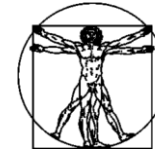


DOI: 10.15593/RZhBiomech/2019.3.03
УДК 531/534: [57+61]



**Российский
Журнал
Биомеханики**
www.biomech.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ БИОМЕХАНИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ОРТОДОНТИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЗУБОВ

А.Л. Дубинин, М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин

Кафедра вычислительной математики, механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: aspalexey@gmail.com

Аннотация. Зубочелюстные аномалии (неправильный прикус, кривостоящие зубы и пр.) являются распространенной проблемой. Ввиду их наличия возможны нарушения эстетики лица, кровоснабжения мозга, дыхания, осанки, мимики, произношения слов, пищеварения и пр. Исправление зубочелюстных аномалий заключается в перемещении зубов в новое положение, соответствующее физиологической норме, под действием ортодонтической нагрузки (брекет-система, эластопозиционер и пр.). Важным вопросом при ортодонтическом лечении является определение такой нагрузки (величина, направление, место приложения). Данная работа продолжает серию публикаций авторов, посвященных решению этого вопроса. Ранее было введено и определено понятие «центр сопротивления зуба», с помощью которого можно исследовать начальное движение зуба в рамках костной лунки. В соответствии с введенными условиями существования данной точки выяснилось, что «центр сопротивления зуба» существует не всегда. Поэтому авторами предложено новое понятие «область сопротивления зуба», определяемое наборами прямых поступательного воздействия и осей поворота парой. В работе исследованы условия существования этих прямых, взаимное расположение и на основе этого продемонстрирована классификация видов области сопротивления зуба.

Ключевые слова: биомеханика зубочелюстной системы, область сопротивления зуба, ортодонтия

ВВЕДЕНИЕ

В ранних работах авторов развит биомеханический подход к исследованию начальной стадии перемещения зубов (в рамках костной лунки, т.е. до начала процессов перестройки костной ткани) при ортодонтическом лечении [4, 6, 11, 12]. Изменение положения зуба происходит в результате действия на него ортодонтической нагрузки, развиваемой корректирующей конструкцией (брекет-система, эластопозиционер и пр.). Для исследования этого малого перемещения была построена биомеханическая модель, в основу которой легло понятие «центр сопротивления зуба». Впервые этот термин был введен Д. Фишем в 1917 г. в работе [10]. Рассматривается элемент зубочелюстной системы, включающий в себя сам зуб и окружающую его связку – периодонт, которая заполняет остальное пространство костной лунки. Зуб рассматривается как абсолютно твердое тело, периодонт принимается линейно-упругой средой. Окружающая кость учитывается в виде граничных условий на перемещении

внешней границы периодонта. Нагрузка прикладывается к коронке зуба. Считается, что ортодонтические силы малы (около 100 гс) и действуют продолжительное время [1–3, 5, 7–9, 13]. В отсутствие нагрузки считается, что зуб находится в состоянии устойчивого равновесия [12].

Вследствие линейной упругости среды связь действующей системы сил и получаемых перемещений описывается следующей зависимостью:

$$\begin{cases} \vec{\rho} = \hat{\alpha} \vec{F} + \hat{\gamma} \vec{M}, \\ \vec{\phi} = \hat{\gamma}^T \vec{F} + \hat{\beta} \vec{M}. \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{\rho}$, $\vec{\phi}$ – обобщенные координаты зуба (перемещение полюса и вектор малого поворота зуба соответственно); матрицы $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ характеризуют податливость среды (зависят от геометрической формы корня зуба, упругих свойств периодонта, положения полюса); \vec{F} – главный вектор системы сил; \vec{M} – главный момент системы сил относительно полюса.

Перемещение точки зуба \vec{u} с радиусом-вектором \vec{r} находится по формуле

$$\vec{u} = \vec{\rho} + \vec{\phi} \times \vec{r}. \quad (2)$$

Центр сопротивления зуба и его окружения определен как точка, удовлетворяющая двум требованиям:

1) если $\vec{F} = 0$, то $\vec{u}(\vec{r}_{cre}) = 0$ для любого \vec{M} (если приложенные силы сводятся к паре сил с моментом, равным главному моменту системы сил, то зуб повернется вокруг центра сопротивления),

2) если $\vec{M} = \vec{r}_{cre} \times \vec{F}$, то $\vec{\phi} = 0$ для любого \vec{F} (если приложенные силы сводятся к равнодействующей с линией действия, проходящей через данный центр, то зуб будет двигаться поступательно (необязательно в направлении действия силы)).

Здесь \vec{r}_{cre} – радиус-вектор центра сопротивления.

