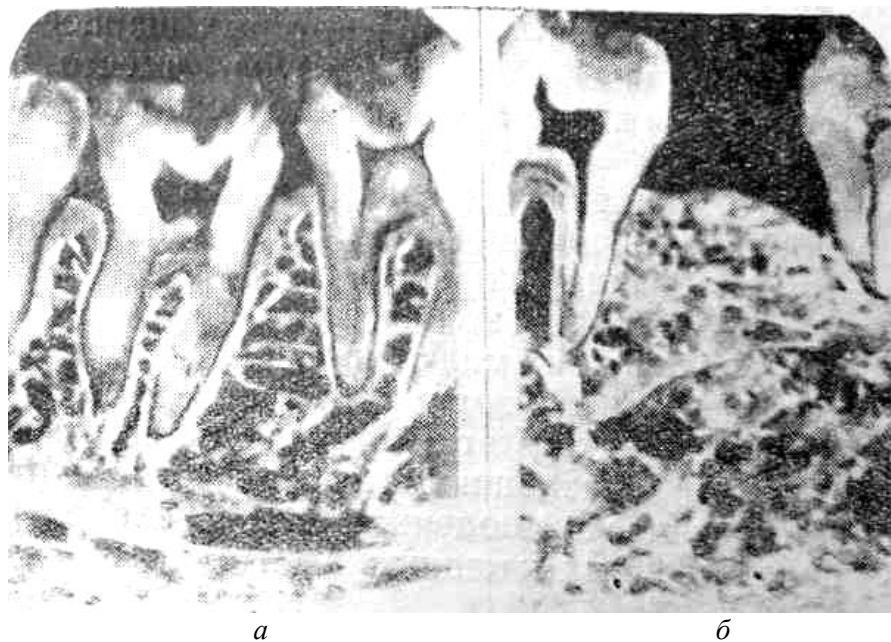


Рис. 23. Нормальная структура губчатого вещества нижней челюсти (препарат) мужчины 25 лет (*а*) и структура губчатого вещества нижней челюсти (препарат) мужчины соответственного возраста при синдроме Попова – Годона (*б*) [42]

Рассмотрена также перестройка костной ткани в ветви нижней челюсти. Полученные результаты достаточно схожи с траекториями напряжений и структуры, известными из литературы. Таким образом, представленная модель отражает закономерности формирования костной ткани в различных отделах скелета человека и может быть использована, например, для описания отклика зубочелюстной системы на изменяющееся биомеханическое давление.

В частности, представляет интерес моделирование поведения костной ткани в районе вживления имплантата, например при синдроме Попова – Годона [25, 26] (рис. 23) или какой-либо функциональной травме [7] с последующим замещением дефектов зубного ряда. Одной из важнейших проблем современной стоматологии

является атрофия челюстных костей при частичной или полной вторичной адентии. Потеря постоянных зубов и отсутствие своевременного восстановительного лечения являются основными этиологическими факторами развития «патологического» типа атрофии альвеолярного отростка.

Известно, то при потере зубов губчатая костная ткань приобретает характерное диффузное строение, трабекулы располагаются хаотично, что может быть представлено в виде шарового тензора структуры (см. рис. 23 и 24, а). В дальнейшем, при замещении дефекта зубного ряда имплантатом, трабекулы выстраиваются перпендикулярно образующей корня зуба (или штифта имплантата) – см. рис. 24, б. То же можно сказать и про ортодонтическое перемещение зуба: однородная губчатая структура должна приобрести известный в ортодонтии вид (см. рис. 24).

В этом случае граничные и начальные условия примут следующий вид:

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma}|_{S_{\sigma 1}} = \vec{F}_n, \quad t \geq 0;$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma}|_{S_{\sigma 2}} = 0, \quad t \geq 0;$$

$$\vec{u}|_{S_u} = 0, \quad t \geq 0;$$

$$t = 0: \quad \vec{K} = \vec{K}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e = e^0, \quad \vec{x} \in V;$$

$$t = 0: \quad \vec{F} = \vec{F}^0, \quad \vec{x} \in S_{\sigma 1}; \quad \vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in S_u.$$

Решение подобных задач в дальнейшем позволит планировать лечение различных заболеваний зубочелюстной системы и глубже понять механизмы ее функционирования. Появляется возможность прогнозировать результаты отдаленного врачебного вмешательства при индивидуальном подходе к каждому пациенту.