Введены условия существования центра сопротивления: «Если матрица $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ антисимметрична, то центр сопротивления существует, единственен и его положение определяется формулой $\vec{r}_{cre} = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$. В противном случае центр сопротивления не существует». Установлено, что центр сопротивления существует при наличии у системы «зуб – периодонт» некоторых идеализированных элементов симметрии: плоскости симметрии, оси симметрии. В случае моделирования данной системы формой, близкой к реальной форме зуба (не имеющей элементов симметрии), данное условие нарушается и центра сопротивления быть не может. В этом случае в работах авторов [4, 6] предложено и исследовано новое понятие «область сопротивления зуба». Оно является естественным обобщением понятия «центр сопротивления» и сохраняет ряд его свойств.

Для удобства дальнейшего повествования введены новые термины:

1. *Прямая поступательного воздействия* – линия действия силы, приводящей зуб к поступательному движению (рис. 1).

2. *Ось поворота парой* – прямая, вокруг которой зуб поворачивается при нагружении парой сил (рис. 2).

Пользуясь новыми терминами, можно переформулировать определение известного понятия центра сопротивления.

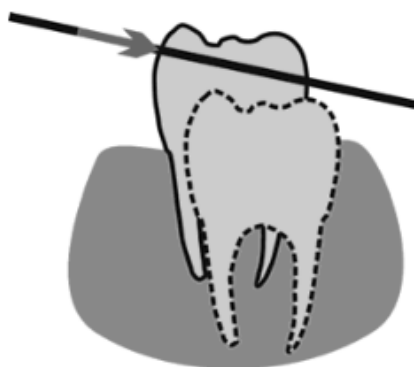


Рис. 1. Изображение прямой поступательного воздействия

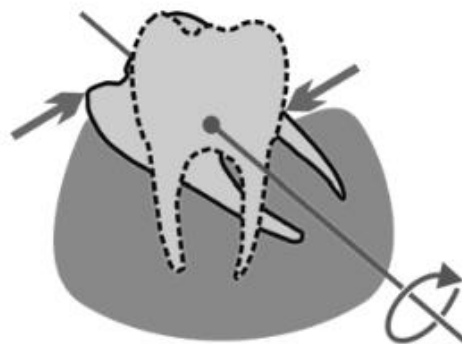
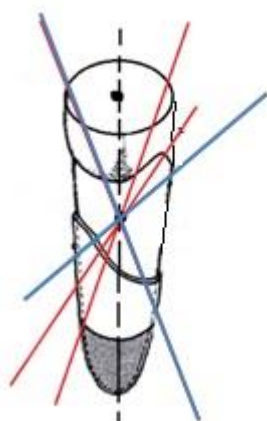
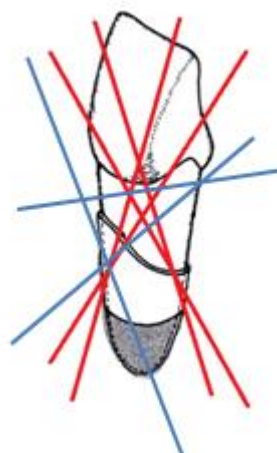


Рис. 2. Изображение оси поворота парой



a



б

Рис. 3. Прямые поступательного воздействия (синие линии) и оси поворота парой (красные линии) пересекаются в едином центре (*a*), не пересекаются (*б*)

«Центр сопротивления зуба – точка, имеющая следующие свойства:

1) любая прямая поступательного воздействия проходит через этот центр, и любая прямая, проходящая через этот центр, является прямой поступательного воздействия (рис. 3);

2) любая ось поворота парой проходит через этот центр, и любая прямая, проходящая через эту точку, является осью поворота парой (см. рис. 3, *a*)».

Далее введем обозначения: $\hat{\delta}$ – симметричная часть матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$; $\hat{\epsilon}$ – антисимметричная часть матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$; $\vec{\epsilon}$ – вектор, соответствующий матрице $\hat{\epsilon}$ ($\hat{\epsilon}\vec{V} = \vec{\epsilon} \times \vec{V}$ для любого вектора \vec{V}).

Так как условием существования центра сопротивления является антисимметричность матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$, то справедливо также следующее утверждение: центр сопротивления существует тогда и только тогда, когда $\hat{\delta} = 0$, и его координаты могут быть найдены как компоненты вектора $\vec{\epsilon}$.

Если $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ не антисимметрична (т.е. $\hat{\delta} \neq 0$), то центра сопротивления не существует. В данном случае прямые поступательного воздействия и оси поворота парой уже не будут пересекаться в одной точке, а будут расположены каким-то другим образом (см. рис. 3, б).

Цель данной работы заключается в том, чтобы исследовать наборы прямых поступательного воздействия и осей поворота парой, а именно условия их существования, взаимное расположение, и на основе этого продемонстрировать классификацию видов области сопротивления зуба.

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖЕСТВА ПРЯМЫХ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Пусть \vec{F} – вектор приложенной к зубу силы, а \vec{r}_F – радиус-вектор точки приложения этой силы. Рассматривая второе уравнение из системы (1), запишем его в виде

$$\vec{\varphi} = \hat{\gamma}^T \vec{F} + \hat{\beta}(\vec{r}_F \times \vec{F}). \quad (3)$$

Вынося общий множитель $\hat{\beta}$ за скобки, получим

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} (\hat{\beta}^{-1} \hat{\gamma}^T \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}).$$

Учитывая, что $\hat{\beta}$ – симметричная матрица, получим $\hat{\beta}^{-1} \hat{\gamma}^T = (\hat{\beta}^{-1})^T \hat{\gamma}^T = (\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1})^T$.

Тогда

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} [(\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1})^T \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}].$$

Учитывая определение матриц $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$ ($\hat{\delta}$ – симметричная часть матрицы $\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1}$; $\hat{\varepsilon}$ – антисимметричная часть матрицы $\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1}$), а также то, что при транспонировании антисимметричной матрицы у нее меняется знак, данное выражение можно привести к виду

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} [(\hat{\delta} + \hat{\varepsilon})^T \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}] = \hat{\beta} [(\hat{\delta} - \hat{\varepsilon}) \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}].$$

Введем вектор $\vec{\varepsilon}$, соответствующий матрице $\hat{\varepsilon}$ ($\hat{\varepsilon} \vec{V} = \vec{\varepsilon} \times \vec{V}$ для любого вектора \vec{V}), получим

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} [\hat{\delta} \vec{F} - \vec{\varepsilon} \times \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}].$$

В конечном виде данное выражение выглядит следующим образом:

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} (\hat{\delta} \vec{F} + (\vec{r}_F - \vec{\varepsilon}) \times \vec{F}).$$

Исследуем множество прямых поступательного воздействия. Для дальнейшего удобства перейдем в специальную систему координат с началом в точке, расположенной на конце вектора $\vec{\varepsilon}$, и выберем за полюс эту точку. Оси этой системы координат направим вдоль главных осей матрицы $\hat{\delta}$. Тогда условие $\vec{\varphi} = 0$ можно представить в виде

$$0 = \hat{\beta} (\hat{\delta} \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}).$$

Учитывая, что матрица $\hat{\beta}$ невырождена, приводя симметричную часть матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ к диагональному виду $\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$ и представляя \vec{r}_F как $\hat{r}_F = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$,

получим

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & -z & y \\ z & \delta_2 & -x \\ -y & x & \delta_3 \end{pmatrix} \vec{F} = 0. \quad (4)$$

Представим это выражение в виде системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \delta_1 F_x - z F_y + y F_z = 0, \\ z F_x + \delta_2 F_y - x F_z = 0, \\ -y F_x + x F_y + \delta_3 F_z = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Далее, при известных значениях матрицы $\hat{\delta}$ в каждой точке поверхности $\vec{r}_F = (x, y, z)^T$ приложим такую силу \vec{F} , чтобы она удовлетворяла условию (4). Ее компоненты могут быть найдены из решения системы (5). Линия действия вектора полученной силы будет являться прямой поступательного воздействия. Таким образом определим множество прямых поступательного воздействия. При этом перемещение полюса \vec{p} находится по формуле $\vec{p} = \hat{\alpha}\vec{R} + \hat{\gamma}\vec{M}$.

Так как $\vec{F} \neq 0$, приравниваем к нулю определитель матрицы (4) и получаем уравнение поверхности второго порядка

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0. \quad (6)$$

Запишем уравнение прямолинейных образующих поверхности второго порядка (в зависимости от знаков «+», «-» определяется первое или второе семейство соответственно), проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) :

$$\frac{x - x_0}{(-y_0 \delta_2 \pm x_0 z_0)} = \frac{y - y_0}{(x_0 \delta_2 \pm y_0 z_0)} = \frac{z - z_0}{\pm(\delta_1 \delta_2 \pm z_0^2)}. \quad (7)$$

Значения чисел δ_i определяют вид поверхности. Таким образом, приходим к классификации множеств прямых поступательного воздействия.

Множество прямых поступательного воздействия 1-го типа

Все числа δ_i не равны нулю и имеют одинаковый знак:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0.$$

Выражение (6) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2\delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1\delta_3} + \frac{z^2}{\delta_1\delta_2} = -1.$$

В этом случае поверхность (6) является пустым множеством. Прямых поступательного воздействия не существует.

При значениях $\delta_1 < 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0$ выражение (6) аналогично данному. Поэтому этот набор значений δ_i не дает нового вида области сопротивления.

Множество прямых поступательного воздействия 2-го типа

Все числа δ_i не равны нулю и имеют различные знаки:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0.$$

Выражение (6) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 - |\delta_3| z^2 - \delta_1 \delta_2 |\delta_3| = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2\delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1\delta_3} - \frac{z^2}{\delta_1\delta_2} = 1.$$

В этом случае поверхность (6) – это однополостный гиперболоид (рис. 4).