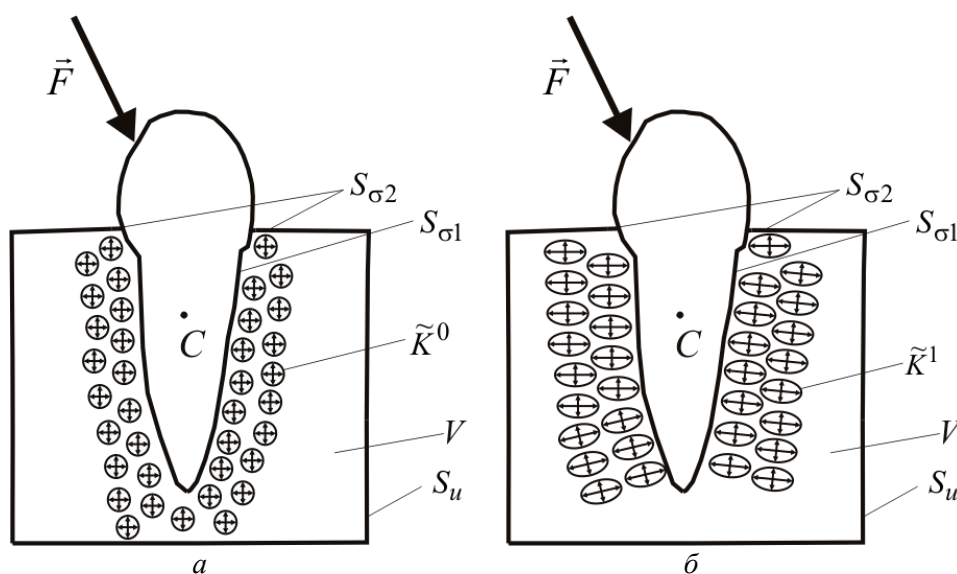


Рис. 24. Постановка задачи о перестройке костной ткани в случае восстановлении зубного ряда при синдроме Попова – Годона

БЛАГОДАРНОСТИ

Теоретическая часть работы выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (18-01-00589-а); экспериментальная часть работы – при финансовой поддержке Правительства Пермского края.

Статья подготовлена при обучении по программе ДПО [29] в Пермском национальном исследовательском политехническом университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астахов Н.А., Гофунг Е.М., Катц А.Я. Ортопедическая стоматология. – М.; Л.: Медгиз, 1940. – 380 с.
2. Бусыгин А.Т. Возрастные особенности строения восходящей ветви нижней челюсти. – Ташкент: Гос. мед. изд-во Мин-ва здравоохранения УзССР, 1961. – 171 с.
3. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. Решение задачи о перестройке трабекулярной костной ткани в конечно-элементном пакете ANSYS // Биомеханика-2016: тез. докл. XII Всерос. конф. – Пермь, 2016. – С. 36–37.
4. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. Моделирование изгиба анизотропной консольной балки в ANSYS Mechanical // Master's Journal. – 2017. – № 1. – С. 225–229.
5. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. Биомеханическое моделирование перестройки трабекулярной костной ткани при изменении нагрузки // Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы междунар. симп. – Пермь, 2017. – Т. 1. – С. 134–136.
6. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. Анализ характерного времени адаптации трабекулярной костной ткани в соответствии с законом Вольфа // Неделя науки в СПбПУ: материалы науч. конф. с междунар. участием. – СПб., 2017. – С. 271–273.
7. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. Создание интерфейса между ANSYS и MATLAB на примере перестройки трабекулярной костной ткани // Master's Journal. – 2018. – № 1 – С. 225–229.
8. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
9. Дядюкина А.Д., Киченко А.А. Математическое моделирование трабекулярной костной ткани // Биомеханика-2016: тез. докл. XII Всерос. конф. – Пермь, 2016. – С. 45.
10. Киченко А.А., Шумихин А.Ю., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Симановская Е.Ю., Еловицова А.Н. Определение усилий, возникающих в жевательной системе человека // Российский журнал биомеханики. – 2004. – Т. 8, № 4. – С. 27–38.
11. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Симановская Е.Ю., Еловицова А.Н. Становление и развитие классической теории описания структуры костной ткани // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т. 12, № 1. – С. 68–88.
12. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Заборских А.А. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 4. – С. 78–93.
13. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Лохов В.А. О приложении теории перестройки трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 53–72.
14. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Лохов В.А. Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 36–52.
15. Киченко А.А. Математическое моделирование поведения трабекулярной костной ткани при изменении условия нагружения // Математика и междисциплинарные исследования – 2016: сб. докл. Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых с междунар. участием / гл. ред. Ю.А. Шарапов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2016. – С. 167–170.
16. Курляндский В.Ю. Ортодонтия, травматология, челюстное и лицевое протезирование; атлас. Т. II. – М.: Издательство треста Медучпособие, 1970. – 404 с.
17. Курляндский В.Ю. Учебник ортопедической стоматологии: учебник для студентов мед. ин-тов. – 2-е изд. – М.: Медгиз, 1962. – 592 с.
18. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
19. Никитин В.Н. Реализация методики коррекции прикуса человека // Российский журнал биомеханики. – 2016. – Т. 20, № 1. – С. 48–57.
20. Няшин Ю.И., Подгаец Р.М. Экспериментальные методы в биомеханике. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 400 с.

21. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
22. Салтыков С.А. Стереологическая металлография. – М.: Металлургия, 1958. – 122 с.
23. Спенсер Э. Теория инвариантов. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
24. Тверье В.М., Няшин Ю.И., Никитин В.Н., Оборин Л.Ф. Механическое давление как основа биомеханического моделирования зубочелюстной системы человека // Российский журнал биомеханики. – 2014. – Т. 18, № 1. – С. 24–35.
25. Тверье В.М., Симановская Е.Ю., Няшин Ю.И. Атрофический синдром, связанный с изменениями биомеханического давления в зубочелюстной системе человека // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 1. – С. 9–13.
26. Тверье В.М., Симановская Е.Ю., Няшин Ю.И., Киченко А.А. Биомеханический анализ развития и функционирования зубочелюстной системы человека // Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т. 11, № 4. – С. 84–104.
27. Трусов П.В., Келлер И.Э. Тензорное исчисление. – Пермь: ПГТУ, 2004. – 131 с.
28. Трусов П.В., Келлер И.Э. Теория определяющих соотношений. Ч. 1. Общая теория. – Пермь: ПГТУ, 1997. – 98 с.
29. Чекалкин А.А., Макарова Е.Ю. Повышение квалификации профессорско-преподавательского персонала политехнического университета в сфере электронного обучения // Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2018. – № 27. – С. 104–127.
30. Чикова Т.Н., Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И. Биомеханическое моделирование трабекулярной костной ткани в состоянии равновесия // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 282–291.
31. Чикова Т.Н., Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И. Моделирование перестройки трабекулярной костной ткани в ветви нижней челюсти человека // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 292–300.
32. Cowin S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture // J. Biomech. Engng. – 1992. – Vol. 114. – P. 129–136.
33. Cowin S.C. Bone mechanics handbook. – Second edition. – New York: CRC Press, 2001. – 1136 p.
34. Cowin S.C. Fabric dependence of an anisotropic strength criterion // J. Mech. Materials. – 1986. – Vol. 5. – P. 251–260.
35. Cowin S.C. Imposing thermodynamic restrictions on the elastic constant-fabric tensor relationship // J. Biomechanics. – 1998. – Vol. 31. – P. 759–762.
36. Cowin S.C. Mechanical modeling of the stress adaptation process bone // J. Calcified Tissue Int. – 1984. – Vol. 36. – P. S99–S104.
37. Cowin S.C. The mechanical and stress adaptive properties of bone // J. Annals of Biomechanical Engineering. – 1983. – Vol. 11. – P. 263–295.
38. Cowin S.C. The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor // J. Mech. Materials. – 1985. – Vol. 4. – P. 137–147.
39. Cowin S.C. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium // J. Biomech. Engng. – 1986. – Vol. 108. – P. 83–88.
40. Cowin S.C., Mehrabadi M.M. Identification of the elastic symmetry of bone and other materials // J. Biomechanics. – 1989. – Vol. 22. – P. 503–515.
41. Cowin S.C., Mehrabadi M.M. On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials // J. Mech. Appl. Math. – 1987. – Vol. 40. – P. 451–476.
42. Godon C. Considerations sur l'articulation mécanique de la mâchoire et ses application à l'art dentaire // L'Odontologie. – 15 Decembre 1905.
43. Goulet R.W., Goldstein S.A., Ciarelli M.J., Kuhn J.K., Brown M.B., Feldkam L.A. The relationship between the structural and orthogonal compressive properties of trabecular bone // J. Biomechanics. – 1994. – Vol. 27. – P. 375–389.
44. Harrigan T.P., Hamilton J.J. Bone remodeling and structural optimization // J. Biomechanics. – 1994. – Vol. 27, № 3. – P. 323–328.
45. Harrigan T.P., Mann R.W. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor // J. Mater. Sci. – 1984. – Vol. 19. – P. 761–767.
46. Huiskes R., Weinans H., Grootenboer H.J., Dalstra M., Fudala B. Adaptive bone-remodeling theory applied to prosthetic-design analysis // J. Biomech. – 1987. – Vol. 20. – P. 1135–1150.
47. Ibrahim N., Parsa A., Hassan B., van der Stelt P., Wismeijer D. Diagnostic imaging of trabecular bone microstructure for oral implants: a literature review // Dentomaxillofacial Radiology. – 2013. – Vol. 42. – P. 160–169.
48. Kanatani K. Distribution of directional data and fabric tensor // Int. J. Eng. Sci. – 1984. – Vol. 22. – P. 149–164.