В то же время из (5) определим множество прямых поступательного воздействия:

$$\begin{cases} F_x = (-y\delta_2 + xz) t, \\ F_y = (zy + \delta_1 x) t, \\ F_z = (\delta_1\delta_2 + z^2) t. \end{cases}$$

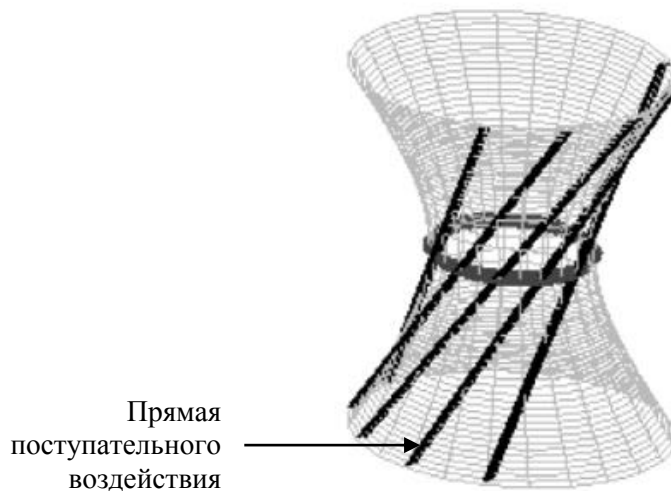


Рис. 4. Множество прямых поступательного воздействия 2-го типа

Линия действия вектора $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ совпадает с прямой (7) (со знаком «+»). Следовательно, множество прямых поступательного воздействия совпадает с одним из семейств прямолинейных образующих.

Набор знаков $\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0$ также не дает нового вида области сопротивления ввиду того, что выражение (6) не дает нового вида при смене знаков δ_i .

Множество прямых поступательного воздействия 3-го типа

Одно из чисел δ_i равно нулю, остальные не равны нулю и имеют одинаковый знак:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (6) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2} + \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

В этом случае поверхность (6) – мнимые пересекающиеся плоскости. Прямых поступательного воздействия не существует.

Множество прямых поступательного воздействия 4-го типа

Одно из чисел δ_i равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют различные знаки:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (6) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 - |\delta_2| y^2 = 0.$$

Приведем его к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2} - \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

В этом случае поверхность (6) – это две пересекающиеся плоскости:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}.$$

Определим множество прямых поступательного воздействия из (5):

$$\begin{cases} F_x = (-y\delta_2 + xz) t, \\ F_y = (zy + \delta_1 x) t, \\ F_z = (\delta_1 \delta_2 + z^2) t. \end{cases}$$

Если взять первую плоскость $y = x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$, то из (7) получим:

$$\begin{cases} x = x_0 \tau, \\ y = x_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}} \tau, \\ z = \sqrt{\delta_1 |\delta_2|} + (z_0 - \sqrt{\delta_1 |\delta_2|}) \tau. \end{cases}$$

где $\tau = 1 + (z_0 + \sqrt{\delta_1 |\delta_2|})t$. Эта прямая проходит через точку $C_1(0, 0, \sqrt{\delta_1 |\delta_2|})$ при любых (x_0, y_0, z_0) , принадлежащих первой плоскости. Таким образом, получаем семейство прямых в плоскости $y = x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$, проходящих через точку C_1 (рис. 5).

Если взять вторую плоскость $y = -x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$, то прямые поступательного воздействия также проходят через точку $C_2(0, 0, -\sqrt{\delta_1 |\delta_2|})$ в этой плоскости (см. рис. 5).

Таким образом, прямые поступательного воздействия – это два плоских пучка прямых, которые проходят через две точки C_1 и C_2 , лежащие на линии пересечения данных плоскостей (см. рис. 5).

Множество прямых поступательного воздействия 5-го типа

Лишь одно из чисел δ_i не равно нулю:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (6) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 = 0.$$

При этом поверхность (6) вырождается в пару совпадающих плоскостей.

Прямая поступательного воздействия

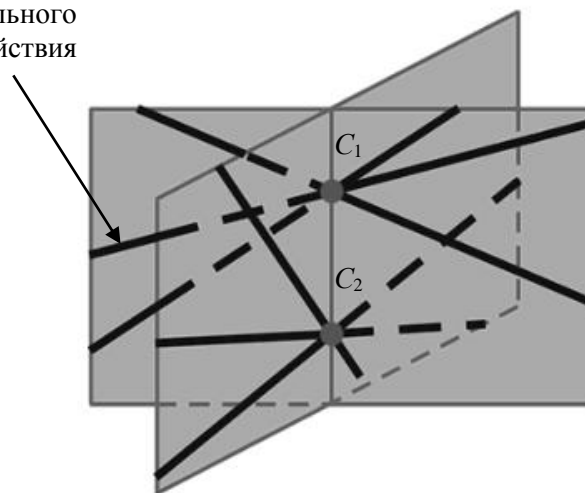


Рис. 5. Множество прямых поступательного воздействия 4-го типа

Аналогично прямые поступательного воздействия собираются в плоский пучок прямых, который проходит через одну точку C_3 (рис. 6).

Множество прямых поступательного воздействия 6-го типа

Все числа δ_i равны нулю:

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

В данном случае (6) – все пространство.

Из (5) можно показать, что

$$\begin{cases} F_x = xzt, \\ F_y = zyt, \\ F_z = z^2t. \end{cases}$$

Видно, что при $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ вектор $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – любой. Это и означает семейство всех прямых, проходящих через точку $(0, 0, 0)$. Таким образом, прямые поступательного воздействия – пространственный пучок прямых, проходящих через точку C_4 (рис. 7).

В данном случае $\delta_i = 0$, что удовлетворяет условию существования центра сопротивления, который совпадает с точкой C_4 .

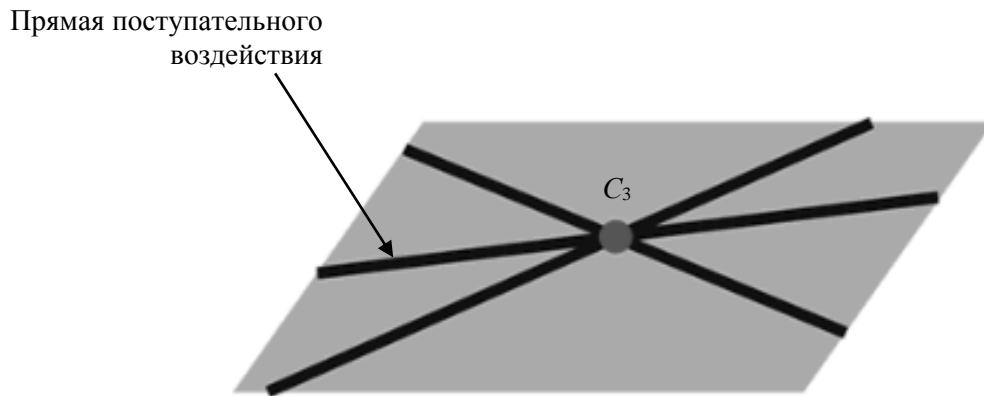


Рис. 6. Множество прямых поступательного воздействия 5-го типа

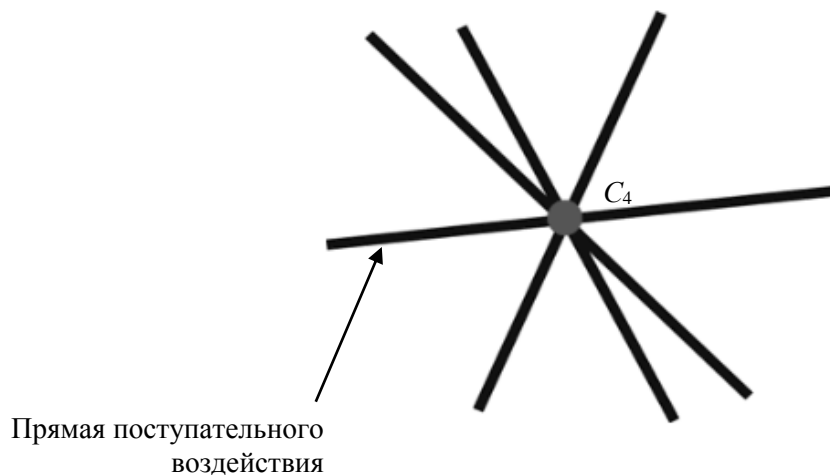


Рис. 7. Множество прямых поступательного воздействия 6-го типа

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖЕСТВА ОСЕЙ ПОВОРОТА ПАРОЙ

Далее пусть \vec{M} – момент пары сил, приложенной к зубу. Тогда система (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \vec{\rho} = \hat{\gamma}\vec{M}, \\ \vec{\varphi} = \hat{\beta}\vec{M}. \end{cases}$$

Выразим $\vec{\rho} = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}\vec{\varphi}$ и подставим в (2). Тогда

$$\vec{u} = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}\vec{\varphi} + \vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Учитывая определение матриц $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$ ($\hat{\delta}$ – симметричная часть матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$; $\hat{\varepsilon}$ – антисимметричная часть матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$), получим

$$\vec{u} = (\hat{\delta} + \hat{\varepsilon})\vec{\varphi} + \vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Вектор \vec{r} представим в виде антисимметричной матрицы \hat{r} ($\hat{r}\vec{V} = \vec{r} \times \vec{V}$ для любого вектора \vec{V}), найдем

$$\vec{u} = (\hat{\delta} + \hat{\varepsilon})\vec{\varphi} - \hat{r}\vec{\varphi}. \quad (8)$$

Перейдем к уже введенной ранее системе координат с началом, расположенным в точке, координаты которой являются компонентами вектора $\vec{\varepsilon}$. Из (8) и условия $\vec{u}(\vec{r}_{cre}) = 0$ (при чистом повороте центр сопротивления не перемещается) получаем уравнение оси поворота

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & z & -y \\ -z & \delta_2 & x \\ y & -x & \delta_3 \end{pmatrix} \vec{\varphi} = 0. \quad (9)$$

Представим (7) в виде системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \delta_1\varphi_x + z\varphi_y - y\varphi_z = 0, \\ -z\varphi_x + \delta_2\varphi_y + x\varphi_z = 0, \\ y\varphi_x - x\varphi_y + \delta_3\varphi_z = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Далее, при известных значениях матрицы $\hat{\delta}$ через каждую точку поверхности проведем ось вращения (линия действия вектора малого поворота $\vec{\varphi}$), удовлетворяющую условию (9). Его компоненты $\vec{\varphi} = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$ могут быть найдены из решения системы (10). Таким образом определим множество осей поворота парой.