49. Kanatani K. Stereological determination of structural anisotropy // *Int. J. Eng. Sci.* – 1984. – Vol. 22. – P. 531.
50. Lakatos É., Lóránt M., Bojtár I. Material properties of the mandibular trabecular bone // *J. Medical Engineering.* – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–8.
51. Lin L., Cheng J., Lin W., Qin Y.-X. Prediction of trabecular bone principal structural orientation using quantitative ultrasound scanning // *Journal of Biomechanics.* – 2012. – Vol. 45, iss. 10. – P. 1790–1795.
52. Lin L., Lin W., Qin Y.-X. Enhanced correlation between quantitative ultrasound and structural and mechanical properties of bone using combined transmission-reflection measurement // *The Journal of the Acoustical Society of America.* – 2015. – Vol. 137, № 3. – P. 1144.
53. Luo G.M., Cowin S.C., Sadegh A.M., Arramon Y.P. Implementation of strain rate as a bone remodeling stimulus // *J. Biomech. Eng.* – 1995. – Vol. 117, № 3. – P. 329–338.
54. Martin R.B., Burr D.B., Sharkey N.A. *Skeletal tissue mechanics.* – Second edition. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 392 p.
55. Meyer C., Kahn J., Boutemi P., Wilk A. Photoelastic analysis of bone deformation in the region of the mandibular condyle during mastication // *J. Cranio-Maxillofacial Surgery.* – 2002. – Vol. 30. – P. 160–169.
56. Mullender M.G., Huiskes R., Weinans H. A physiological approach to the simulation of bone remodeling as a self-organizational control process // *J. Biomech.* – 1994. – Vol. 27, № 11. – P. 1389–1394.
57. Patel M.R. The deformation and fracture of rigid cellucal plastics under multiaxial stress: Ph.D. thesis. – Berkeley: University of California, 1969.
58. Sadegh A.M., Cowin S.C., Luo G.M. Inversion related to the stress-strain-fabric relationship // *J. Mech. Mater.* – 1991. – Vol. 11. – P. 323–336.
59. Sadegh A.M., Luo G.M., Cowin S.C. Bone in growth: an application of the boundary element method to bone remodeling at the implant interface // *J. Biomech.* – 1993. – Vol. 8, № 20. – P. 785–794.
60. Telega J.J., Jemiolo S. Fabric tensor in bone mechanics // *J. Engineering Transactions.* – 1998. – Vol. 46. – P. 3–26.
61. Turner C.H., Cowin S.C. On the dependence of elastic constants of an anisotropic porous material upon porosity and fabric // *J. Mater. Sci.* – 1987. – Vol. 22. – P. 3178–3184.
62. Turner C.H., Cowin S.C., Rho J.Y., Ashman R.B., Rice J.C. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone // *J. Biomechanics.* – 1990. – Vol. 23. – P. 549–561.
63. Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V. Experimental construction of the fabric tensor for trabecular bone tissue // *Series on Biomechanics.* – 2015. – Vol. 29, № 4. – P. 33–38.
64. Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V. Mathematical modelling of trabecular bone tissue remodelling under load // *Series on Biomechanics.* – 2015. – Vol. 29, № 4. – P. 39–44.
65. Underwood E. *Quantitative stereology.* – Mass.: Addison Wesley, 1970. – 370 p.
66. Whitehouse W.J. Irregularities and asymmetries in trabecular bone in the innominate and elsewhere // *J. Metab. Bone Dis. Rel. Res.* – 1981. – Vol. 2. – P. 271–278.
67. Whitehouse W.J. The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone // *J. Microscopy.* – 1974. – Vol. 101. – P. 153–168.
68. Whitehouse W.J., Dyson E.D. Scanning electron microscope studies of trabecular bone in the proximal end of the human femur // *J. Anat.* – 1974. – Vol. 118. – P. 417–444.
69. Wolff J. *Das gesetz der transformation der knochen.* – Berlin: Hirshwald, 1892. – 416 p.
70. Zysset P.K., Curnier A. An alternative model for anisotropic elasticity based on fabric tensor // *J. Mech. Mat.* – 1995. – Vol. 21. – P. 243–250.