Так как $\vec{\varphi} \neq 0$, приравняем к нулю определитель матрицы (9) и получаем также уравнение поверхности 2-го порядка

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0.$$

Таким образом, приходим к классификации типов области сопротивления через множество осей поворота парой.

Далее рассмотрим отдельно каждый вид множеств осей поворота парой аналогично тому, как это было проведено при исследовании посредством множества прямых поступательного воздействия.

Множество осей поворота парой 1-го типа

Все числа δ_i не равны нулю, имеют одинаковый знак:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0.$$

Выражение (11) в этом случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0. \quad (11)$$

Приведем данное выражение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2 \delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1 \delta_3} + \frac{z^2}{\delta_1 \delta_2} = -1.$$

При этом соотношение (11) не имеет решения и осей поворота парой нет.

При значениях $\delta_1 < 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0$ выражение (11) аналогично данному.

Поэтому этот набор значений δ_i не дает нового вида области сопротивления.

Множество осей поворота парой 2-го типа

Все числа δ_i не равны нулю, имеют разные знаки:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0.$$

Выражение (11) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 - |\delta_3| z^2 - \delta_1 \delta_2 |\delta_3| = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2 \delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1 \delta_3} - \frac{z^2}{\delta_1 \delta_2} = 1.$$

В этом случае поверхность (11) – это однополостный гиперboloид (рис. 8).

Из (10) определим множество осей поворота:

$$\begin{cases} \varphi_x = -(y\delta_2 + xz)t, \\ \varphi_y = (zy - \delta_1 x)t, \\ \varphi_z = -(\delta_1 \delta_2 + z^2)t. \end{cases}$$

В данном случае линия действия вектора $\vec{\varphi} = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$ совпадает со второй прямой (6) (со знаком «-»). Следовательно, множество осей поворота также совпадает со вторым из семейств прямолинейных образующих (рис. 8).

Набор знаков $\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0$ также не дает нового вида области сопротивления, так как (11) не дает нового вида при смене знаков δ_i .

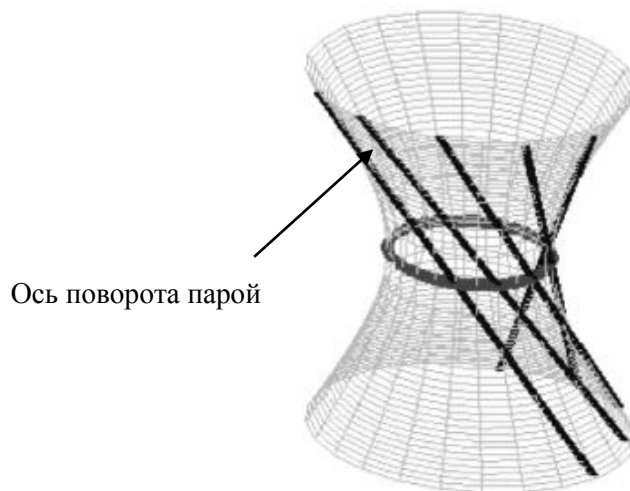


Рис. 8. Множество осей поворота парой 2-го типа

Множество осей поворота парой 3-го типа

Одно из чисел δ_i равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют одинаковый знак:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (11) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2} + \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

В этом случае поверхность (11) – мнимые пересекающиеся плоскости. Осей поворота парой не существует.

Множество осей поворота парой 4-го типа

Одно из чисел δ_i равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют различные знаки:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (11) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 - |\delta_2| y^2 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\delta_2} - \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

Аналогично ранее рассмотренному случаю из классификации типов области сопротивления через прямые поступательного воздействия (также четвертого типа при $\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 = 0$) получаем подобный результат:

$$\begin{cases} x = x_0 \tau, \\ y = x_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}} \tau, \\ z = \sqrt{\delta_1 |\delta_2|} + (z_0 - \sqrt{\delta_1 |\delta_2|}) \tau. \end{cases}$$

Однако в данном случае параметр $\tau = 1 - (z_0 + \sqrt{\delta_1 |\delta_2|})t$. Таким образом, если взять первую плоскость $y = x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$, тогда оси поворота парой образуют семейство прямых, которое проходит через точку $C_2(0, 0, -\sqrt{\delta_1 |\delta_2|})$, введенную ранее в этой плоскости (см. рис. 9). Если взять вторую плоскость $y = -x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$, то оси поворота парой образуют семейство прямых, которое проходит через точку $C_1(0, 0, \sqrt{\delta_1 |\delta_2|})$ в этой плоскости.

Выражение (11) определяет два семейства осей поворота, которые параллельны двум плоскостям. Соответствующий набор осей поворота парой предстает в виде двух плоских пучков прямых (см. рис. 9). Они лежат в тех самых плоскостях, образованных прямыми поступательного воздействия. В то же время эти пучки прямых проходят также через те же две точки, из которых состояла область сопротивления (см. рис. 5). Однако наборы осей поворота парой и прямых поступательного воздействия, которые проходят через одну из точек области сопротивления, оказываются лежащими в разных плоскостях.

Множество осей поворота парой 5-го типа

Только одно из чисел δ_i отлично от нуля:

$$\delta_1 > 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

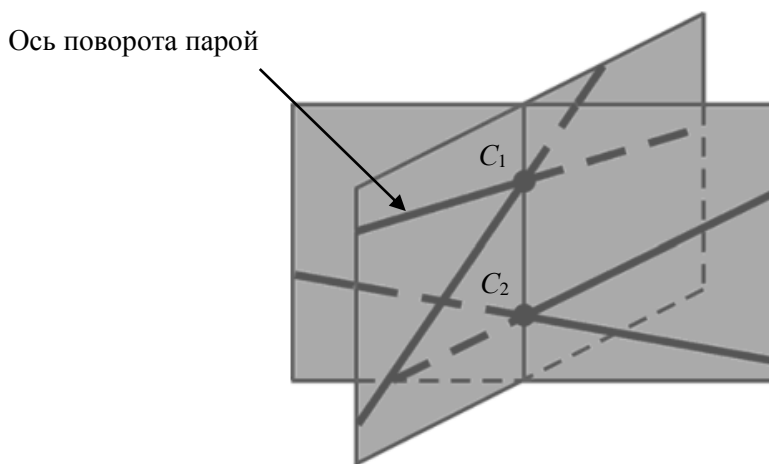


Рис. 9. Множество осей поворота парой 4-го типа

Выражение (11) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\delta_1 x^2 = 0.$$

Выражение (11) определяет семейство направлений, параллельное некоторой плоскости. Соответствующий набор осей поворота парой предстает в виде плоского пучка прямых. Он лежит в той же плоскости, которая образовалась посредством прямых поступательного воздействия. Данный пучок прямых проходит через ту же точку, которая представляла собой область сопротивления (рис. 10).

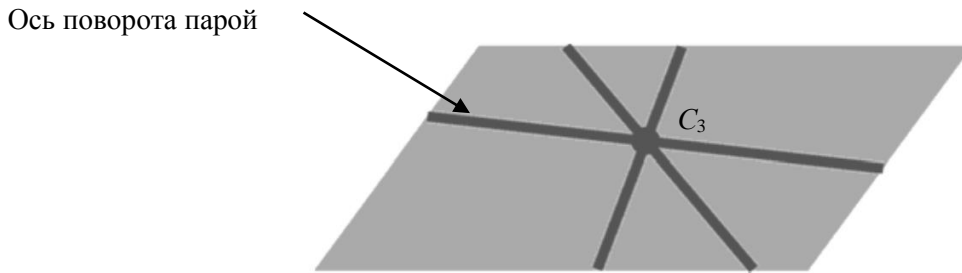


Рис. 10. Множество осей поворота парой 5-го типа

Множество осей поворота парой 6-го типа

Все числа δ_i равны нулю:

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

В этом случае соответствующее множество осей поворота парой (11) есть все пространство.

Аналогично подобному случаю из классификации множеств прямых поступательного воздействия при соответствующих условиях $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$ видно, что оси поворота парой являются пространственным пучком прямых, который проходит через одну точку C_4 (рис. 11).

В данном случае $\delta_i = 0$ и существует центр сопротивления, совпадающий с точкой C_4 .