CANCELLOUS BONE TISSUE REMODELLING: MATHEMATICAL MODELLING

A.A. Kichenko (Perm, Russia)

Bone tissue is a heterogeneous, anisotropic material and consists of compact and cancellous bone tissues. The structure of cancellous bone tissue in different parts of the skeleton is not the same. It conforms to Wolff's law: it aims to become optimal for the loading which acts on the corresponding bone; the bone remodelling by means of osteosynthesis and resorption mechanisms. The modern problems of biomechanics demand research of the history of formation of bone structures in the course of time at both physiological and pathological loadings. The mandible is one of the most liable to external

and internal bone changes. It is liable to physiological changes that occur during the ontogenesis of the organism. Very often, one has to deal with pathological changes caused by incorrect loading of different regions of bone tissue due to dysfunction of a dentition, a temporomandibular joint and so on. For example, the Popov–Godon’s syndrome which connects with tooth loss is accompanied by pathological remodelling of the surrounding bone tissue. Thus, the mathematical modelling of the cancellous bone tissue behavior in the human maxillo-dental system is one of the topical problems of biomechanics and medicine. Structural features of cancellous bone tissue can be described by means of the fabric tensor. This is possible to implement if there is both a constitutive relation which connects the stress tensor, the fabric tensor, and the strain tensor, and kinetic equations which describe the evolution of the fabric tensor and bone density. The phenomenological Cowin’s equations are chosen and analyzed in detail as such ones. An initial boundary value problem of the cancellous bone tissue remodelling is stated. The solution of this problem allows us to trace changes in the stress-strain state at the trabecular structure formation according to Wolff’s law. The effective numerical algorithm allows us to solve the problem is developed. This algorithm is implemented as a complex of problem-oriented programs. Verification of the model and identification of its parameters are carried out. All numerical calculations are performed using the ANSYS software. Trabecular bone tissue evolution is demonstrated on the set of model examples when the stress–strain state is changed. The results demonstrate different character of influence of changes of loading conditions on the process of structure formation, which follows from Wolff’s law.

Key words: cancellous (trabecular) bone tissue, Wolff’s law, maxillo-dental system, mandible, fabric tensor, constitutive relation, evolution equation, initial boundary value problem of cancellous bone tissue structure remodelling, ramus of mandible.

Получено 11 июня 2019