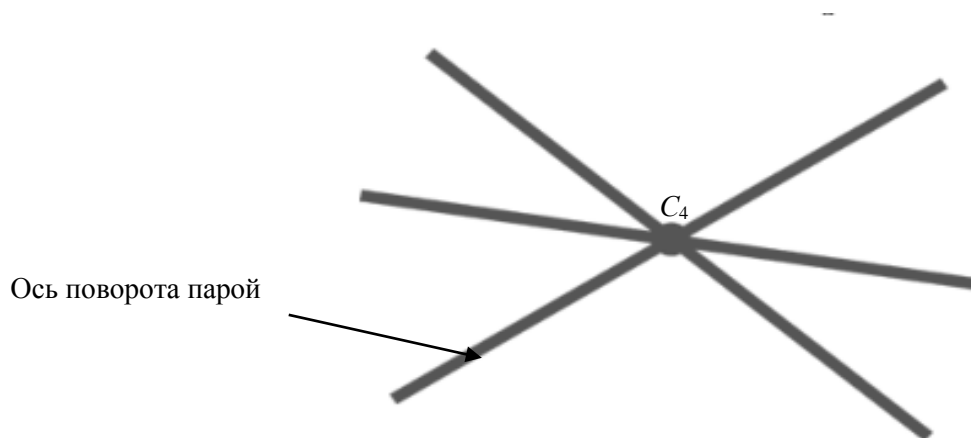


Рис. 11. Множество осей поворота парой 6-го типа

Выводы

Таким образом, продемонстрирована классификация, приведены методика определения вида и положения области сопротивления зуба в зависимости от геометрических и механических параметров системы «зуб – периодонт». Пользуясь этим понятием, можно определять точку приложения и направление системы ортодонтических сил. Такие данные способны объективизировать эмпирические методы ортодонтии: они позволяют теоретически обосновать выбор оптимального варианта приложения ортодонтической нагрузки с количественной оценкой ее величины с учетом формы, положения, топографии зуба, сформулировать рекомендации по настройке и установке ортодонтического аппарата.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Пермского края, также поддержано грантом РФФИ № 18-01-00589.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астахов Н.А., Гофунг Е.М., Катц А.Я. Ортопедическая стоматология. – Л.: Медгиз, 1940.
2. Величина сил ортодонтических аппаратов и морфологические изменения при их применении [Электронный ресурс]. – URL: www.mysurgeon.ru/baza_znaniy/stomatologiya_657 (дата обращения: 10.01.2016).
3. Губская А.Н., Золотухин И.В., Корешков В.А. Дозирование ортодонтической нагрузки при перемещении зубов. – Киев, 1982. – 41 с.
4. Дубинин А.Л. Область сопротивления зуба: экспериментальное определение // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т. 19, № 1. – С. 79–89. DOI: 10.15593/RJBiomech/2015.1.07
5. Калвелис Д.А. Ортодонтия. Зубочелюстные аномалии в клинике и эксперименте. – Л.: Медицина, 1964. – 238 с.
6. Осипенко М.А., Няшин Ю.И., Няшин М.Ю., Дубинин А.Л. Область сопротивления зуба: определения и свойства // Российский журнал биомеханики. – 2013. – Т. 17, № 2. – С. 31–38.
7. Персин Л.С. Ортодонтия. Диагностика и лечение зубочелюстных аномалий: руководство для врачей. – М.: Медицина, 2004. – 360 с.
8. Проффит У.Р. Современная ортодонтия. – М.: МЕДпресс-информ, 2008. – 560 с.
9. Хорошилкина Ф.Я. Руководство по ортодонтии. – М.: Медицина, 1999. – 797 с.
10. Fish G.D. Some engineering principles of possible interest to orthodontists // Dental Cosmetics. – 1917. – Vol. 59. – P. 881–889.
11. Nyashin Y.I., Nyashin M.Y., Osipenko M.A., Lokhov V.A., Dubinin A.L., Rammerstorfer F., Zhurov A. Centre of resistance and centre of rotation of a tooth: experimental determination, computer simulation and the effect of tissue nonlinearity // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2016. – Vol. 3. – P. 229–239. DOI: 10.1080/10255842.2015.1007961
12. Osipenko M.A., Nyashin M.Y., Nyashin Y.I. Center of resistance and center of rotation of a tooth: the definitions, conditions of existence, properties // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3, № 1. – P. 1–11.
13. Schwartz A.M. Tissue changes incidental to orthodontic tooth movement // International Journal of Orthodontics. – 1932. – Vol. 18. – P. 331–352.

USING OF DIGITAL TECHNOLOGIES AT BIOMECHANICAL MODELLING OF ORTHODONTIC TOOTH MOVEMENT

A.L. Dubinin, M.A. Osipenko, Yu.I. Nyashin (Perm, Russia)

Dental anomalies (malocclusion, crooked teeth, etc.) are a common problem. Due to them, violations of the aesthetics of the face, blood supply to the brain, respiration, posture, facial expressions, pronunciation of words, digestion and etc. are possible. Correction of dental anomalies consists in moving the teeth to a new position corresponding to the physiological norm under the influence of the orthodontic load (bracket system, elasto-positioner, etc.). The main question in orthodontic treatment is the determination of such load (value, direction, place of application). This work continues a series of publications by authors dedicated to solving this question. Earlier, the concept of “center of resistance of a tooth” was introduced and determined. Using this concept, it is possible to study the initial movement of the tooth within the framework of the bone hole. In accordance with the introduced conditions for the existence of this point, it turned out that the "center of resistance of a tooth" does not exist always. Therefore, the authors proposed a new concept of “region of resistance of a tooth” determined by sets of translational action lines and a pair of rotation axes. The purpose of this work is to study them, namely, the conditions for the existence of these lines, the relative position and, on the basis of this, to demonstrate the classification of the types of tooth resistance region.

Key words: dentoalveolar biomechanics, region of resistance of tooth, orthodontics.

Получено 01 августа 2019